АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ
И ТЕХНИКИ

ИСТОРИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выпуск
XXV

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1980

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции 7

Из истории математического анализа

С. С. Петрова (Москва), **Д. А. Романовска** (Варшава). К истории открытия ряда Тейлора 10

И. А. Головинский (Москва). Ранняя история аналитических итераций и функциональных уравнений 25

А. И. Маркушевич (Москва). Некоторые вопросы истории теории аналитических функций в XIX в. 52

С. С. Демидов (Москва). Развитие исследований по уравнениям с частными производными первого порядка в XVIII—XIX вв. 71

А. В. Дорофеева (Москва), **В. М. Тихомиров** (Москва). От правила множителей Лагранжа до принципа максимума Понтрягина 104

Н. И. Симонов (Москва). О развитии идеи корректности краевых задач математической физики 129

Б. М. Левитан (Москва). Очерк истории теории почти-периодических функций 156

Ф. А. Медведев (Москва). Аксиома выбора и математический анализ 167

И. Г. Ламберт
(к 250-летию со дня рождения)

А. П. Юшкевич (Москва). И. Г. Ламберт и Л. Эйлер . . . 189

А. Т. Григорьян (Москва), **Н. И. Невская** (Ленинград). И. Г. Ламберт и Петербургская академия наук 218

З. А. Кузичева (Москва). Символическая логика в сочинениях И. Г. Ламберта 225

Б. Л. Лаптев (Казань). Ламберт — геометр 248

И. Г. ЛАМБЕРТ
(к 250-летию со дня рождения)

И. Г. ЛАМБЕРТ И Л. ЭЙЛЕР[1]

А. П. Юшкевич

Выдающегося математика, астронома и философа XVIII в. Ламберта называют во Франции Жан-Анри Ламбéр (Jean-Henri Lambert), а в странах немецкой речи Иоганн-Генрих Лáмберт (Johann-Heinrich Lambert). Мы будем следовать принятому у нас немецкому произношению. Сам Ламберт свободно владел обоими языками и писал свои труды как на них, так и на латыни, материнским же языком его был эльзасский диалект, разновидность старонемецкого, на котором и теперь говорят в его родном городе Мюлузе, находящемся в Эльзасе. Предки Ламберта, бывшие кальвинистами, переселились из Пфальца в Мюлуз еще около 1624 г. Если учесть сложные политические судьбы Мюлуза, бывшего тесно связанного и с Францией, и с Германией, и со Швейцарией, а в XVIII в. представлявшего собой нечто вроде вольного города с собственным самоуправлением, то было бы несправедливо — как это делают различные авторы — назвать Ламберта французом, немцем или швейцарцем, хотя в некотором смысле он был и тем, и другим, и третьим. Определение национальной принадлежности в некоторых случаях оказывается задачей, не имеющей однозначного решения. Единственное, что можно сказать с полной определенностью,— это что Ламберт был уроженцем Эльзаса, и притом города Мюлуза. Мы присоединяемся в этом вопросе к лучшему современному знатоку жизни и творчества Ламберта, проживающему в Мюлузе,— профессору Р. Жакелю (см. [1, с. 123—139]).

В истории науки имена Ламберта и Эйлера тесно связаны. Ученые почти с универсальными интересами, они нередко занимались в течение более 20 лет

---

[1] Данная статья представляет собой несколько расширенный текст доклада автора на Международном симпозиуме памяти Ламберта, состоявшемся в Мюлузе 26—30 сентября 1977 г.

близкими вопросами. В 1758—1763 гг. они переписывались, а в 1764—1766 гг. работали бок о бок в Берлине.

Судьба Эйлера (1707—1783) сложилась более благоприятно, чем Ламберта. Сын пастора в Базеле (который, между прочим, расположен всего в 30 км от Мюлуза), Эйлер здесь окончил университет, и его первыми шагами в области высшей математики руководил Иоганн I Бернулли. В 20 лет Эйлер стал адъюнктом и в 23 года профессором Петербургской академии наук. Отныне его положение в Петербурге, затем в 1741—1766 гг. в Берлинской академии наук, а после того опять в Петербурге было до самой смерти неизменно в высшей степени почетным и хорошо вознаграждаемым. Ламберт родился 26 августа 1728 г. в семье простого портного, обремененного большой семьей: в 1747 г., когда глава семьи скончался, в ней было семеро детей. Посещать школу И. Г. Ламберт смог всего до 12 лет, успев приобрести только самые элементарные познания. Родители отозвали его, чтобы он помогал по дому и в работе. В «Похвальном слове г. Ламберту» (Eloge de M. Lambert) Ж. Формея, непременного секретаря Берлинской академии наук в 1748—1797 гг., хорошо лично знавшего Ламберта, говорится, что последний в течение нескольких лет «попеременно выполнял обязанности ученика и служанки» [2, т. 1, с. 3]. Но науки привлекали мальчика, затем юношу с непреодолимой силой. В свободные вечерние и ночные часы он самоучкой овладевал знаниями, в том числе языками. Превосходный почерк и счастливый случай позволили ему занять в 15 лет секретарскую должность на одном промышленном предприятии, затем в 17 лет — в редакции базельской газеты и в 18 лет — место воспитателя трех детей 7—11 лет в семье вельможи, графа Пьера де Салис, проживавшего в швейцарском городке Куре. В этой должности Ламберт проработал десять лет, непрестанно пополняя свое образование чтением. В 1756—1758 гг. он предпринял с двумя старшими учениками общеобразовательную поездку по нескольким странам, посетив Гёттинген, Утрехт, Гаагу, Лейден, Париж, Марсель, Ниццу, Турин и Милан. Всюду он завязывал знакомства с местными учеными, такими, как математик А. Г. Кестнер, астроном Т. Майер, физик П. ван Мушенбрек, Ж. Даламбер и др. Вскоре после возвращения в Кур, в мае 1759 г., Ламберт расстался с семьей де Салис, чтобы всецело отдаться научной деятельности.

В 1755 г. Ламберт опубликовал в швейцарском журнале «Acta Helvetica» свою первую статью — об измерении нагретых тел. Его знания и дарования обращали на себя внимание повсеместно. Он был выбран членом Научного общества в Базеле, поручившего ему вести метеорологические наблюдения. Вслед за тем избрало его членом-корреспондентом Гёттингенское научное общество. Далее он принял деятельное участие в организации Баварской академии наук в Мюнхене и в 1761 г. стал ее иногородним членом; однако сотрудничество с этой академией было недолгим, и из-за некоторых разногласий он в 1762 г. с нею расстался. Несколько лет Ламберт прожил в Куре, нередко выезжая в другие города. В 1760 г. в Аугсбурге вышла его «Фотометрия, или Об измерении и степенях света, цвета и тени» (Photometria, sive de mensura et gradibus luminis, coloris et umbrae), доставившая ему широкую известность. Он положил начало этой новой тогда отрасли физики вслед за французским ученым П. Буге, и один из главных законов взаимодействия света со средой, через которую он проходит, носит имена обоих ученых. В «Фотометрии» Ламберт установил ряд законов, выражающих силу света различных освещенных поверхностей, и привел свои данные о яркости небесных светил при разных условиях; эти вопросы занимали и Эйлера. Год спустя в том же Аугсбурге вышел другой важный труд Ламберта — «Космологические письма об устройстве мироздания» (Kosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues, 1761), в котором развивается мысль, что Млечный Путь является звездной сверхсистемой, состоящей из многих звездных систем,— мысль, которую подтвердили затем наблюдения У. Гершеля и позднейшие исследования.

В январе 1764 г. Ламберт переселился в Берлин, надеясь быть принятым в состав здешней академии наук. Своим иностранным (т. е. проживающим вне Пруссии) членом Берлинская академия избрала Ламберта по инициативе Эйлера еще 9 апреля 1761 г., когда он жил в Аугсбурге, но король Фридрих II не утвердил тогда это избрание [3, с. 266—267]. И в этот раз не все протекало гладко. Одной из причин явились манеры и характер Ламберта. За десять лет, прожитых в семье знатного дворянина, Ламберт не приобрел светского лоска, а вместе с тем отличался немалой самоуверенностью. Когда Фридрих II пожелал, чтобы ему представили вновь приехавшего ученого, между ними состоялся примерно такой диалог:

Король: Добрый вечер, сударь. Будьте любезны сказать мне, какие науки Вы изучили более всего.

Ламберт. Все.

Король. Таким образом, Вы и искусный математик?

Ламберт. Да.

Король. А какой профессор обучал Вас математике?

Ламберт. Я сам.

Король. Так выходит, что Вы — второй Паскаль.

Ламберт. Да, Ваше величество.

На этом, по рассказам современников, разговор оборвался, так как король отвернулся от ученого [4, с. 26—28]. Все же 10 января 1765 г. Ламберт по указанию Фридриха II был избран действительным членом академии по классу физики [3, с. 306], и лишь теперь, на 38-м году жизни, его социальное положение было обеспечено. Впоследствии король сумел оценить дарования и неутомимую энергию Ламберта и в 1770 г. назначил его членом Главного строительного управления с титулом главного советника по строительству — Oberbaurat. В течение 12 лет Ламберт активно работал в разных областях знания — математики, физики, математической логики и философии. Ламберт был не только выдающимся ученым, но и хорошим организатором. Он доказал это уже при образовании Баварской академии наук. В Берлине он стал инициатором издания «Berliner astronomisches Jahrbuch oder Ephemeriden» и содействовал созданию и работе местной обсерватории. Для нужд астрономии он составил ценные логарифмически-тригонометрические таблицы. В общей сложности он подготовил за это время около 150 работ. Он умер в Берлине 25 сентября 1777 г., став, по-видимому, жертвой самолечения, ибо, заболев, не пожелал обратиться к врачам. Незадолго перед смертью Ламберту исполнилось всего 49 лет. Эйлер умер шесть лет спустя в возрасте 76 с половиной лет.

В дальнейшем речь идет о прямых или косвенных контактах Ламберта с Эйлером почти исключительно в области математики. Многие сочинения Эйлера мы обозначаем только их номерами по указателю Энестрема, который с несущественными сокращениями воспроизведен в книге [5, с. 352 — 387]. Рядом с каждым номером там указаны серия и том Полного собрания сочинений Эйлера (Leonhardi Euleri Opera omnia).

ученого, между ними состоялся примерно такой диалог:

Король: Добрый вечер, сударь. Будьте любезны сказать мне, какие науки Вы изучили более всего.

Ламберт. Все.

Король. Таким образом, Вы и искусный математик?

Ламберт. Да.

Король. А какой профессор обучал Вас математике?

Ламберт. Я сам.

Король. Так выходит, что Вы — второй Паскаль.

Ламберт. Да, Ваше величество.

На этом, по рассказам современников, разговор оборвался, так как король отвернулся от ученого [4, с. 26—28]. Все же 10 января 1765 г. Ламберт по указанию Фридриха II был избран действительным членом академии по классу физики [3, с. 306], и лишь теперь, на 38-м году жизни, его социальное положение было обеспечено. Впоследствии король сумел оценить дарования и неутомимую энергию Ламберта и в 1770 г. назначил его членом Главного строительного управления с титулом главного советника по строительству — Oberbaurat. В течение 12 лет Ламберт активно работал в разных областях знания — математики, физики, математической логики и философии. Ламберт был не только выдающимся ученым, но и хорошим организатором. Он доказал это уже при образовании Баварской академии наук. В Берлине он стал инициатором издания «Berliner astronomisches Jahrbuch oder Ephemeriden» и содействовал созданию и работе местной обсерватории. Для нужд астрономии он составил ценные логарифмически-тригонометрические таблицы. В общей сложности он подготовил за это время около 150 работ. Он умер в Берлине 25 сентября 1777 г., став, по-видимому, жертвой самолечения, ибо, заболев, не пожелал обратиться к врачам. Незадолго перед смертью Ламберту исполнилось всего 49 лет. Эйлер умер шесть лет спустя в возрасте 76 с половиной лет.

В дальнейшем речь идет о прямых или косвенных контактах Ламберта с Эйлером почти исключительно в области математики. Многие сочинения Эйлера мы обозначаем только их номерами по указателю Энестрема, который с несущественными сокращениями воспроизведен в книге [5, с. 352 — 387]. Рядом с каждым номером там указаны серия и том Полного собрания сочинений Эйлера (Leonhardi Euleri Opera omnia).

в котором напечатан соответствующий труд; при этом указаны и русские переводы. В некоторых случаях мы ссылаемся в тексте на это издание сочинений Эйлера, выходящее с 1911 г., но не вполне завершенное, обозначая его двумя буквами ЕО.

С января 1752 г. и до конца жизни Ламберт вел дневник, в котором очень коротко отмечал темы своих занятий, интересовавшие его задачи, прочитанные сочинения и т. д. Этот дневник, изданный К. Боппом с ценными пояснениями, под названием «Monatsbuch», т. е. «Ежемесячник» [6] — оригинальный текст не имеет заглавия,— позволяет, по крайней мере частично, проследить за тем, какие труды Эйлера в то или иное время читал Ламберт. По выражению, приписываемому Лапласу, Эйлер был общим учителем всех математиков своего времени, это относится и к Ламберту.

Мы используем дневник только за первые десять лет, этого для наших целей достаточно. Заметим, что в некоторых случаях имя Эйлера не называется, но ясно, что речь идет о его трудах. К тому же не следует упускать из вида, что Ламберт упоминает здесь только сочинения, специально интересовавшие его в момент записи. Сведения, почерпнутые из дневника, пополняются нами другими данными.

Имя Эйлера впервые появляется в дневнике за май 1754 г. в записи: «Продолжал заниматься приемом интегрирования с помощью логарифмов, поясняя, как интегрируются в духе Эйлера дифференциалы рациональных дробей» [6, с. 13]. Здесь имеются в виду статьи Эйлера Е162 и Е163 (ЕО, серия 1, т. 17), опубликованные в 1751 г. В ноябре 1755 г. Ламберт упоминает о чтении сочинения Эйлера по теории комет [6, с. 16], вероятно, речь идет о книге Е66 (ЕО, серия 2, т. 28), изданной в 1744 г. и посвященной проблеме определения орбит комет и планет по нескольким наблюдениям. Определение орбит комет долгое время интересовало Ламберта. Эта проблема, интерес к которой в середине пятидесятых годов обострился в связи с ожидавшимся в конце 1757 г. возвратом кометы Галлея (на самом деле это произошло, в близком согласии с расчетами А. К. Клеро, в конце зимы 1759 г.), упоминается в дневнике в марте 1756 г., июне 1757 г., феврале 1758 г., в июле, августе, сентябре и декабре 1760 г. и в январе и феврале 1761 г. [6, с. 17, 19, 20, 22—23].

Она обсуждалась и в переписке Ламберта с Эйлером, изданной тем же К. Боппом [7], именно в письмах Ламберта от 6 февраля, 24 марта и 26 июня и ответах Эйлера от 25—28 апреля и 18 августа 1761 г. [7, с. 18—19, 21—27]. Исследования Ламберта в этой области, примыкая к сочинению E66, вместе с тем содержали новые результаты. Получив книгу Ламберта «Замечательные свойства орбиты комет» (Insigniores orbitae cometarum proprietates), напечатанную в 1761 г. в Аугсбурге, Эйлер писал ему 28 апреля того же года: «Могу Вас заверить, сударь, что был совершенно поражен красотой открытий, находящихся в этом сочинении» и далее: «Я вижу, что этот вопрос потребует от меня многих исследований, прежде чем я сумею углубить (approfondir) все эти замечательные свойства» [7, с. 21—22]. О чрезвычайно высокой оценке Эйлером дарований Ламберта свидетельствуют такие иронические слова из письма Фридриха II Даламберу, написанному в начале 1765 г. (ответ Даламбера датирован 1 марта): «...Ламберт — это караиб или какой-нибудь дикарь из кафрских краев. Между тем вся Академия, включая Эйлера, перед ним преклоняется...» [8, с. 392]. Хотя, как сказано, мы ограничиваемся здесь сопоставлением математических работ Ламберта и Эйлера, в данном случае стóит сделать небольшое отступление в область астрономии. Среди других вопросов Эйлер решил в E66 задачу об отыскании промежуточного положения кометы (или планеты) в данный момент времени по двум данным, близким ее положениям и промежутку времени. Именно это решение стало отправным пунктом исследований по теории орбит Ламберта, а затем Ж. Л. Лагранжа, В. Ольберса и других ученых. Впоследствии в случае параболической орбиты основное значение получила теорема, выражающая интервал времени $t_2 - t_1$ через сумму соответствующих радиус-векторов r_2, r_1 и соединяющую их концы хорду s:

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} - (r_1 + r_2 - s)^{3/2}$$

(k — постоянная тяготения). Приведенная теорема содержалась уже в сочинении Эйлера E58, изданном в 1743 г. (ЕО, серия 2, т. 28) и, по-видимому, неизвестном Ламберту, когда он писал свой труд о кометах. Во всяком случае, Ламберт выводит здесь эту же теорему по-новому, а главное использует ее для определения геоцентрических расстояний кометы в моменты наблюдений, чего Эйлер не делал; в этом за Ламбертом последовали затем В. Ольберс (1797) и К. Ф. Гаусс (1813), улучшившие приемы вычислений. Данную формулу называют то по имени Эйлера, то по имени Ламберта. В том же сочинении Ламберт пошел далее, распространив теорему на эллиптические орбиты,— в этом случае интервал времени $t_2 - t_1$ зависит, кроме указанных радиус-векторов и хорды, еще от большой полуоси. Теоремы Ламберта продолжают привлекать интерес ученых вплоть до наших дней. Н. Е. Жуковский в 1884 г. дал новое доказательство теоремы Ламберта; М. Ф. Субботин в 1919 г. сообщил ей новую форму и использовал в работах по определению орбит комет и планет, опубликованных в 1922—1924 гг. А. Д. Дубяго в своем руководстве «Определение орбит» (М., 1949) особо подчеркивал роль Ламберта как предшественника Ольберса [1, с. 55—78; 9, с. 287—290].

В декабре 1756 г. Ламберт записывает: «Читал малые труды Эйлера, преимущественно по теории света» [6, с. 18]. Речь, очевидно, идет о сборнике «Opuscula varii argumenti» Е80, изданном в 1746 г., и о сочинении Е88 (ЕО, серия 3, т. 5), в котором Эйлер изложил свою новую теорию света и цветов. Оптические проблемы обсуждались и в переписке Ламберта с Эйлером. О них говорится в письмах Ламберта от 1 июля 1758 г., 15 января и 4 апреля 1760 г. и в письмах Эйлера от 2 февраля и особенно от 20 мая 1760 г.— в последнем Эйлер расточает похвалы «Фотометрии» Ламберта, вместе с тем указывая на многочисленные и грубые опечатки, допущенные нерадивым корректором [7, с. 7—17; в частности, с 15].

В заметке, относящейся к февралю 1757 г., сказано: «Читал „Анализ бесконечно малых“ Эйлера» [6, с. 18]. Через несколько месяцев, в мае того же года, Ламберт записывает: «Сделал выписки из таблицы рефракции ньютоновой „Оптики“, из различных формул суммирования рядов в „Дифференциальном исчислении“ Эйлера и задачи Ловица о проекциях карт в „Трудах космографического общества“» [6, с. 18]. Вот поистине замечательное разнообразие одновременных занятий! Мы пока что отметим, что в это время Ламберт читал и «Введение в анализ бесконечных» Эйлера 1749 г. (Е101—102), и его же «Дифференциальное исчисление» 1765 г. (Е212) (оба эти труда имеются в русском переводе).

В сентябре 1757 г. Ламберт прочитал опубликованную в 1752 г. работу Эйлера о степенях света Солнца и других небесных тел (E178) [6, с. 19]. Этот вопрос обсуждался и в переписке между обоими учеными — в письме Ламберта от 1 июля 1758 г. и ответе Эйлера от 2 февраля 1760 г. [7, с. 7—8, 10—11]. В том же месяце, размышляя над проблемами рефракции, Ламберт познакомился с сочинением Эйлера (E221) о различной преломляемости лучей света в различных средах. Вместе с письмом от 1 июля 1758 г. Ламберт переслал Эйлеру свое небольшое сочинение «Свойства пути света в воздухе» (Propriétés de la route de la lumière dans les airs), вышедшее только что в Гааге; Эйлер в упомянутом ответе, на полтора года более позднем, отозвался об этом труде с большой похвалой. В декабре 1757 г. Ламберт вычисляет таблицу гиперболических (натуральных) логарифмов различных чисел, исходя из данных значений логарифмов нескольких чисел [6, с. 19]. К этому его побудили скорее всего аналогичные примеры во «Введении в анализ бесконечных» (E101, т. I, § 123) и в «Дифференциальном исчислении» (212, ч. II, § 80). Наконец, в ноябре 1761 г. Ламберт делает замечание, на этот раз по-немецки (все предыдущие написаны на латыни): «Выдержка из „Теории движения Луны" г. Эйлера» (E187), вышедшее в 1753 г. [6, с. 24].

Нет нужды продолжать перечисление разнообразных сочинений Эйлера, которые читал или просматривал Ламберт и либо цитировал, либо подразумевал в своем дневнике, сочинениях или письмах. Что касается переписки Ламберта с Эйлером [7], начатой по инициативе первого, то она посвящена главным образом вопросам физики, астрономии и механики. Мы особо выделим один обсуждавшийся в ней вопрос. Эйлер всегда стремился привлекать своих корреспондентов к интересовавшим его проблемам. В данном случае речь идет о математической физике. 20 мая 1760 и 25 апреля 1761 г. Эйлер обращает внимание Ламберта на замечательные мемуары Лагранжа о распространении звука, опубликованные в эти годы в двух первых томах «Miscillanea Taurineesia» [7, с. 15—17, 20—21]. Ламберт смог познакомиться с этими мемуарами лишь осенью 1761 г., когда побывал в Цюрихе. В его дневнике за ноябрь 1761 г. сказано: «Выдержка из „Теории звука" г. де ла Гранжа и применение этой теории к распространению тепла» [6, с. 24]. Несколько месяцев спустя, 12 июля

1762 г., Ламберт написал Эйлеру, что работа Лагранжа о звуке «заслуживает всяческого внимания» и что Лагранж дал «новый прием исчисления». При этом Ламберт заявлял, что сам «принялся сокращать выражения» с целью «придать этому исчислению его подлинный вид»: «Чтобы придать ему всю краткость и все изящество, какие только для него возможны и каких он заслуживает, понадобятся новые знаки и новые теоремы». Это, продолжал Ламберт, «единственное средство познать наиболее общие законы всякой сложной системы, каждая часть которой зависит от всех других». Сам он, Ламберт, уже более восьми лет назад рассматривал подобный случай, о котором как-либо расскажет в своем труде по пирометрии. «Речь идет об определении последовательного нагревания или охлаждения системы различных тел, каким-либо образом соприкасающихся между собой. Я пришел к цели путем индукции и открыл законы, совершенно подобные тем, какие г. де ла Гранж нашел для звука...» [7, с. 29—30].

В своем ответе от 4 декабря 1762 г. Эйлер, приведя лагранжево линейное уравнение с частными производными второго порядка для распространения звука и еще уравнение колебания струны, подчеркнул их существенное отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, рассматривавшихся ранее, и сделал несколько характерных для него замечаний о природе произвольных функций, входящих в решения такого рода уравнений. «Если,— продолжал Эйлер,— Вы хотите глубже проникнуть в эти тайны, Вы легко сведете Ваши исследования о тепле к подобного рода уравнениям с тремя или бо́льшим числом переменных, особенно познакомившись с тем, как я свел к подобного рода простым формулам всю Гидродинамику» [7, с. 32]. Эйлер имел в виду свои сочинения E225—227, изданные в 1757 г., и E258, увидевшее свет в 1761 г. (EO, серия 2, с. 12). Наконец, 7 марта 1763 г. Ламберт выразил надежду, что открытия Лагранжа в области уравнений с частными производными когда-нибудь окажутся для него весьма полезными. К этому он прибавил: «Я уже несколько лет назад начал исследовать этот метод, чтобы воспользоваться им для определения законов передачи и последовательного распределения тепла, где необходимы по крайней мере три независимые друг от друга переменные. Правда, я уже познал эти законы с помощью других методов, но тот, который основан на вторых разностях [т. е. дифференциалах.— *А. Ю.*], мне представляется настоящим и наиболее аналитическим» [7, с. 33].

Таким образом, в начале 60-х годов XVIII в. Эйлер и Ламберт полагали, что уже возможно построить математическую теорию распространения тепла средствами теории уравнений с частными производными. На самом деле физическая база для этого была недостаточной, и начала такой теории были заложены лишь сорок лет спустя Ж. Б. Фурье, который впервые вывел и дифференциальное уравнение распространения тепла в твердом теле. Слова Ламберта об исследованиях, проведенных им несколькими годами ранее, вряд ли следует понимать в том случае, что он тогда разрабатывал методы решения уравнений с частными производными, во всяком случае это не подтверждается какими-либо печатными или рукописными материалами. Кроме того, его, по-видимому, занимал вопрос о передаче тепла в системе соприкасающихся тел, а не о распространении тепла внутри сплошного твердого тела, которым занялся Фурье, впоследствии распространивший задачу и на жидкости. Вместе с тем несомненно, что задачи теории тепла живо интересовали Ламберта, как и некоторых других ученых той эпохи. Одному такому вопросу посвящена, как уже говорилось, его первая публикация 1755 г., а последним его трудом, вышедшим в Берлине вскоре после его смерти, явилась задуманная двадцатью или более годами ранее «Пирометрия, или О мере огня и тепла» (Pyrometrie oder von Maasse des Feuers und der Wärme, 1779), в которой содержатся некоторые предварительные результаты об излучении и отражении тепла, а также о его влиянии на органы чувств; математическая часть этого сочинения не представляет интереса.

В 60-е годы отношения между Ламбертом и Эйлером принимают более тесный и личный характер. 27 ноября 1760 г. Эйлер прочитал в собрании Берлинской академии наук [3, с. 262] письмо Ламберта от 15 января того же года о его опытах над колебаниями в воздухе и в пустоте подвешенного на тонкой нити свинцового груза [7, с. 8—10, 41—43]. Ламберт полагал, что быстрое затухание колебаний в пустоте говорит в пользу не только существования, но и чувствительного эффекта эфира. В ответном письме от 2 февраля [7, с. 11—12] Эйлер высказал мнение, что такой вывод слишком поспешный и что прежде всего надлежит тщательно проверить связь колебаний с упругими свойствами нити, природа которых далеко не ясна, а для этого нужно продолжить опыты, меняя материал и длину нити, вес груза, способ подвешивания и т. д. Вскоре после прочтения письма Ламберта на заседании Берлинской академии, состоявшемся 2 апреля 1761 г., Эйлер предложил избрать Ламберта иностранным членом академии, и неделю спустя эта кандидатура была единодушно одобрена. Эйлер сообщил об этом Ламберту 25 апреля, добавив, что для высылки диплома требуется только одобрение выбора королем. Это, разъяснял Эйлер, новшество, введенное королем в связи с тем, что в академии сейчас нет президента [7. с. 20]. Дело было в том, что после смерти П. Л. де Мопертюи в 1759 г. Фридрих II взял на себя верховное управление академией. Как уже говорилось, король не утвердил тогда избрание Ламберта, о чем Эйлеру пришлось сообщить последнему 18 августа 1761 г., намекнув, что причиной задержки утверждения служат «нынешние обстоятельства» [7, с. 25]. Эйлер имел в виду трудное тогда положение Пруссии в ходе Семилетней войны: Фридриху II действительно было в это время не до академических выборов.

Как видно, в ходе переписки между обоими учеными устанавливались добрые отношения, и Ламберт со своей стороны не преминул оказаться полезным Эйлеру. При выборе по поручению Баварской академии наук конкурсной темы по физико-математическим наукам на 1762 г. Ламберт обратился за советом к Эйлеру, несомненно имея в виду, что в конкурсе примет участие либо сам Эйлер, либо его старший сын Иоганн-Альбрехт (см. письмо Ламберта от 6 февраля 1761 г., [7, с. 18]). 26 июня 1761 г. Ламберт подробно изложил свои соображения по поводу двух вопросов небесной механики, которые представлялись ему достойными внимания ученых, достаточно трудными и вместе с тем разрешимыми [7, с. 23—25]. Ответ Эйлера от 18 августа того же года [7, с. 26] помог Ламберту сформулировать тему, одобренную Баварской академией; она гласила: «В каком отношении с силами, действующими на Луну, находится ее среднее движение, а также ее среднее расстояние от Земли» [6, с. 48]. На конкурс поступила только одна работа — Иоганна-Альбрехта Эйлера. Этот мемуар (EA19), несомненно подготовленный под руководством Эйлера-отца, был удостоен премии и напечатан в 1767 г. в трудах Баварской академии наук, он переиздан в Полном собрании сочинений Эйлера (ЕО, серия 2, т. 24).

В переписке Ламберта с Эйлером несколько раз затрагивался вопрос о возможном переходе Ламберта на работу в Петербургскую академию наук. Мы его не касаемся, так как он был рассмотрен в другом докладе на симпозиуме в Мюлузе, также печатающемся в настоящем выпуске «Историко-математических исследований».

В январе 1764 г. Ламберт, как уже говорилось, прибыл в Берлин, и здесь его отношения с Эйлером приняли, по крайней мере на время, вполне дружественный характер. В октябре того же года они вместе посетили русского посла князя В. С. Долгорукого, у которого находился тогда и русский канцлер, граф М. И. Воронцов. Разговор шел о намечавшейся реорганизации Петербургской академии наук, причем, как писал Эйлер 10 ноября конференц-секретарю этой академии Г. Ф. Миллеру, Ламберт изложил свое мнение по этому вопросу (ср. дневник Ламберта за октябрь этого года [7, с. 26]). В упомянутом письме мы читаем:

«Я уже слышал кое-что о предстоящем новом устройстве Академии, ибо князь Долгорукий получил распоряжение собрать сведения об устройстве здешней Академии, о чем я его полностью информировал. Так как г. Ламберт составил план для Баварской академии, я привел его к князю Долгорукому, которого он в этом отношении вполне удовлетворил, изложив пространный проект всех выгод, которых может ожидать государство от хорошо организованной академии, и того, каким образом ее члены могут объединить свои силы для общей пользы. Такого рода общности недостает почти во всех академиях, так как обыкновенно достигается не более того, что каждый стал бы делать для себя самого» [10, с. 251]. Два месяца спустя, 9 января 1765 г., Эйлер вместе с Ламбертом были на обеде у Долгорукого. Перед тем, 7 января, Эйлер известил Ламберта об этом приглашении запиской, добавляя, что канцлер Воронцов просит Ламберта «соблаговолить ясно и четко изложить различие между старым и новым стилем и доводы в пользу употребления того или другого» (см. [7, с. 35—36] и дневник за январь 1765 г. [6, с. 27, 54]). Добавим, что Эйлер разделял взгляды Ламберта на организацию работы академий и высказал сходные соображения императрице Екатерине II, принявшей его в августе 1766 г., вскоре после его возвращения в Петербург (ср. письмо Эйлера Миллеру от 20(9) августа 1766 г. [10, с. 263]).

Как раз на следующий день после обеда у Долгорукого Ламберт был избран, наконец, действительным членом Берлинской академии наук, о чем Эйлер специально ходатайствовал перед Фридрихом II. Однако вскоре отношения между обоими учеными ухудшились из-за разногласий в Комиссии, которой 7 марта 1765 было поручено проверить финансовое положение Берлинской академии и в которую вошли они оба. Эйлер считал желательным сохранить руководство изданием календарей, которое было важнейшим источником доходов академии, за прежним комиссаром Д. Кёлером, а Ламберт настаивал на том, чтобы Комиссия функционировала и впредь как постоянный контролирующий орган [3, с. 75—76]. Во всяком случае, после отъезда летом 1766 г. Эйлера из Берлина в Петербург его переписка с Ламбертом не возобновлялась, если исключить одно письмо Ламберта от 18 октября 1771 г., на которое по просьбе Эйлера ответил (2 февраля) 22 января 1772 г. А. И. Лексель. К этим двум письмам мы еще возвратимся.

Все же чувство взаимного уважения у обоих ученых сохранилось, и Эйлер был готов сотрудничать с Ламбертом далее. В написанном по-французски «Плане восстановления императорской Академии наук», который Эйлер представил вскоре после прибытия в Петербург, он советовал пригласить «для механики хорошего геометра и физика, который руководил бы всеми механиками и мастерами Академии. На эту должность я хотел бы рекомендовать г. Ламберта, в настоящее время состоящего при Берлинской академии...» [11, с. 308]. Ламберт, как известно, остался в Берлине, с тех пор он и Эйлер следили каждый за исследованиями другого издалека, как ранее. Одним из свидетельств продолжающегося внимания Ламберта к трудам Эйлера являются написанные им для немецких журналов рецензии. Согласно К. Боппу, Ламберт напечатал в 11—13-м томах «Allgemeine Deutsche Bibliothek» рецензии на первые два тома «Интегрального исчисления» (E342 и E366, 1768—1769 гг.) и на немецкий текст обеих частей «Полного введения в алгебру»

(E387—388, 1770), а в 17-м томе на «Диоптрику» (E367, E386, E404, 1769—1771). По-видимому, Ламберту же принадлежит более ранний отзыв о «Дифференциальном исчислении» Эйлера (E212, 1755), напечатанный в «Göttinger Anzeigen» за 1757 г. [6, с. 63, 80].

Мы обратимся теперь к некоторым примерам связей между математическими исследованиями Ламберта и Эйлера. В одних случаях Ламберт использовал или развивал открытия Эйлера, в других они приходили к одинаковым или близким результатам, следуя каждый собственным путем; были также случаи, когда открытия Ламберта становились отправным пунктом исследований Эйлера, Лагранжа и других ученых.

Одним из наиболее известных открытий Ламберта является первое доказательство иррациональности чисел e и π. В 1766 г. Ламберт написал статью «Предварительные сведения для ищущих квадратуру круга и спрямление круга» (Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und die Rectification des Circuls suchen, опубл. в 1770 г.; см. [2, т. 1, с. 194—212]) [2] и вскоре затем представил Берлинской академии «Мемуар о некоторых замечательных свойствах круговых и логарифмических трансцендентных количеств» (Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques; опубл. в 1768 г.; см. [2, т. 2, с. 112—159]). Эйлеру задолго до того также доводилось заниматься проблемой квадратуры круга, когда Петербургская академия наук получала чьи-либо работы по этому вопросу. В частности, сказанное относится к напечатанным в 1737—1738 гг. в Вене брошюрам австрийского офицера И. Н. К. Лейстнера, который претендовал на то, что доказал равенство отношения окружности к диаметру отношению двух квадратов 3844 : 1225 (об этом утверждении Лейстнера писал и Ламберт в первой из упомянутых работ). Эйлеру поручили рассмотреть эти брошюры, и (20) 9 ноября 1739 г. он представил конференции академии свои «Соображения о квадратуре круга господина ротмистра Лейстнера» (Bedenken über des Herrn Rittmeister Leistner Quadraturam Circuli), рукопись на 15 листах, примерно 30 машинописных страниц. В этом документе, хранящемся в Ленинградском отделении Архива Академии наук СССР, имеется весьма

---

[2] Эта работа имеется в русском переводе [12, с. 167—196].

любопытное утверждение: «Было бы даже легко доказать, что [отношение] окружности к диаметру круга не может быть выражено не только квадратными числами, но и вообще рациональными числами» [13, с. 182]. Сомнительно, чтобы Эйлер в это время уже располагал готовым доказательством, которое он в таком случае, вероятно, не замедлил бы опубликовать, но можно полагать, что у него имелась идея доказательства, связанная с некоторыми найденными им разложениями в непрерывные дроби, которыми он в то время занимался, и с одной высказанной ранее Т. Фанте де Ланьи гипотезой, о которой мы упомянем далее. Позднее, в I т. «Введения в анализ бесконечных» (1748), Эйлер высказался более сдержанно: «Положим, что радиус круга или полный синус $= 1$, при этом достаточно ясно, что периферию этого круга рациональными числами выразить точно нельзя» [см. § 126]. Вообще говоря, мысль об иррациональности π не была новой; она встречается у многих авторов до Эйлера, начиная с арабских ученых XI в. В том же томе «Введения в анализ бесконечных» Эйлер выдвинул знаменитое предположение, что логарифмы рациональных чисел при рациональном основании либо рациональны, либо трансцендентны [см. § 105], не определив, впрочем, точно понятия трансцендентного числа; трансцендентным количеством здесь называется количество не рациональное и не иррациональное, без уточнения смысла последнего термина.

Нам неизвестны какие-либо попытки Эйлера доказать иррациональность π, что, по его словам, было бы легко сделать. Во всяком случае, честь публикации первого такого доказательства принадлежит Ламберту, а один пробел в его рассуждениях был восполнен в 1800 г. А. М. Лежандром. При этом Ламберт существенно опирался на результаты Эйлера. Прежде всего Ламберт доказывает, что значение функции e^x при рациональном $x \neq 0$ иррационально, а это предложение основано на разложении в бесконечные непрерывные дроби числа e и функции $(e^x - 1)/(e^x + 1)$ [3]. Затем с помощью разложения в непрерывную дробь $\operatorname{tg} x$ он аналогично устанавливает, что и эта функция при рациональном $x \neq 0$ имеет иррациональное значение, откуда в силу равенства

[3] Заметим, что результат Ламберта получается из степенного ряда для e^x почти теми же рассуждениями, как и в частном случае $x = 1$.

$\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$ следует иррациональность π (именно это свойство функции $\operatorname{tg} x$ высказал в одной статье, напечатанной в 1721 г., упомянутый Т. Фанте де Ланьи). Разложения в непрерывные дроби, о которых идет речь, Ламберт вывел в другой работе «Преобразование дробей» (Verwandlung der Brüche), напечатанной в том же 1770 г., что и «Предварительные сведения...» [2, т. 1, с. 133—138]. «Мысль же искать эти формулы,— писал Ламберт,— подал мне «Analysis infinitorum» господина Эйлера, где в виде примера вычисляется выражение

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18}}}}} \quad \text{и т. д.»}$$

[12, с. 189]. По-видимому, Ламберт не знал, что еще в первом труде Эйлера по теории непрерывных дробей (E71), представленном Петербургской академии в марте 1737 г. и опубликованном в 1744 г., содержались разложения в непрерывные дроби функций $e^{1/s}$ и $(e^{1/s}-1)/(e^{1/s}+1)$ (EO, серия 1, т. 14, с. 210—211).

В XVIII в. не было средств для более глубокого изучения арифметической природы числа π. В резюме статьи E275 о приближенном построении квадратуры круга, предложенном Декартом (эта статья, представленная Берлинской академии 20 июля 1758 г., увидела свет в 1763 г.), Эйлер писал: «Впрочем, окружность круга, по-видимому, должна быть отнесена к гораздо более высокому роду иррациональностей, которого можно достичь только посредством бесконечного повторения извлечения корней, и потому геометрически нельзя добиться большего, чем непрестанно все более близкого выражения отношения окружности к диаметру» (EO, серия 1, т. 15, с. 1—2). Говоря о бесконечном повторении извлечения (квадратных) корней, Эйлер имел в виду то обстоятельство, что предложенное Декартом построение диаметра по данной площади круга равносильно разложению

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{16} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{\pi}{32} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

Впрочем, еще Виет в конце XVI в. выразил $2/\pi$ бесконечным произведением квадратичных иррациональностей. Конечно, Эйлер подозревал, что π — число трансцендентное, но его высказывания по этому вопросу чаще всего были осторожными (как и его суждения о невозможности perpetuum mobile). Так, в § 10 статьи E591, представленной Петербургской академии наук летом 1775 г., но опубликованной уже посмертно в 1785 г. (ЕО, серия 1, т. 4), Эйлер писал, что остается неясным, могут ли трансцендентные количества, включающие окружность круга или логарифмы, быть выражены через какие-нибудь радикальные количества, ибо невозможность этого никем не обнаружена. Бесспорно только, что π не выражается через простые квадратичные иррациональности, поскольку в разложении π в непрерывную дробь не замечается какой-либо периодичности.

Суждения Ламберта отличались большей определенностью. В письме от 10 января 1768 г. к математику и логику Г. фон Голланду он заявлял (мы цитируем по предисловию А. Шпайзера к его изданию математических трудов Ламберта): «Теорема о том, что никакой рациональный тангенс не соответствует некоторой рациональной дуге, замечательна по своей общности. Способ, с помощью которого я ее доказываю... допускает дальнейшее распространение, так что круговые и логарифмические величины не могут быть корнями рациональных уравнений» [2, т. 1, с. XXI]. Лежандр, уточнивший, как сказано, доказательство Ламберта (он это сделал в IV приложении к изданию своих «Начал геометрии», Eléments de géométrie, 1800 г.), сформулировал и более четкое определение трансцендентного числа как числа, которое не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами [12, с. 209]. Таким образом, Ламберт и за ним Лежандр явились непосредственными предшественниками теории трансцендентных чисел, первые основания которой заложил в 1840 г. Ж. Лиувилль и которая после доказательства в 1873 г. трансцендентности e Ш. Эрмитом, а затем в 1882 г. числа π Ф. Линдеманом и, наконец, после решения в 1934 г. седьмой проблемы Гильберта, обобщающей предположение Эйлера относительно логарифмов рациональных чисел, оформилась в отдельную ветвь теории чисел, особенно благодаря работам А. О. Гельфонда, К. Л. Зигеля и Т. Шнайдера.

Специалистам по теории чисел известен так называемый ряд Ламберта

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \tag{1}$$

в разложении которого в степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, x^n \tag{2}$$

коэффициенты $\tau(n)$ равны числу делителей показателя (этот результат почти очевиден). Этот ряд был опубликован Ламбертом в одном философском труде, изданном в 1771 г. [14, т. 2, с. 507]. В настоящее время рядами Ламберта называют более общие ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x^n}, \tag{3}$$

что при $a_n = 1$ сводится к разложению (1), а при $a_n = n$ дает разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = x + 3x^2 + 4x^3 + 7x^4 + 6x^5 + 12x^6 + \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\, x^n, \tag{4}$$

где коэффициенты $\sigma(n)$ суть суммы делителей показателя.

Мы упоминаем ряды Ламберта потому, что ряд (4), точнее говоря, разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n)\, x^{n-1}, \tag{5}$$

было получено Эйлером задолго до публикации Ламбертом разложения (1). В письме к Хр. Гольдбаху от 1 апреля

1747 г., в котором Эйлер впервые привел свою рекуррентную формулу для функции $\sigma(n)$, он указал также, что значения $\sigma(n)$ равны коэффициентам разложения (5) (см. [15, с. 266—268]). В начале письма Эйлер писал: «Недавно я открыл весьма удивительный порядок в числах, представляющих суммы делителей натуральных чисел, который мне кажется тем более примечательным, что здесь имеется, по-видимому, тесная связь с порядком простых чисел» [15, с. 266], а в конце добавил, что «тут должны таиться еще другие прекрасные вещи» [15, с. 268]. Как указывает там же в своем примечании к цитированному письму А. А. Киселев, содержание его вошло в три работы Эйлера: Е175 (опубл. в 1751 г.), Е243, представленную в 1752 г., и Е244 (обе опубл. в 1760 г.; см. ЕО, серия 1, т. 2). Согласно Л. Ю. Диксону [16, с. 28], разложение (4) было известно и Ламберту; вместе с тем Эйлер знал разложение (2). Здесь мы имеем пример дополняющих друг друга и независимых исследований Ламберта и Эйлера.

Ряды Ламберта — их справедливее называть рядами Эйлера — Ламберта — имеют не только исторический интерес. Многие математики XIX и XX вв. занимались рядом (1), и среди них П. Лежен-Дирихле и позднее Т. Леви-Чивита, М. Курце и др. К. Кнопп был уверен, что этот ряд «соблазнительно тесно связан с проблемами простых чисел» [17, с. 451]. В 20-е годы нашего века общие ряды Ламберта стали важным средством арифметических исследований. Н. Винер, например, посвятил этим рядам глубокое исследование (см. [18, особенно гл. 4]) и с помощью одной тауберовой теоремы для этих рядов оригинально доказал асимптотический закон распределения простых чисел. Основные указания и литературу по этому вопросу можно найти в известной книге А. Е. Ингама [19, с. 52—53].

Мы рассмотрим теперь пример открытия Ламберта, оказавшего влияние на Эйлера и затем на Лагранжа. В § 35—40 «Различных заметок по чистой математике» (Observationes variae in mathesin puram), напечатанных в «Acta Helvetica» (1758), Ламберт привел без доказательства разложение наибольшего действительного корня трехчленного уравнения

$$x^m + px = q \qquad (6)$$

в ряд

$$x = \frac{q}{p} - \frac{q^m}{p^{m+1}} + \frac{mq^{2m-1}}{p^{2m+1}} - \frac{m(3m-1)\,q^{3m-2}}{2p^{3m+1}} + \ldots \quad (7)$$

Целью Ламберта было приближенное вычисление корней, и он указывает, что приведенный ряд сходится только при условии $(m-1)^{m-1}p^m > m^m q^{m-1}$. Весьма простая подстановка, добавлял Ламберт, позволяет аналогично выразить корень более общего трехчленного уравнения

$$ax^{\varkappa} + bx^{\lambda} = d. \quad (8)$$

Отправным пунктом Ламберта в данном случае явилось установление с помощью весьма элементарных выкладок все более и более точных границ положительного корня квадратного уравнения $x^2 + px = q$, для которого он получает разложение вида (7) при $m = 2$; толчок его размышлениям, вероятно, сообщило чтение «Начал алгебры» (Eléments d'algèbre. Paris, 1746) А. К. Клеро, который в § 9—11 пятой части этого труда приводит некоторые весьма громоздкие разложения в бесконечные ряды всех трех корней кубического уравнения для неприводимого случая. (Ламберт подчеркивает особенную пригодность своего ряда для этого случая, ссылаясь на § 8 пятой части этого сочинения.)

Приводимый результат Ламберта, который А. Шпайзер назвал «одним из самых замечательных его открытий» [2, т. 1, с. XI], вначале не привлек внимания: швейцарский журнал, в котором он был опубликован, был мало известен. Прибыв в январе 1764 г. в Берлин, Ламберт познакомил со своим открытием и заинтересовал им Эйлера. 17 марта того же года Эйлер писал Гольдбаху: «У нас сейчас здесь искусный г. Ламберт, организовавший для Баварского курфюрста академию в Мюнхене. Он не только отличается во всех науках, но далеко продвинулся и в области анализа: он сообщил мне один ряд, меня поразивший, ибо он совсем другого рода, чем все те, какие до сих пор рассматривали». Изложив затем результат Ламберта, Эйлер добавлял, что таким же способом можно выразить любую степень корня трехчленного уравнения $z^n = az^m + 1$, и, приведя соответствующее разложение, заключал: «Таким образом, по моему мнению, это открытие величайшей важности» [16, с. 404—405]. В дальнейшем Эйлер изложил только что упомянутое обобщение и примыкающие к нему разложения в ряды корней и степеней уравнений с большим числом членов в четырех статьях: E406, представленной и напечатанной в 1771 г.; E532, представленной в 1776 г. и напечатанной в 1783 г.; и еще в E631 и E632, представленных в том же 1776 г., но увидевших свет уже посмертно, в 1789 г. (все они переизданы в EO, серия 1, т. 6).

Эти изыскания Ламберта получили существенное развитие у Ж. Л. Лагранжа, заменившего Эйлера в Берлинской академии наук вскоре после его возвращения в Петербург. Вот что рассказывал об этом сам Ламберт в «Аналитических заметках» (Observations analytiques), напечатанных в 1772 г. [2, т. 2, с. 270—290]. Упомянув свою формулу (7) и беседу с Эйлером, который, как писал Ламберт, нашел ее доказательство, Ламберт продолжает: «Несколько лет назад я разговаривал о ней также с г. де Ла Гранжем... Я добавил, что г. Эйлер нашел также сходный, хотя и более сложный ряд для четырехчленов; что мне известен путь, каким он к этому пришел, и что, вероятно, он опубликует в Петербургских Записках подготовленный им по этому вопросу мемуар». Из последних слов следует, что, когда Ламберт их писал, он еще не видел статью Эйлера E406, о которой говорилось несколько ранее. Далее Ламберт продолжает: «Г. де Ла Гранж, найдя эти исследования достойными его внимания, решил рассмотреть вопрос весьма общим образом... В результате для трехчлена вида

$$\alpha - x + \varphi x = 0$$

получился весьма простой и весьма общий ряд

$$\psi p = \psi x + \varphi x \cdot \psi' x + \frac{d \cdot (\varphi x)^2 \psi' x}{2dx} + \frac{d^2 \cdot (\varphi x)^3 \psi' x}{2 \cdot 3dx^2} + \\ + \frac{d^3 \cdot (\varphi x)^4 \psi' x}{2 \cdot 3 \cdot 4dx^3} + \text{и т. д.},$$

где φ и ψ обозначают какие-либо функции, p — один из корней трехчлена, $\psi' x = \partial\psi x : dx$ и где после дифференцирований следует заменить x на α» [2, т. 2, с. 273—274]. Для ясности заметим, что у автора точка после d заменяет тут скобки, а аргумент в скобки не заключается, так что дифференцируются произведения вида $\varphi^m(x)\psi'(x)$.

В приведенной цитате фигурирует так называемый ряд Лагранжа (иногда его называют теоремой или же формулой обращения Лагранжа), опубликованный в статье «Новый метод решения буквенных уравнений с помощью рядов» (Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries), доложена Берлинской академии наук 18 января и 5 апреля 1770 г. и в том же году опубликована в ее «Мемуарах» [20, с. 5—73]. Этот ряд, который, по словам Э. Нетто, «по существу относится к исчислению бесконечно малых, по применению и происхождению к алгебре, по форме к теории рядов, а по способу вывода... также к комбинаторике» [21, с. 258], стал предметом занятий многих современников Лагранжа и позднейших математиков; условия его сходимости первым рассмотрел Коши. Эйлер, познакомившись со статьей Лагранжа, в письме от (31)20 мая 1771 г. выразил свое восхищение красотой и общностью его результатов [22, с. 224—227]. Заодно Эйлер сообщал, что занялся поисками доказательства теоремы Лагранжа, но встретился вначале со слишком большими препятствиями, но что такое доказательство удалось найти петербургскому академику А. И. Лекселю. В ответном письме от 15 февраля 1772 г. Лагранж выразил желание познакомиться с доказательством Лекселя (это письмо Лагранжа впервые публикуется в ЕО, серия 4, т. 5А), которое последний изложил в письме к Лагранжу от (16)5 марта того же года вместе с двумя доказательствами, данными тем временем Эйлером [22, с. 228—234]. Доказательство Лекселя было опубликовано в его статье, напечатанной в 1772 г. в XVI томе «Novi Commentarii Academiae Petropolitanae» за 1771 г. Для Ламберта ряд Лагранжа стал в свою очередь отправным в некоторых его последующих занятиях задачей разложения в ряды функций переменной величины, заданной какими-либо неявными уравнениями. Об этих исследованиях, изложенных в упомянутых выше «Аналитических заметках» 1772 г., говорится в последнем письме Ламберта Эйлеру от 18 октября 1771 г. [7, с. 36—37]. Эйлер, который из-за почти полной слепоты уже несколько лет не мог писать сам и потому резко сократил свою переписку, поручил ответить на это письмо Лекселю. В этом ответе от (2 февраля) 22 января 1772 г., завершающем переписку Ламберта с Эйлером, Лексель выразил сомнение в возможности получить более общие результаты, чем Лагранж, в случае неявного уравнения с двумя переменными и в целесообразности рассмотрения случая большего числа переменных ввиду чрезмерной сложности соответствующих формул [7, с. 38—39]. «Аналитические заметки» Ламберта явились предметом подробного анализа А. Шпайзера [7, с. XX—XXVI], который не нуждается в дополнении. Что касается теоремы или формулы Лагранжа, то она приводится во многих больших курсах анализа и теорий функций XX в., напрмер у Э. Гурса [23, с. 433—435] или Е. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона [24, с. 178—179].

Вот еще один важный пример взаимосвязей между исследованиями Ламберта, Эйлера и Лагранжа. Уже называвшаяся статья Ламберта «Преобразование дробей» 1770 г. [2, т. 1, с. 133—188] в значительной части посвящена разложениям в непрерывные дроби и их приложениям, начала теории которых были разработаны Эйлером в E71 (см. с. 204), E123, представленной Петербургской академии наук в январе (феврале н. ст.) 1739 г. и опубликованной в 1750 г. (ЕО, серия 1, т. 14), в I т. «Введения в анализ бесконечных»; E101 (1748) и некоторых других трудах. Представление функций непрерывной дробью иногда в некотором смысле выгоднее, чем рядом Тейлора, так как соответствующая дробь сходится в более широкой области или быстрее, чем степенной ряд. Эйлер, показавший многочисленные приложения непрерывных дробей, не исследовал проблему их сходимости. Ламберт в § 23 «Преобразования дробей» специально подчеркивает эту сторону дела, сравнивая оба вида разложения функции $\operatorname{arctg} z$, т. е. в непрерывную дробь и в степенной ряд, при $z = 1$. В § 54 он выражает непрерывной дробью функцию $(1 + x)^n$ и коротко останавливается на ее замечательных свойствах. Эти замечания Ламберта побудили Лагранжа к изысканиям, изложенным в мемуаре «О применении непрерывных дробей в интегральном исчислении» (Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral), опубликованном в мемуарах Берлинской академии в 1779 г. [25, с. 301—332]. Лагранж приводит здесь непрерывные дроби, соответствующие биномиальной, показательной и логарифмической функциям и тангенсу. Эйлер вскоре дополнил анализ Ламберта, причем в случае функций $\operatorname{arctg} x$ и $\operatorname{tg} x$ рассмотрел и комплексные значения аргумента; однако его статья, представленная в марте 1780 г., была напечатана лишь в 1818 г. (ЕО, серия 1, т. 16—2). Мы оставляем в стороне приложения непрерывных дробей к решению дифференциальных уравнений, чем и объясняется название только что упомянутой статьи Лагранжа; такого рода приложения встречаются уже в E71 (уравнение Риккати) и затем в некоторых работах Эйлера, относящихся к тому же времени, что и статья Лагранжа.

Последний наш пример относится к картографии, разрабатывавшейся многими учеными XVIII в.

Картографические задачи постоянно упоминаются в дневнике Ламберта почти с самого начала — с июня 1752 г. [6, с. 12] и до июня и августа 1774 г. [6, с. 32]. Наиболее важная работа его по этому вопросу — «Замечания и дополнения к составлению земных и небесных карт» (Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land — und Himmelscharten) была напечатана в 1772 г. [26, с. 105—192]. В этом труде, появление которого связано было с тем, что Ламберт участвовал в составлении атласа, порученном Берлинской академии наук, были впервые систематически изучены многочисленные виды географических проекций, удовлетворяющих тем или иным условиям, в частности с сохранением углов или площадей. Среди этих проекций есть несколько новых, из которых коническая равноугольная, азимутальная равновеликая и так называемая поперечная меркаторская (на самом деле она не тождественна цилиндрической проекции, предложенной в 1569 г. г. Меркатором) широко применяются и в наше время. Математическая разработка вопроса у Ламберта не была особенно глубокой, но он уже применял в картографии дифференциально-геометрические методы и вывел, например, формулы, выражающие дифференциалы обеих координат стереографической проекции шара на плоскость в функции географической широты и долготы (ср. [1, с. 79—85]). Преследуя главным образом практические цели, Ламберт, однако, оставил в стороне общую задачу конформного отображения шара на плоскость (термин «конформный» введен был Ф. И. Шубертом в статье, напечатанной в 1789 г.).

Эйлер занялся картографией задолго до Ламберта, еще в 30-е годы, но ее теоретической разработке посвятил несколько статей, близких по времени к «Замечаниям и дополнениям» Ламберта. В мае 1772 г. он представил Петербургской академии мемуар E492 о географической проекции Делиля, применявшейся тогда на генеральной карте России. Три года спустя он продолжил анализ проблем картографии в статьях E490 и E491, представленных в сентябре—ноябре 1775 г. Все три статьи были опубликованы в 1777 г. (EO, серия 1, т. 28). В работе E490 Эйлер устанавливает невозможность конгруэнтного представления какой-либо части шара на плоскости, выводит необходимые и достаточные условия конформного отображения в виде некоторых дифференциальных уравнений и, интегрируя последние, получает общее решение задачи об отображении областей шара на плоскость с сохранением подобия бесконечно малых фигур. При этом он предлагает два способа решения: один, который называет «частным методом», не представляет большого интереса, и другой, «общий метод», в котором впервые применяет в данной задаче функции комплексного переменного. Это был важнейший шаг вперед в построении теории конформных отображений как части общей теории аналитических функций в нашем современном смысле слова. В той же статье E490 решается в одном частном случае задача отображения шара с сохранением площадей, а в статье E491 показано, что стереографическая проекция получается из общих формул конформного отображения как частный случай. Мы не имеем данных для суждения о прямой связи этих двух работ Эйлера со статьей Ламберта по картографии, напечатанной в 1772 г. С другой стороны, несомненно, что дифференциальные формулы Ламберта, упомянутые выше, побудили заняться тем же вопросом Лагранжа, который сам засвидетельствовал это в статье «О построении географических карт» (Sur la construction des cartes géographiques), напечатанной в 1781 г. в мемуарах Берлинской академии за 1779 г. [25, с. 637—692]. Выводя формулы конформного отображения, Лагранж, подобно Эйлеру, использовал функции комплексного переменного; при этом он поставил и решил несколько новых вопросов (подробнее в статьях E490—E491, имеющихся и в русском переводе, указанном в [5], см. [21, с. 572—575]; ср. также [27, с. 32—33]).

Все приведенные выше примеры, число которых можно было бы значительно увеличить, свидетельствуют о взаимозависимости многих исследований Ламберта, Эйлера, а также Лагранжа. Вместе с тем Ламберт и сам ставил новые задачи и прокладывал новые пути исследований. Сказанное относится, например, к теории перспективы, тетрагонометрии, т. е. тригонометрическому решению задачи измерения четырехугольника (в этом за Ламбертом последовали несколько ученых, а уже упоминавшийся А. И. Лексель заложил общие основы полигонометрии), теории параллельных и математической логике. Несколько слов о двух последних областях занятий Ламберта.

Попытка доказательства евклидова постулата о параллельных содержится в «Теории параллельных линий» (Theorie des Parallellien) Ламберта, написанной в 1766 г., но при жизни Ламберта не опубликованной, быть может, потому, что он не был удовлетворен своими результатами. Эта работа была издана в 1786 г. Иоганном III Бернулли [28] и содержит самый тонкий анализ вопроса, предшествовавший открытию неевклидовой геометрии. По-видимому, ни один из творцов последней — ни Н. И. Лобачевский, ни Я. Бояи, ни даже живший в Германии К. Ф. Гаусс — не был знаком с этим оригинальным произведением, на которое обратили внимание лишь в конце прошлого века историки неевклидовой геометрии (см., например, [29, с. 95—97]). У Эйлера нет каких-либо заслуг в разработке теории параллельных, хотя, вопреки мнению его биографа О. Шписса [30, с. 210—211], и он мимоходом отдал дань проблеме доказательства V постулата, о чем свидетельствуют записи его ученика Н. И. Фусса [31]; занимался этой проблемой и Лагранж [21, с. 401—402].

В истории логики имя Эйлера упоминается в связи с предложенными им кругами для изображения объемов понятий — идеей, которая не была чужда ранее Лейбницу. Ламберт, развивая другие идеи Лейбница, продвинулся значительно дальше. Построенное им «Логическое исчисление», которое он иногда называл «алгебраической логикой» (Logica algebraica, [6, с. 13]), предвосхищало работы английской школы — А. де Моргана, Дж. Буля и Дж. Венна, и как раз Венн впервые отвел Ламберту то место, которого он заслуживает в развитии математической логики (см. [1, с. 9—19] и [32, с. 115—126]). Работам Ламберта по геометрии и математической логике отводятся в настоящем выпуске «Историко-математических исследований» отдельные статьи.

Мы не ставим здесь целью дать полный обзор математического творчества Ламберта, у которого есть еще ряд других ценных работ по различным вопросам математики, в теории эллиптических интегралов и др.), подробности о них читатель может найти в сводных трудах, вроде [21, 33].

Подводя общий итог, следует сказать, что, несмотря на ряд сделанных им ценных открытий, разнообразие интересов и оригинальность многих идей и методов, Ламберт сыграл в развитии математики несомненно значительно меньшую роль, чем Эйлер. Вместе с тем, принадлежа к более молодому поколению, Ламберт в некоторых отношениях был ближе Эйлера к стилю математического мышления XIX в. Это отметил еще в 1909 г. А. ф. Браунмюль, быть может даже слишком резко противопоставивший стремление Ламберта к современной точности доказательств преобладавшему в XVIII в. формализму [21, с. 448]. Напомним в этой связи замечательные исследования Ламберта об иррациональности чисел e и π, его внимание к сходимости бесконечных рядов и непрерывных дробей, его занятия математической логикой и теорией параллельных.

Д. Тьебо, лингвист, выбранный в Берлинскую академию наук почти одновременно с Ламбертом и проживший в прусской столице двадцать лет,— мы привели выше с его слов рассказ о первой встрече ученого с Фридрихом II,— попросил как-то Ламберта дать оценку наиболее знаменитых здравствовавших тогда математиков. Мы приведем ответ Ламберта с небольшими сокращениями: «Первый среди здравствующих геометров,— ответил он мне,— писал Тьебо,— это г. Эйлер и г. Даламбер, или г. Даламбер и г. Эйлер... оба они в равной мере плодовиты и глубоки: невозможно предпочесть одного другому... Г. де Ла Гранж сегодня является вторым: я добавлю слово „сегодня“, так как есть все основания быть уверенным в том, что он не замедлит их достичь. Третий — это я; я не продолжаю эту классификацию далее, так как не вижу никого другого, достойного быть названным далее» [4, с. 31—32].

Время внесло некоторые поправки в эту классификацию. Что касается лично Ламберта, мы уже упоминали, что ему не была присуща чрезмерная скромность. Но в основном он был прав. В пору его деятельности в Берлинской академии наук он, быть может, наряду с еще одним или двумя математиками (вроде Варинга или Вандермонда), а может быть и впереди них, следовал непосредственно за Эйлером, Даламбером и Лагранжем. Такие ученые, как Монж и Лаплас, тогда лишь начинали свою карьеру, и их работы были мало известны. Этим почетным местом среди математиков середины XVIII в. Ламберт был обязан как своему дарованию, так и глубоким научным связям с самыми выдающимися современниками, и среди них с Леонардом Эйлером, первым математиком того времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jaquel R.* Le savant et philosophe mulhousien Jean—Henri Lambert (1728—1777). Etudes critiques et documentaires. Pâris, 1977.
2. *Lambert J. H.* Mathematische Werke/Hrsg. A. Speiser. Zürich, 1946—1948, Bd. 1/2.
3. Die Registres der Berliner Akademie 1746—1766/Hrsg. in Verbindung mit Maria Winter und eingeleitet von E. Winter. Berlin, 1957.
4. *Thiébaut D.* Mes souvenirs de vingt ans de séjour à Berlin, Paris, 1804, t. 5.
5. Рукописные материалы Л. Эйлера в Архиве Академии наук СССР. Т. I/Научное описание М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962.
6. Johann Heinrich Lamberts Monatsbuch mit den zugehörigen Kommentaren, sowie mit einem Vorwort über den Stand der Lambertforschung/Hrsg. K. Bopp. München, 1915 (Abh. Kön. Bayer. Akad. Wiss. Math.-phys. Kl., Bd. XXVII, 6 Abh.).
7. Leonhard Euler und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel aus den Manuskripten herausgegeben von K. Bopp. Berlin, 1924 (Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl., 1924, N 2).
8. Oeuvres de Frédérie le Grand. Berlin, 1854, t. 24.
9. *Субботин М. Ф.* Астрономические работы Леонарда Эйлера.— В кн.: Леонард Эйлер. Сборник статей в честь 250-летия со дня рождения, представленных Академии наук СССР/Под ред. М. А. Лаврентьева, А. П. Юшкевича, А. Т. Григорьяна. М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 268—374.
10. Die Berliner und die Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers/Hrsg. und eingeleitet von A. P. Juškevič, E. Winter, Berlin, 1959. Teil I.
11. *Пекарский П.* История императорской Академии наук в Петербурге, т. I. СПб., 1870.
12. О квадратуре круга. С приложением истории вопроса, составленной Ф. Рудио/Пер. с нем. под ред. и с прим. акад. С. Н. Бернштейна. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
13. *Юшкевич А. П.* Леонард Эйлер о квадратуре кнуга.— Ист.-мат. исследования, 1957, вып. X.
14. *Lambert J. H.* Anlage sur Architektonik oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis. Riga, 1771, Bd1 1/2.
15. *Euler L., Goldbach Ch.* Briefwechsel 1729/1764/Hrsg. und eingeleitet von A. P. Juskevic, E. Winter. Berlin, 1965.
16. *Dickson E.* History of the theory of numbers. N. Y., 1966, V. 1.

17. *Knopp K.* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 2 Aufl. Berlin, 1924.
18. *Wiener N.* Tauberian Theorems.— Ann. Math., Ser. 2, 1933, 33, 1—100.
19. *Ингам А. Е.* Распределение простых чисел/Пер. Д. А. Райкова. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
20. Oeuvres de J. L. Lagrange. Paris, 1892, V. III.
21. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik/Hrsg. von M. Cantor. Leipzig, 1908, Bd. 4.
22. Oeuvres de J. L. Lagrange. Paris, 1892, V. XIV.
23. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. I/Пер. А. И. Некрасова под ред. Б. К Млодзеевского. М., 1911.
24. *Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н.* Курс современного анал за. Ч. I/Пер. под ред. Г. М. Голузина. Л.; М.: Гостехиздат, 1933.
25. Oeuvres de J. L. Lagrange. Paris, 1869, V. IV.
26. *Lambert J. H.* Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin, 1772, Bd. 3. S. 105—192 (= Ostwald's Klassiker, N 54. Leipzig, 1894).
27. *Маркушевич А. И.* Очерки по истории теории аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.
28. Magazin für die reine und angewandte Mathematik. Leipzig, 1786, 2 St., S. 137—164; 3 St., S. 325—358.
29. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука, 1976.
30. *Spiess O.* Leonhard Euler. Frauenfeld; Leipzig, 1929.
31. *Белый Ю. А.* Эйлеровы эквиваленты пятого постулата.— Ист.-мат. исследования, 1973, вып. XVIII.
32. *Стяжкин Н. И.* Становление идей математической логики. М., 1964.
33. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия/ Под ред. А. П. Юшкевича, т. 3. Математика XVIII столетия. М.: Наука, 1972.

И. Г. ЛАМБЕРТ И ПЕТЕРБУРГСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

А. Т. Григорьян, Н. И. Невская

Связи И. Г. Ламберта с Петербургской академией наук весьма интересны для исследователей его творчества. Непосредственные контакты с Петербургской академией наук Ламберту помог установить Л. Эйлер. В 1760 г., подбирая по просьбе Г. Ф. Миллера (1705—1783), конференц-секретаря этой академии в 1754—1765 гг., кандидата на место профессора астрономии, он вспомнил о И. Г. Ламберте. Обсудив кандидатуры астрономов И. Т. Майера (1723—1762) и Ж. Б. Ж. Лаланда (1732—1807), Л. Эйлер писал Г. Ф. Миллеру 15 июля 1760 г.: «Есть еще один искусный человек в Аугсбурге, по имени Ламберт, швейцарец, который уже известен своими в высшей степени великолепными трудами» [1, с. 153]. Итак, Л. Эйлер смело рекомендовал Ламберта на место профессора астрономии наряду с видными астрономами того времени, так как высоко ценил его таланты и разносторонность.

Однако из-за политических перемен и реорганизации академии вопрос о замещении вакантной должности астронома в течение ряда лет оставался открытым, а обязанности директора астрономической обсерватории были возложены по совместительству на профессора физики Ф. У. Т. Эпинуса (1724—1802). К тому же и сам И. Г. Ламберт после избрания его членом Баварской академии наук не захотел уезжать из Мюнхена.

Узнав в 1761 г. от Л. Эйлера о его рекомендации в Петербургскую академию наук, Ламберт тепло поблагодарил за установление его связей с этой академией и сообщил об условиях, на которых он хотел бы с ней сотрудничать. Так, 26 июня 1761 г. Ламберт писал Эйлеру: «Если случится так, что знаменитая Академия России соблаговолит проявить какой-нибудь интерес к услугам, которые я мог бы ей оказать, то я считаю, что здесь была бы предельной такая возможность, если бы меня удостоили чести помещать в ее Комментариях некоторые диссертации со званием ассосье или иностранного члена» [2, с. 22].

В 1762 г. И. Г. Ламберт из-за неладов с иезуитами потерял свою довольно значительную пенсию в Баварской академии наук, для создания которой он так много сделал, а в январе 1764 г. он переехал в Берлин. 21 апреля 1764 г. Л. Эйлер сообщил Г. Ф. Миллеру об этих изменениях в жизни И. Г. Ламберта и о своих хлопотах по его устройству в Берлинской академии. Восхищаясь выдающейся ученостью Ламберта, Эйлер считал, что он «...во всех отношениях человек, обладающий талантами, которые он принесет в дар любой академии» [1, с. 245].

30 апреля (11 мая) 1764 г. Г. Ф. Миллер сообщил Л. Эйлеру о возможности пригласить Ламберта на освободившуюся должность профессора механики с жалованием 860 руб. в год и уплатой 200 руб. на переезд в Петербург [1, с. 246]. Л. Эйлер ответил 9 июня 1764 г., что И. Г. Ламберт с радостью отдаст свои таланты Петербургской академии наук, но что он «еще до некоторой степени прикован к Баварии» и, «следовательно, понадобится некоторое время, прежде чем он сможет дальше об этом высказываться» [1, с. 248].

Когда 4(15) июня 1764 г. на академической конференции обсуждался вопрос о том, каких двух-трех иностранных ученых можно было бы предложить на вакантное место профессора механики, наряду с именем Г. М. Ловица (1722—1774) было вновь названо имя И. Г. Ламберта. После обсуждения академики приняли следующее решение: «...из всех иностранных ученых, о коих чаять можно, что здешнее предложение примут, способнее к оной механической профессии нет, как г-дн проф. Ловиц в Гёттингене... а если паче чаяния он откажется, то есть ныне в Берлине г-дн Ламберт, который хотя точно не механик, но по прочим его знаниям в физике и математике профессором механики быть может» [3, ф. 3, оп. 1, № 282]. Итак, эрудиция И. Г. Ламберта в области физико-математических наук вновь получила в Петербургской академии высокую оценку. Однако и на этот раз его переезд в Петербург не состоялся.

Ламберт, который с января 1764 г. находился в Берлине, решил остаться в Германии, о чем Эйлер и сообщил Миллеру в письме от 12 июня 1764 г. [1, с. 249], приложив к этому письму письмо Ламберта с его объяснениями и предложениями. По существу, здесь повторялось то, что сообщалось в цитированном выше письме к Эйлеру от

26 июня 1761 г. Так как опубликованный Боппом текст письма Ламберта к Эйлеру от 13 июня 1764 г., основанный на черновом берлинском варианте, содержит ряд разночтений и ошибочно датирован 13 января 1764 г. [2, с. 34—35], нам удобнее процитировать его по ленинградскому оригиналу.

Ламберт писал: «Я без сомнения могу согласиться на то, чтобы давать ежегодно для Комментариев академии некоторые математические и относящиеся к экспериментальной физике статьи, и основой для их выбора мне будет служить соображение, что эти Комментарии и теперь должны сохранять и приумножать свои первоначальные заслуги и славу.

Что можно было бы добавить к этому условию,— это быть членом, присутствующим через переписку, по возможности полезным и нужным для того, чтобы составлять планы академических и систематических работ или вносить свою долю в предложения, уже принятые. Само собой понятно, что для меня в этом было бы тем меньше нового, что похожие условия были в ходу несколько лет назад в совершенно новой, основанной тогда Баварской академии наук.

Предложение, над которым я при этом могу работать, касалось моей Пирометрии, для завершения которой мне остается еще только провести специальный эксперимент, чтобы сделать его пригодным также и в обычной жизни и при всякой работе с огнем. Этот труд, который потребует у меня, вероятно, еще несколько лет времени, кажется, годится для более общего случая, для того, чтобы его приняла какая-нибудь академия и сообщила публике. Ведь нет никакой мелочи, которая бы не оказалась полезной спустя короткое время в отношении силы огня, едва ли не так же, как со времен Архимеда это было в математике и экспериментальной физике относительно воды. Пиростатика, пиродинамика, пиравлика, термометрия и т. д. образованы по сходству этих названий с гидростатикой, гидравликой и т. д. Это сравнение одновременно делает понятным и объем работы.

При этих предложениях, которые я прошу сообщить его высокоблагородию проф. Миллеру, все подойдет на особых условиях, которые, как говорится, нетрудно будеть уточнить, предполагая, что то, что здесь приводится, приближается к тому, что высокочтимой королевской академии полезно будет признать за ясное» [3, ф. 21, оп. 3, № 321, лл. 119—119 об.].

Письма Л. Эйлера и И. Г. Ламберта были зачитаны Г. Ф. Миллером на академическом заседании 14(25) июня 1764 г. [4, с. 519]. После этого вопрос о приглашении И. Г. Ламберта в Петербург профессором механики или астрономии в 1764 г. больше не поднимался, хотя эти места оставались вакантными вплоть до 1768 г.

3 (14) июля 1764 г. был поставлен вопрос об избрании И. Г. Ламберта иностранным членом Петербургской академии наук. В протоколе этого заседания указывалось, что речь шла как об избрании Ламберта в число иностранных членов, так и о жаловании, которое следовало ему назначить «по примеру Эйлера и Гейнзиуса» [1]. На этот раз не было принято никакого решения «из-за отсутствия мнений коллег». Вот что мы читаем в протоколе заседания, на котором присутствовали профессора Г. Ф. Миллер, И. А. Браун (1712—1768), И. Г. Цейгер (1720—1784), С. К. Котельников (1723—1806), И. Г. Леман (1700—1767), С. Я. Румовский (1734—1812) и А. П. Протасов (1725—1796):

«1) Должен был подписываться указ о славнейшем муже Ламберте, избрать ли его в число иностранных членов, и о жаловании по примеру Эйлера, Гейнзиуса.

Очевидно, что никакого решения ждать не приходится, из-за отсутствия мнений коллег» [4, с. 521]. 5 (16) июля Канцелярия Петербургской академии предложила академикам подать письменные мнения о Ламберте, «...быть ли ему иностранным членом здешней академии и с определением пенсии...» [3, ф. 3, оп. 1, № 283, л. 234].

Результаты этого письменного опроса сохранились [3, ф. 3, оп. 1, № 283, л. 235—236], они весьма интересны. Письменные мнения представили девять ученых: математик С. К. Котельников, астрономы Н. И. Попов (1720—1782) и С. Я. Румовский, физики И. А. Браун и Ф. У. Т. Эпинус, химик И. Г. Леман, анатом А. П. Протасов, а также историки Г. Ф. Миллер и И. Э. Фишер (1697—1771). Все они единодушно высказались за избрание И. Г. Ламберта иностранным членом Петербургской академии наук, учитывая его выдающиеся заслуги. Одна-

---

[1] Г. Гейнзиус (1709—1769) был профессором астрономии в Петербургской академии наук в 1736—1744 гг.

ко вопрос о выплате ему жалования (или пенсии, как тогда говорили) вызвал большие затруднения.

По-видимому, перед обсуждением этого вопроса на заседании 3 (14) июля 1764 г. академиков поставили в известность, что невозможно увеличить число «пенсионеров», т. е. иностранных членов, по физико-математическим наукам. Лишь два представителя этих наук могли получать пенсию, а так как Эйлер и Гейнзиус уже ее получали, встал вопрос, кого из них лишить пенсии, чтобы передать ее Ламберту.

Академики предлагали разные выходы из создавшегося положения. Так, например, Котельников, Попов и Румовский предложили избрать Ламберта иностранным членом без жалования, как он и просил в письме к Эйлеру. Браун полагал, что на первое время можно было принять Ламберта без жалования. Он писал: «Жалование же следует отложить на год-другой, пока не выяснится, кого Академия предпочтет» [3, ф. 3, оп. 1, № 283, л. 235 об.]. К мнению Брауна присоединились Протасов и Эпинус. Фишер считал, что Ламберта можно принять без жалования, а затем выдать ему вознаграждение из премиальных сумм, так как его труды вполне заслуживают того, чтобы наградить его премией. И. Г. Леман выражал удивление по поводу того, что все деньги, предназначавшиеся для выплаты наиболее достойным и полезным стране и народу ученым, уже истрачены, и подчеркивал достоинства И. Г. Ламберта. Подводя итоги обсуждению, Ф. Г. Миллер писал: «Что же касается моего избирательного голоса за Ламберта по обоим вопросам, то я от него не отказываюсь. Однако считаю, что с этим следует подождать, лишь бы только не присуждать по два жалованья многим, и лишь бы они не жили одновременно в одном и том же месте» [3, ф. 3, оп. 1, № 283, л. 236].

11 (22) августа 1764 г. в журнале канцелярии Академии наук была сделана запись о том, что мнения Миллера и его коллег были переданы президенту академии [3, ф. 3, оп. 1, № 283, л. 237]. Нам не удалось найти каких-либо официальных документов относительно принятого им решения, однако, как видно из письма Миллера к Эйлеру от 12 (23) октября 1764 г., окончательное решение вопроса было отложено «...так как с некоторого времени уже занимаются новым устройством Академии» [1, с. 250]. Эйлер и Ламберт также приняли участие в этой реорга-

низации. Как сообщал Эйлер в письме к Миллеру от 10 ноября 1764 г.: «Я уже немного слышал о предстоящем новом устройстве академии, так как князь Долгорукий [2] получил приказ навести справку об организации здешней академии, которую я ему тоже полностью передал. Так как г. Ламберт составил план для Баварской академии, то я привел его к князю Долгорукому, которого он также полностью удовлетворил, изложив подробный обзор всех выгод, которые государство может ожидать от хорошо организованной академии, в рамках которой ее члены смогут объединить свои усилия для общей пользы... Об этом также с ним подробно говорил его высокографское сиятельство великий канцлер [3] и подтвердил ему свое большое желание видеть его приглашенным на русскую королевскую службу» [1, с. 251].

Вскоре после возвращения Л. Эйлера в Петербург он предпринял еще одну попытку пригласить И. Г. Ламберта в Петербургскую академию наук на место профессора механики, которое все еще оставалось вакантным. Как отмечалось в протоколе заседания академической конференции, 9 (20) октября 1766 г. вновь обсуждался вопрос об избрании И. Г. Ламберта профессором механики, и снова он был избран единогласно [4, с. 576]. Об этом избрании Ламберту сообщили через непременного секретаря Берлинской академии наук Ж. А. С. Формея (1711—1797).

22 декабря 1766 г. (2 января 1767 г.) на очередном заседании Петербургской академии наук было зачитано письмо Формея от 20 декабря 1766 г., адресованное новому конференц-секретарю Академии Я. Штелину (1709—1785). «Я внушал здесь г. Ламберту,— писал Формей,— что ему следует послать быстрый и решительный ответ, без чего его дело может провалиться. Но это человек, речь которого трудно понять, еще более — разгадать его намерения» [3, ф. 1, оп. 3, № 48, л. 51—51 об.]. Как говорилось в протоколе указанного заседания: «По зачитанному сообщению господина проф. Формея из Берлина о том, что г. проф. Ламберт не дал еще никакого ответа на посланное ему предложение относительно должности профессора механики, и кажется, совершенно не хочет его давать,— было

---

[2] Князь В. С. Долгорукий (1717—1803) был тогда русским посланником в Берлине.

[3] Речь идет о русском канцлере графе М. И. Воронцове (1714—1767).

решено: не ждать больше его столь долго затянувшегося решения, но ответить г. проф. Формею с ближайшей почтой, что дальше при здешней Академии наук не будут больше ни думать о г. Ламберте, ни рассчитывать на него и на вакантную должность профессора механики изберут господина проф. Цейгера из Виттенберга, который уже прежде здесь на этой должности был» [4, с. 587—588].

Несмотря на то что И. Г. Ламберт так и не приехал в Петербург, он до конца своей жизни переписывался как с Петербургской академией наук [5, с. 42], так и с Л. Эйлером и его учениками [2, с. 36—40]. После смерти Ламберта Петербургская академия наук приобрела изданное берлинским астрономом И. Бернулли (1744—1807) Полное собрание сочинений и переписки И. Г. Ламберта, которые всегда занимали почетное место в библиотеке академии [5, с. 608, 679, 782, 829].

Данная статья была доложена одним из ее авторов (А. Т. Григорьяном) на Международном симпозиуме памяти Ламберта, состоявшемся в Мюлузе 26—30 сентября 1977 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Die Berliner und die Petersburger Akademie des Wissenschaften in Briefwechsel Leonhard Eulers/Hrsg. und eingeleitet von A. P. Juskevic, E. Winter. Berlin, Teil I, 1959.
2. *Bopp K.* Leonhard Eulers und Johann Heinrich Lamberts Briefwechsel aus den Manuskripten herausgegeben.— Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. Kl. Berlin, Jahrg. 1924, N 2.
3. Ленинградское отделение Архива АН СССР.
4. Протоколы заседаний конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 год, т. 2 (1744—1770). СПб., 1899.
5. Протоколы заседаний конференции имп. Академии наук с 1725 по 1803 год, т. 3 (1771—1785). СПб., 1900.

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЛОГИКА В СОЧИНЕНИЯХ И. Г. ЛАМБЕРТА

З. А. Кузичева

Логика как самостоятельная научная дисциплина возникла не только под влиянием философии и риторики, но и в тесной связи с математикой. По мере того как математика формировалась в качестве отдельной дисциплины, накапливался опыт проведения доказательств, создавались представления о математической строгости, формулировались требования, предъявляемые к логическому аппарату математики. Так называемая традиционная логика сложилась в результате обособления силлогистики — сравнительно узкого раздела обширной системы, дошедшей до нас в трактатах Аристотеля (384—322 гг. до н. э.). Постепенно было забыто, что в своей логике Аристотель суммировал опыт не только предшествующего развития философии, популярных в то время научных диспутов, но и современные ему представления о математической строгости. Логика стала восприниматься как наука, далекая от математики.

Успехи математики нового времени, развитие ее символического аппарата, расширение областей приложения математических, в особенности алгебраических, методов к объектам не обязательно числовой природы способствовали тому, что логика стала все более привлекать внимание исследователей как возможная сфера приложения математики. Эта тенденция сделалась еще отчетливее после того, как достижения итальянской школы XVI в. были закреплены новым значительным усовершенствованием алгебраического символизма в трудах Ф. Виета (1540 — 1603), а вслед за тем и Р. Декарта (1596—1650).

Виет видел в алгебраических методах «самый верный путь для математических изысканий» [1, с. 70]. Усилия Виета в направлении создания единой методики исследований нашли дальнейшее развитие в идее *всеобщей математики* Декарта, наложившей глубокий отпечаток на логику XVII и XVIII столетий. Самые значительные попытки воплощения этой идеи принадлежат Г. Лейбницу (1646—1716), на основных чертах логики которого мы остановимся несколько подробнее.

1. Представления Лейбница о логике как инструменте открытия новых истин

Лейбниц полагал, что построению новой логики должна предшествовать важная подготовительная работа — анализ и систематизация накопленных человечеством знаний. При этом он считал, что существуют не сводимые к другим исходные понятия, их-то и необходимо выделить прежде всего в процессе анализа. Перечень этих основных понятий составит «алфавит человеческих мыслей». Но одновременно станет возможным доказательство всех известных истин, создание «энциклопедии доказательств». Для всех понятий — исходных и составных, а также для суждений нужно изобрести подходящие символические обозначения, или, как говорил Лейбниц, «универсальную характеристику», всеобщую символику [1]. «Секрет успеха при осуществлении анализа заключается, в частности, в символике, т. е. искусстве правильно употреблять знаки, которыми мы пользуемся»,— писал он Г. Лопиталю [2, т. II, с. 240].

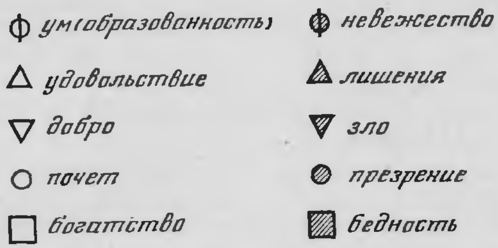
Символы, которые можно было бы использовать в универсальной характеристике, должны были отвечать таким требованиям: 1) быть краткими, удобными, допускать составление легко обозримых и распознаваемых комбинаций, 2) своими очертаниями намекать на свойства изображаемых ими объектов, 3) быть вместе с тем наиболее естественными, наподобие иероглифов или геометрических фигур (см. [3, т. IV, с. 73]).

Универсальная характеристика мыслилась Лейбницем как действительно всеохватывающая символика. Позволяя выразить все существующее и даже возможное знание, она могла бы служить единым международным научным языком и, кроме того, орудием изобретения и доказательства новых истин. Для осуществления последней цели все-

---

[1] Любые знаки: написанные, нарисованные или начерченные на бумаге, высеченные, вырезанные на каком-либо материале,— словом, изображенные каким угодно способом, Лейбниц называл characteres, отсюда — «характеристика».

общая символика нуждалась в специально разработанном логическом исчислении. Лейбниц не построил единой «формальной» теории, но он всю жизнь размышлял над новой логикой и оставил ряд набросков и вариантов символизмов и исчислений. Например, в одном из набросков он предлагает такие символы для некоторых общеупотребительных понятий (рис.).



«Отрицательные понятия» обозначены здесь теми же фигурами, но заштрихованными [4, с. 29].

Основываясь на аналогии между разложением чисел на простые множители и разложением понятий на исходные, Лейбниц составил несколько вариантов «арифметизации» логики (см., например, [5, с. 15]). Приведем для примера символическое представление геометрических понятий, использующее идею «нумерации».

Первый класс составляют понятия, выделяемые в качестве исходных. Им приписываются такие порядковые номера: 1 — точка, 2 — пространство, 3 — расположен между, 4 — расположен рядом, 5 — расположен на расстоянии, 6 — имеющий протяженность, 7 — расположен внутри, 8 — включен, 9 — часть, 10 — целое, 11 — тот же самый, 12 — отличный, 13 — один, 14 — число, 15 — многие (символ множественного числа, пишется в круглых скобках после термина, к которому относится), 16 — расстояние, 17 — возможный, 18 — каждый, 19 — данный, 20 — становящийся, 21 — направление, 22 — измерение, 23 — длина, 24 — ширина, 25 — глубина, 26 — общий, 27 — движение, или непрерывность (progressio seu continuum).

Производных классов 24. Понятия в этих классах нумеруются дробями, знаменатель которых равен номеру класса, а числитель — порядковому номеру понятия в классе. Для обозначения глаголов-связок, предлогов, падежей и т. п. используются латинские и греческие термины. Вот для примера несколько понятий из производных классов.

Второй класс.

1/2. *Количество* есть 14.9 (15-ей) (количество есть число частей).

Третий класс.

1/3. Интервал есть 2.3.10 (15-ми) (интервал есть пространство между целыми).

2/3. *Равное* А есть 11.1/2 (равное А есть то же количество).

Четвертый класс.

1/4. А *больше* В, если А имеет 9.2/3 (А больше В, если А имеет часть, равную В).

2/4. В *меньше* А, если В. 2/3. 9-ти (В меньше А, если В равно части А).

Понятие «бесконечное» определяется вторым в седьмом классе: 2/7. *Бесконечное* 1/4, чем 18.19.17 (бесконечное есть то, что больше, чем каждое данное возможное) [4, с. 554—559].

Оставляя в стороне геометрическое содержание фрагмента, следует признать, что, несмотря на очевидные недостатки — неполный анализ понятий, неоднородность терминов в классах, недостаточная «формализованность», т. е. использование терминов «живого» латинского и греческого языка,— этот фрагмент хорошо иллюстрирует основной замысел Лейбница.

Известно, что большая часть рукописей Лейбница, относящихся к логике, увидела свет лишь в начале нашего столетия. Однако центральная идея универсальной характеристики, руководствуясь которой он разрабатывал новую логику, была известна его современникам и оказала влияние на его последователей, в числе которых был И. Г. Ламберт (1728—1777).

Главными сочинениями Ламберта по логике являются «Новый органон, или Размышления об исследовании и обозначении истин и их различении от заблуждений и иллюзий» [6], 1764, «Введение в архитектонику, или Теория простых и первичных элементов в философском и математическом познании» [7], 1771, и «Логические и философские сочинения» [8, т. 1—2], 1782—1787. В первом томе последнего собрания сочинений Ламберта, опубликованного после его смерти, помещены «Шесть опытов знакового искусства в учении о разуме». Именно эти сравнительно короткие заметки содержат в наиболее сжатой форме основные замыслы символической логики Ламберта. Мы начнем с общей характеристики этой логики, ее связи с естественными языками, с наукой, и в частности с учением о разуме (Vernunftlehre).

2. Общая характеристика знакового искусства Ламберта

Основная задача этого раздела учения о разуме состоит в разработке символики и правил ее применения. Наиболее привычные знаки понятий — слова. Но они не являются самым удобным и экономным способом обозначения. Не случайно в математике, музыке, геральдике, теории стихосложения и многих других областях науки и искусства издавна используются условные символы, более краткие и выразительные, чем слова. Изучению знаков как таковых посвящен один из четырех разделов «Нового органона», носящий название «Семиотика, или Учение об обозначении понятий и вещей», которое «служит для того, чтобы указать, какое влияние оказывает язык и прочие знаки на познание истины и как они могут быть приспособлены для этой цели» [6, с. 2].

Целесообразность введения символов не вызывает сомнения; ясно также, что в процессе создания символики с необходимостью будет построен своеобразный искусственный язык, сочетающий в себе черты и особенности естественных языков, а также черты, присущие арифметике и алгебре. Однако такой язык нельзя построить, не изучив предварительно структуру и особенности реальных языков, не выделив пригодные нам свойства этих языков, без отчетливого осознания и устранения присущих им свойств. Эта мысль настоятельно проводилась в логике XIX в., в особенности в сочинениях А. де Моргана (1806—1871), в частности в его «Формальной логике, или Исчислении необходимых и вероятных заключений» [9], 1847.

Тщательно анализируя язык, его основные элементы, прежде всего понятия, необходимо добиться их четкости, выделить основные, коренные понятия (Wurzelbegriffs), исследовать взаимосвязь понятий, структуру и связи предложений и, наконец, выводы. Здесь мы узнаем идеи Лейбница о всеобщей символике и планы их воплощения.

После такой подготовительной работы язык становится пригодным для преобразования его в «знаковое искусство». Однако и та наука, в которой предполагается применить знаковое искусство, должна быть подготовлена соответствующим образом. Необходимо строго и последовательно изложить ее исходное содержание, сформулировав главные принципы и важнейшие результаты; в процессе такой систематизации тщательно выделяются наиболее специфичные для этой научной дисциплины понятия, особенности их взаимосвязей, приемы и правила преобразования одних понятий в другие. Логическое знаковое искусство строится по аналогии с алгебраическими исчислениями, поэтому, сравнивая понятия, следует выделить отношения типа тождества. Ламберт, как показано далее, устанавливает отношение тождества (неотличимости) на множестве понятий и на множестве предложений.

После этого научная дисциплина готова к тому, чтобы перевести ее содержание на язык символов. Начиная с этого момента наблюдается удивительное сходство рассуждений Ламберта и Дж. Буля (1815—1864). Сходство начинается с того, что перечисляется «алфавит» нового языка.

В «Первом опыте знакового искусства» [8, т. 1, § 9] Ламберт помещает список символов с их истолкованием [2]:

$=$ — неотличимость (Gleichgültigkeit),
$+$ — составление (сложение) (Zusetzung),
$-$ — устранение (вычитание) (Absonderung),
$\times$ — противоположение (Gegenteils),
$>$ — всеобщность (Allgemeinheit),
$<$ — особенное (частное) (Besondern),
$\backsim$ — связка (Bindwörtgens),
$a, b, c, \ldots$ — данные понятия,
$m, n, l, \ldots$ — неопределенные понятия,
$x, y, z, \ldots$ — неизвестные понятия,
γ — символ рода,
δ — символ видового отличия,
$\cdot$ — символ отрицания.

Смысл символов $\times$ и $\cdot$ недостаточно ясен. В текстах Ламберта $\times a$ обозначает противоположное a понятие; символ $\cdot$ (отрицания) используется для обозначения от-

---

[2] Этот список в последующих «Опытах» пополняется новыми символами, например в «Третьем опыте» Ламберт добавляет: — деление (Trennung) и :: — метафизическое отношение [8, т. 1].

рицания данного отношения, когда нет термина для этого отношения (см. раздел, посвященный отношениям).

Дж. Буль в «Исследовании законов мышления, на которых основаны математические теории логики и вероятности» ([10]), начинает построение исчисления введением исходных символов:

(1) x, y, z, ... — символы классов, (2) $\times$, $+$, $-$ — символы операций, вместо знака умножения $\times$ часто используется точка, или знак операции просто опускается, (3) $=$ — символ тождества. Разумеется, аналогия здесь не количественная, а в существе подхода к построению нового аппарата для логических исследований. Имеются и принципиальные отличия, которые мы указываем в соответствующих разделах.

Итак, наука готова к употреблению «знакового искусства». Использование этого искусства состоит в преобразовании исходных данных конкретной задачи по правилам, аналогичным алгебраическим, с тем чтобы неизвестные понятия выразить через известные или заданные. Когда задача решена в символах, наступает следующий этап — перевод результатов с символического языка на язык «слов»; это проблема истолкования (Erklärung). Идея интерпретации также во многом созвучна идеям Буля. Однако в установках Буля существенное отличие. Он работает над построением абстрактной системы, смысл и значение которой весьма глубокие: эта система определяется законами, которым подчинены операции и отношения, и может иметь различные интерпретации в зависимости от того, какие объекты понимаются под символами классов и какие операции при этом принимаются [5, с. 22, 25].

У Ламберта отсутствует такое представление об абстрактном характере исчисления, тем не менее его система явилась шагом вперед по пути создания понятия «исчисление» и создания математической логики.

3. Операции в логике Ламберта

Ламберт вводит в исчисление все алгебраические операции, в том числе возведение в степень и извлечение корня, последняя операция возникает в случае решения уравнения, если неизвестное является степенью. Двух последних операций мы коснемся ниже.

Операция *композиции* (Zusammensetzung, Zusetzung), обозначаемая символом «+», выражающим союз «и» или предлог «с», служит для выражения понятия x, составленного из понятий a и b: $x = a + b$ означает, что x есть a и b [8, т. 1, с. 32].

Вычитанием (отделением) (Absonderung, Auflösung) называется преобразование понятий, состоящее в удалении составляющего из некоторого целого. Оно обозначается символом «—», понимаемым как «без» или «от».

Определением (Bestimmung) или *связыванием* (Verbindung) Ламберт называет преобразование понятия, состоящее в присоединении к данному понятию новых признаков. Однако встречается и такое понимание умножения: «Пусть a, b — два понятия, тогда через ab выражаются их общие признаки» [8, т. 1, с. 25]. Эту операцию Ламберт обозначает точкой, символом умножения или, чаще, отсутствием знака операции.

Четвертое преобразование называется *отвлечением* (Abstraction) или *отделением* (Auflösung, Trennung), символом этой операции служит «:» или «—».

Если a — данное понятие, то $a\gamma$ — его род, $a\delta$ — вид, поскольку понятие полностью определяется указанием рода и вида, то $a = a\gamma + a\delta$.

Постулируются такие свойства умножения и сложения:

$$nR = Rn,\ a + b = b + a,\ (m + n)\,a = ma + na.$$

Ламберт применяет операции к понятиям по их содержанию, т. е. как к совокупностям признаков, в отличие от объемного подхода представителей математической логики XIX в. Не следует думать, однако, что Ламберту чужда объемная точка зрения. Графическому изложению силлогистики Ламберт предпосылает следующее замечание: «Всякое общее отвлеченное понятие распространяется на все индивиды, которым оно присуще. Оно имеет поэтому определенную протяженность. Если представить все эти индивиды в ряд или на линии, то длина этой линии графически изобразит протяженность данного общего понятия» [6, с. 110].

Из подхода Ламберта проистекают особенности его операций и затруднения, которые он так и не преодолел. Прежде всего с принятой им точки зрения «сложение» (композиция) соответствует пересечению объемов классов и, вообще говоря, не отличается от «умножения». Чувствуя такую нечеткость, Ламберт вводит разницу в областях применения операций. Например, относительно композиции он замечает: «Предполагаемые к составлению вещи должны быть субстанциями, и такими, которые допускают составление вместе. Аналогичное замечание верно и относительно сложения отделения. Подобное правило есть и в арифметике, так как слагаемые и вычитаемые друг из друга должны быть однородными» [8, т. 1, с. 156].

Можно ли применять композицию к атрибутам? Ответ зависит от ситуации. Если атрибуты относятся к одной и той же субстанции, то их связывают не знаком «+», а знаком умножения. Это подчеркивается Ламбертом в следующем замечании: «$(m + n)\,A$ есть $mA + nA$, что составляет две разных субстанции, в то время как mnA есть одна субстанция, обладающая двумя признаками» [Там же].

Из обзора операций Ламберта явствует, во-первых, что исчисления, аналогичного тем, что создавались в XIX в., у него еще нет. Введенные им операции пока еще не вполне отчетливы, однозначно понимаемы и дифференцированы. Однако его попытки продвигали вперед проблему введения алгебраических операций в логику. Прояснялась постановка проблемы, отчетливо выступали трудности, связанные с определением операций на множествах «логической природы»; уже на этом этапе встают вопросы о том, сколько нужно вводить операций, каково их сходство с собственно алгебраическими и в чем отличие от них. По существу, Ламберт поставил все вопросы, ставшие предметом дискуссий в XIX в. Его попытки решить эти задачи содействовали выделению идеи исчисления в логическом смысле. Тесно примыкает к проблематике XIX в. и задача исследования отношений, к которой мы перейдем.

4. Отношения в логике Ламберта

Два понятия неотличимы, если все их признаки одинаковы; подобны, если у них совпадают некоторые, но не все признаки; родственны, если одно из этих понятий является признаком другого; различны, если не имеют общих признаков; противоположны, если обладают противоположными признаками [8, т. 1, с. 16]. Сравнивая понятия, выясняем отношения между ними.

Простое отношение (Ratio) есть признак, благодаря которому одно понятие выражается через другое.

Составное отношение (Relatio) есть выражение данного понятия через несколько других понятий.

Кроме того, Ламберт различает логические и метафизические отношения. Логические отношения характеризуют признаки понятий количественно, метафизические отношения говорят о свойствах признаков. Так, упомянутые выше отношения неотличимости, подобия и т. д. являются логическими, поскольку говорят о количестве общих признаков у данных понятий. Примером метафизического отношения может служить причинно-следственная связь между понятиями.

Отношения понятий отражают взаимосвязи объектов. «Строго говоря,— пишет Ламберт,— ни один из предметов не может быть совершенно неотличимым от другого. Тем не менее наше исчисление (Rechnung) должно основываться на отношении неотличимости ...Точно так же обстоит дело в геометрии и арифметике. В первой, например, имеют дело с равносторонними треугольниками, предполагая, что стороны совпадают по длине вплоть до неделимой точки. И все вытекающие отсюда свойства и опирающиеся на этот факт доказательства являются точнейшими, т. е. геометрически точными, хотя в действительности ... нельзя встретить треугольника с геометрически равными сторонами. Требуется значительное усилие для того, чтобы считать их равносторонними.... На практике довольствуются тем, что считают результаты операций и измерений верными, если ошибки не превосходят отличимых нашими чувствами ... ...Столь же условно и наше логическое исчисление ...в нем отвлекаются от некоторых индивидуальных особенностей, составляют себе абстрактную картину, которая, однако, всегда должна согласовываться с раз принятыми соглашениями» [8, т. 1, с. 159].

Таким образом, Ламберт понимает неотличимость в смысле тождества: неотличимые считаются совпадающими. Этот же принцип тождества неотличимых, как известно, принимал Лейбниц: Пусть P — произвольный предикат, тогда

$$x = y \Leftrightarrow \forall P\,(P(x) \to P(y)),$$

это выражение, грубо говоря, означает следующее: все, что можно сказать о x, можно сказать и о y. Из такого понимания неотличимости следуют все свойства этого отношения, в частности:

(1) $x = x$, (2) если $x = y$, то $y = x$, (3) если $x = y$, $y = z$, то $x = z$. Ламберт не выводит свойства неотличимости из принципа Лейбница, а постулирует некоторые из них, прежде всего рефлексивность, полагая, что для любого понятия a

$$a = a.$$

Он явно формулирует и принцип взаимозаменяемости неотличимых, который Ст. Джевонс (1835—1882) принимает в качестве одного из законов, называя его принципом замещения равных [11, с. III].

Ламберт подчеркивает, что отношение неотличимости играет ту же роль, что и равенство в алгебре. К этому отношению он стремится свести все остальные логические, а также метафизические отношения.

Для произвольного метафизического отношения Ламберт принимает символ «: :», подразумевая, что метафизическое отношение полностью определяет одно понятие через другое. Пусть A, B — понятия, N — метафизический признак, тогда формула

$$A = N : : B \tag{1}$$

означает, что между A и B имеется метафизическое отношение. При переводе на язык «слов» символ «: :» выражается винительным падежом, формула (1), таким образом, переводится как «Das A ist N des B», т. е. «A есть N для B».

Преобразуя формально выражение (1), Ламберт получает

$$\frac{A}{N} = \frac{N : : B}{N} = B.$$

Это выражение надо теперь истолковать. «Но при истолковании обнаруживается затруднение. Мы замечаем два обстоятельства. С одной стороны, $\frac{A}{N}$ указывает на операцию, противоположную $N : : B$, символ же : : говорит нам о наличии связи между A и N, поэтому $\frac{A}{N}$ можно воспринять как выражение, символизирующее необходимость устранить связь (auflösen)» [8, т. 1, с. 41].

Истолкование просто и естественно, если известно отношение, противоположное N; обозначая его через $\times N$, получаем

$$B = \times N :: A.$$

Но этим формальным приемом нельзя получить формулы вида

$$N = \times B :: A,$$

поскольку B не является символом отношения. Для определения N надо *действительно* устранить связь, существующую между A и B, т. е. «развязать» их. Однако это уже не простая задача. Трудности, связанные с ее решением, аналогичны тем, что возникают в алгебре при решении обратных задач. «Наибольшие трудности представляет операция устранения связи, точно так же, как в аналитике каждое уравнение легко может быть возведено в степень или продифференцировано, но не столь легко его проинтегрировать или извлечь из него корень; легче связать два понятия, чем освободить их друг от друга» [8, т. 1, с. 45]. В этом пункте отношения с неизбежностью приводят к проблеме введения и истолкования обратных операций, одной из существенных проблем и алгебры логики XIX в. К этим же проблемам приводит и проблема «решения логических равенств».

5. Уравнения в логике Ламберта. Способы их составления и решения

Применение знакового искусства, или всеобщей логистики, как иногда говорит Ламберт, к решению частной задачи состоит из четырех этапов:

(1) наименование (Benennung), т. е. сопоставление символов субстанциям и атрибутам; (2) отождествление (Identification), т. е. составление «уравнения», приведение к отношению неотличимости; (3) решение полученных равенств (тождеств); (4) истолкование полученных решений.

Всеобщая логистика предназначается для определения неизвестных понятий исходя из известных данных или считающихся известными посредством решения соответствующих равенств.

Отождествление понятий состоит в выявлении отношений между искомыми и данными понятиями и сведении его к тождеству. Эти отношения либо задаются при постановке задачи, либо их требуется определить, сообразуясь с природой исследуемых понятий. Отождествить можно любые два понятия. В самом деле, пусть x и y — произвольные понятия, xy — признаки, общие x и y, Ламберт через $x \mid y$ и $y \mid x$ обозначает собственные признаки x и y соответственно, т. е. по определению полагает, что $x \mid y = x - xy$ и $y \mid x = y - xy$. Тогда

$$x + y = x \mid y + y \mid x + 2xy.$$

Однако в общем случае это соотношение не допускает дальнейшего содержательного развития, поэтому для определенности задачи надо, чтобы из трех понятий $x \mid y$, $y \mid x$, xy были известны по крайней мере два. К смыслу коэффициента 2 в слагаемом $2xy$ мы еще вернемся.

Пример. Найти такие два понятия, что, разделив второе на первое, получим *ряд* (Reihe), но если разделить первое понятие на *тождество* (Identität), то останется *признак* (Merkmal).

Решение. Пусть x — первое понятие, y — второе, f — ряд, i — тождество, n — признак, тогда условие выглядит так:

$$y : x = f; \qquad x : i = n;$$

отсюда $x = i :: n$, $y = i :: n :: f$; но поскольку $i :: n$ можно истолковать как «тождество признаков», то x есть подобие (Ähnlichkeit). Но в таком случае $y = x :: f$, следовательно, y — подобие рядов (Ähnlichkeit der Reihe), т. е. порядок (Ordnung) [8, т. 1, с. 86].

Логические отношения неотличимости, подобия, родственности и др., как было сказано, выражаются предложениями. Поэтому проблема их отождествления и решения сводится к соответствующим преобразованиям предложений. Рассмотрим пример метафизического отношения: «Огонь есть причина тепла», огонь и тепло связаны как причина и действие — следствие.

Пусть i — *огонь*, c — *тепло*, α — *причина*, тогда $i = \alpha :: c$.

Оперируя с этим равенством, как с алгебраическим, Ламберт получает еще три выражения, здесь $\cdot$ он, по-видимому, использует как символ отрицания данного отношения в отличие от символа $\times$, указывающего на наличие *термина* для противоположного отношения. Запишем полученные формальные выражения слева, их истолкования — справа:

$i = a : : c$ — огонь есть причина тепла,

$\frac{i}{c} = \frac{a}{\cdot}$ — огонь относится к теплу, как причина к действию,

$\frac{i}{a} = \frac{c}{\cdot}$ — огонь для причины — то же, что тепло для действия,

$\frac{c}{i} = \frac{\cdot}{a}$ — тепло относится к огню, как действие к причине.

Ламберт понимал необходимость наличия в общей теории способов решения, не зависящих от наличия или отсутствия соответствующих общепринятых терминов или понятий, он отчетливо представлял проблему исследования отношений самого общего вида.

Поскольку каждое отношение записывается в виде некоторого предложения, выразив предложения в символах и отождествив их, получим одновременно соответствующие методы преобразования отношений. Ламберт прежде всего выражает символически и сводит к тождествам четыре традиционных предложения силлогистики: общее утвердительное *a*, частное утвердительное *i*, общее отрицательное *e*, частное отрицательное *o*.

Задание. Отождествить, т. е. записать в виде равенства, общее утвердительное предложение. Возможны два случая:

(1) Обратное предложение — общее утвердительное: «все *A* суть *B*» и «все *B* суть *A*», субъект и предикат неотличимы, поэтому

$A = B.$

(2) Обратное не является общим, субъект обширнее, или больше предиката, поэтому

$A > B.$

Для представления этого предложения в виде равенства необходимо доопределить предикат, указать дополнительный признак, «уравнивающий» A и B:

$$A = mB$$

[8, т. 1, с. 93, 96].

З а д а н и е. Выразить символически и свести к тождеству частное утвердительно предложение: «Некоторые A суть B». Здесь также возможны два случая:

(1) Обратное предложение общее: «Все B суть A», предикат больше, чем субъект, поэтому

$$A < B.$$

Это неравенство превращается в равенство доопределением субъекта:

$$mA = B.$$

(2) Обратное предложение частное, предикат есть подвид субъекта, субъект — подвид предиката

$$mA > B, \quad A < nB.$$

Соответствующие доопределения дают

$$mA = nB.$$

З а д а н и е. Выразить символически и свести к тождеству общее отрицательное предложение: «Ни один A не есть B». Субъект обладает признаками, которые не могут быть присущи предикату, и наоборот. Если отделить (trennen) собственные признаки предиката, оставшиеся признаки будут содержаться в субъекте, поэтому

$$A > \frac{B}{m}.$$

Но можно отделить собственные признаки субъекта, тогда оставшиеся составят часть признаков предиката

$$\frac{A}{n} < B.$$

Обычным способом доопределения из двух этих неравенств получается одно равенство

$$\frac{A}{n} = \frac{B}{m}.$$

Случаи частного отрицательного предложения совер шенно аналогичны случаям частного утвердительного и в зависимости от ситуации записываются в виде

$$A < B$$

или в виде

$$mA > B, \quad A < nB.$$

Не отличаются от упомянутых случаев и получающиеся в этом примере равенства

$$mA = B$$

или

$$mA = nB.$$

Ламберт рассматривает приемы символического выражения и сведе́ния к тождествам и для других видов предложений, например условных. Но мы не имеем возможности останавливаться на этом подробнее, к тому же приведенные примеры достаточно ясно демонстрируют его методы составления равенств. Мы не станем подробно заниматься формальными преобразованиями выводов, заметим лишь, что вывод образуется взаимосвязью предложений, поэтому общий способ выражения выводов в символах и оперирования с ними сводится к соответствующим операциям над предложениями. Ограничимся одним примером.

Задание. Найти самую общую формулу вывода.

Решение. Пусть даны посылки

$$\frac{mA}{p} = \frac{nB}{q}, \qquad \frac{\mu C}{\pi} = \frac{\nu B}{\rho},$$

тогда

$$B = \frac{mq}{np} A, \qquad B = \frac{\mu\rho}{\pi\nu} C,$$

откуда почленным умножением получаем

$$\frac{mq}{np} A = \frac{\mu\rho}{\pi\nu} C, \qquad \frac{\mu n}{\pi q} C = \frac{m\nu}{p\rho} A.$$

Общая формула вывода, следовательно, имеет вид

$$\frac{mA}{p} = \frac{nB}{q}, \qquad \frac{\frac{\mu C}{\pi} = \frac{\nu B}{\rho}}{\frac{\mu n}{\pi q} C = \frac{m\nu}{p\rho} A}$$

[8, т. 1, с. 102—103].

Конкретные выводы получаются из этой формулы уточнением параметров m, n, p, q, μ, ν, π, ρ; Ламберт дает правила, регулирующие взаимосвязи этих параметров, с тем чтобы получить правила, по которым посылки дают заключения. С этой точки зрения исследуются все модусы силлогистических фигур [8, т. 1, с. 103—111].

Проблема сведе́ния способов получения следствий из посылок к преобразованию и решению так называемых логических уравнений сделалась главной в математической логике XIX в. Представление предложений в форме равенства и тождества достигается уточнением объемов субъекта и предиката, использованием в качестве дополнительных «сомножителей» неопределенных классов [5, с. 18, 24—25]. Это, как мы только что видели, сделано в символической логике Ламберта, т. е. им решена проблема квантификации предиката, уточнения взаимного субъекта и предиката, и проблема выражения предложений в форме уравнений.

Буль называл «логическим уравнением» и «логической функцией» любое равенство и функцию, содержащие символы классов. Как и Ламберт, он считал, что решить такое уравнение — значит выразить искомый класс через данные или считающиеся известными классы понятия, т. е. вывести следствия из условий задачи, посылок. Процедура решения Ламберта формально не отличается от решения Буля: произвести все алгебраические преобразования над символами классов понятий, а затем вернуть им содержательное истолкование. Однако в последнем пункте имеются существенные различия.

Буль предполагал, что на множестве классов заданы два специфичные класса: «универсум», играющий роль единицы, и «пустой» класс, аналог нуля, обозначаемые соответственно через 1 и 0. Решение уравнения Буль начинал с разложения функции, полученной после перенесения искомого класса влево или заданной в условии, на конституенты — подклассы универсума, образованные комбинациями данных классов и их дополнений.

Операции над классами он подчинил законам, отличным от законов операций над числами:

$$x \cdot x = x, \quad x + x = x.$$

Выполняется закон $x(1 - x) = 0$, где $(1 - x)$ — дополнение x до универсума 1.

Для интерпретации результата решения уравнения Буль сформулировал следующие правила:

(1) В заключительном выражении искомого класса сохраняются все слагаемые конституенты, имеющие числовой коэффициент 1.

(2) Все слагаемые с числовым коэффициентом 0 отбрасываются.

(3) Коэффициент $\frac{0}{0}$ заменяется символом неопределенного класса v.

(4) Все слагаемые, коэффициенты которых имеют вид, отличный от перечисленных в пунктах (1) — (3), например с коэффициентами 2, 3/5, 4/0 и т. п., не появляются в заключительном выражении, приравниваются нулю.

У Ламберта в исчислении встречается «единица», но она у него возникает не как универсальный класс, подклассами которого являются данные классы, а появляется в задачах с «обратными» операциями, как результат деления. Пусть понятие A является признаком понятия B. Если положить $\frac{B}{A} = N$, тогда N — особенный, или метафизический, признак B, и A не имеет никаких собственных признаков, поэтому $\frac{A}{A} = 1$. Отсюда

$$\frac{A}{A} : 1 = \frac{B}{A} : N, \quad A : B = 1 : N.$$

«Таким образом, признак A относится к своему понятию B, как некая вещь (ein Ding) к определенному признаку N» [8, т. 1, с. 54]. В другом месте [8, с. 148—149] он поясняет, что единица есть образ *простой субстанции*, не имеющей никакой спецификации. Представление о единице у него не связано отчетливо с подклассами как подлинными объектами, над которыми осуществляются вводимые операции, это вызвано его подходом «по содержанию» и существенно отличает исчисление Ламберта от алгебраических систем логики XIX в.

Исходя из алгебраических соображений, Ламберт вводит неопределенные коэффициенты и сомножители совершенно аналогично тому, как это делает Буль. Мы не станем, однако, задерживаться на этом и обратимся к роли отличных от нуля числовых коэффициентов, степеней и выражений, содержащих корни, в исчислении Ламберта.

Пусть a — понятие, $a\gamma$ — его род, $a\delta$ — вид. Ламберт полагает по определению

$$a = (a\gamma + a\delta)^n = a(\gamma + \delta)^n.$$

Ясно, что здесь $aa = a$, хотя он и не оговаривает этого. Но $a\gamma$ и $a\delta$ — понятия, поэтому для них верно

$$a\gamma = a\gamma\gamma + a\gamma\delta, \quad a\delta = a\delta\gamma + a\delta\delta.$$

Отсюда

$$a = a(\gamma + \delta)^2 = a\gamma^2 + a\gamma\delta + a\delta\gamma + a\delta^2,$$

$$a = a(\gamma + \delta)^3 = a\gamma^3 + a\gamma^2\delta + a\gamma\delta^2 + a\gamma\delta\gamma + a\delta\gamma\delta + \\ + a\delta\gamma^2 + a\delta^2\gamma + a\delta^3.$$

Пояснения, которые дает затем Ламберт, весьма многозначительны, и мы приведем их полностью:

«Однако вместо $\gamma^2\delta + \gamma\delta\gamma + \delta\gamma\gamma$ нельзя писать $3\gamma^2\delta$, или $3\delta\gamma^2$, или $3\gamma\delta\gamma$, так как все это — совершенно разные признаки. Но вместо $a(\gamma + \delta)^3$ можно все же писать $a(\gamma^3 + 3\gamma^2\delta + 3\gamma\delta^2 + \delta^3)$, имея в виду, что 3 показывает здесь, сколько раз могут переставляться γ и δ в $\gamma^2\delta$ и $\gamma\delta^2$. Таким образом, ради краткости можно писать

$$a = a(\gamma^n + \gamma^{n-1}\delta + \gamma^{n-2}\delta^2 + \ldots),$$

или

$$a = a\left(\gamma^n + n\gamma^{n-1}\delta + \frac{n(n-2)}{2}\gamma^{n-2}\delta + \ldots\right),$$

или, по формуле Ньютона,

$$a = a\left(P^n + nAQ + \frac{n-1}{2}BQ + \frac{n-2}{3}CQ + \ldots\right),$$

и, если выделить признаки, то степени указывают, сколько раз должны быть взяты γ и δ, а коэффициенты — сколько раз они меняются местами» [8, т. 1, с. 6—7]. Вряд ли здесь требуются какие-то пояснения.

Ламберт вводит числовые коэффициенты не только с вышеуказанными целями. Придерживаясь логистической концепции Лейбница, он стремится показать, что арифметика — и даже алгебра и вся аналитика — лишь частный случай всеобъемлющей символической логики. Вот каким образом подкрепляет он свою точку зрения.

Пусть $A, B, C, D, \ldots$ — части некоторого целого; они могут отличаться друг от друга, но можно предположить, что все они совпадают между собой: $A = B = C = D = \ldots$ Отсюда

$$A + B = 2A,$$

$$A + B + C = 3A,$$

. . . .

«Если теперь рассматривать A как некое целое или вообще как 1, то $2A = 2$, $3A = 3$, и мы приходим к величинам.

§ 20. Отсюда ясно, что арифметическое сложение и вычитание суть частные случаи логического составления (Zusammensetzung) и вычитания (Absonderung) ... в арифметике вместо $A + B + C + \ldots$, которые суть неопределенные и различные субстанции, полагают $1A + 1A + 1A + \ldots$ или просто $1 + 1 + \ldots$ и искусным приемом характеристики здание чисел превращается в удобную арифметику» [8, т. 1, с. 152]. И далее, поскольку «... Вся арифметика является частным случаем всеобщего анализа, или логики, то отсюда легко следует важное замечание: ясно, что алгебра, применяемая в геометрии, в действительности является приложением всеобщего анализа», или логики [Там же, с. 154].

Приложение логического исчисления наиболее удобно там, где (1) субстанции можно подразделить или разложить на более простые субстанции одинакового вида; (2) различные простые субстанции единообразным приемом могут быть приведены к субстанциям одинакового вида. Можно заметить кстати, что в следующем параграфе он сопоставляет терминологию алгебры и символической логики, называя последнюю логической алгеброй. Например:

Addition (сложение) — Zusammensetzung (составление),

Addendi (слагаемые) — Teile (части),

Summa (сумма) — Summe, das Ganz (сумма, целое),

Subtraction (вычитание) — Absonderung (отделение).

Затем Ламберт задается вопросом о том, что соответствует в логической алгебре степеням и корням? Одно из истолкований степеней мы уже отмечали. Ламберт дает и другое. Пусть имеется субстанция $mnpqA$. Если положить $m = n = p = q$ и допустить $Am^4 = mnpqA$, то каков смысл таких выражений в логике? Формально понятия A, Am, Am^2, Am^3, ... следуют друг за другом в арифметической погрессии. таким образом, вопрос сводится к истолкованию прогрессии. Пусть $Am = B$, $Am^2 = Bm = C$, $Bm^2 = Cm = D$, . . .; положим $m = \frac{n}{p}$, тогда

$$\frac{n}{p} A = B, \qquad \frac{n}{p} B = C, \qquad \frac{n}{p} C = D, \ldots,$$

следовательно,

$$n : p = B : A = C : B = D : C = \ldots, \qquad p : n = A : B = B : C = C : D - \ldots .$$

И задача сводится к тому, чтобы найти последовательность понятий, каждое из которых относится к следующему, как p к n. Например, она будет решена, если указать последовательность понятий, связанных причинно-следственными отношениями.

Но коль скоро введено возведение в степень, то надо вводить и извлечение корней. Пусть, к примеру, $D = Am^3$, тогда $m^3 = D : A$ и $m = \sqrt[3]{D : A}$. Как фактически извлекать корень? Обычно предлагаются искусственные приемы. Пусть, например, надо решить равенство

$$a : x - x : b,$$

из этого равенства $a :: b = xx$, $x = \sqrt{a::b}$. Если положить $a = A :: B$, $B = A :: b$, тогда $ab = A :: A :: b :: b$, следовательно, $x = \sqrt{ab} = A :: b$, т. е. вопрос фактически сводится к отысканию подходящего содержательного отношения [8, т. 1, с. 157; 11].

6. Заключение

Труды Ламберта, посвященные созданию символического исчисления в духе универсальной характеристики Лейбница, явились значительным шагом вперед на пути создания логической алгебры, или алгебры логики, как стали говорить в XIX в.

Хотя Ламберт и не создал исчисления, в смысле исчислений средины XIX в., хотя введенные им операции еще не отличаются четкостью определения и однозначностью истолкования, однако его сочинения отражают процесс поиска нужных операций, подходящих символов для них; проясняется постановка проблем, выявляются специфические трудности, связанные с распространением алгебраических операций на объекты логики, в частности отчетливо встает вопрос о том, все ли алгебраические операции нужны в логике? Из примеров Ламберта ясно, что и возведение в степень, и извлечение корня в логике являются чрезвычайно искусственными и носят лишь формальный характер, при этом следует иметь в виду, что Ламберт понимал, что «умножение» признаков ничего на самом деле не множит: «К понятию нельзя добавить признак, который оно уже имеет... поскольку иначе надо было бы говорить железное железо» [8, т. 2, стр. 133].

По существу, все вопросы, связанные с логическими операциями и обсуждавшиеся в XIX в., поставлены в работах Ламберта. Его попытки решить эти вопросы и преодолеть связанные с ними трудности способствовали и выяснению того, что такое исчисление.

Подход к операциям над понятиями с точки зрения содержания не был наиболее удачным с точки зрения выявления характерных особенностей этих операций. Удобнее и легче это осуществить, если понятия брать по объему. Но в результате Ламберт содержательно трактовал и отношения. Его подход близок к тому, что развивал А. де Морган. Пирс и Шрёдер рассматривали отношения как совокупности пар. Содержательная же точка зрения была позднее последовательно проведена Б. Расселом (1872—1970). Относительно преимуществ подхода к отношениям «по содержанию» можно прочесть в «Философских принципах математики» Л. Кутюра [12, с. 27—33].

Ламберт, как и Лейбниц, не создал полностью исчисления, однако их усилия в этом направлении значительно проясняли представление о содержательном аксиоматическом построении науки и об особенностях исчислений в логике, подобных алгебраическим.

Труды Ламберта, да и Лейбница, невзирая на то, что не все сочинения последнего были известны к началу XIX в., оказали влияние на формирование математической логики. Сочинения Ламберта знал У. Гамильтон (1788—1856);

на все известные к тому времени сочинения Лейбница ссылается Джевонс. В очерке истории логики Дж. Венна (1834—1923), содержащемся в его «Символической логике» [13], подробно излагается точка зрения Лейбница и Ламберта, дается оценка вклада, сделанного каждым из них.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хрестоматия по истории математики. Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия/Под ред. А. П. Юшкевича. М.: Просвещение, 1976.
2. *Leibniz G.* Mathematische Schriften/Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin: Halle, 1849—1863. Bd. I—VII.
3. *Leibniz G.* Philosophische Schriften/Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin, 1875—1890. Bd. I—VII.
4. Opuscules et fragments inédits de Leibniz/Ed. L. Couturat. Paris, 1903.
5. Математика в XIX веке. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей/Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. М.: Наука, 1978.
6. *Lambert J. H.* Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung von Irrtum und Schein. Leipzig, 1764, Bd. 1/2.
7. *Lambert J. H.* Anlage zur Architecktonik, oder Theorie des Einfachen und des Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntnis. Riga, 1771, Bd. 1/2.
8. *Lambert J. H.* Logische und philosophische Abhandlungen. Berlin, 1782—1787. Bd. 1/2.
9. *de Morgan A.* formale logic, or the calculus of inference, necessary and probable. London, 1847.
10. *Boole G.* An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probable. London, 1854.
11. *Джевонс Ст.* Основы науки. СПб., 1881.
12. *Кутюра Л.* Философские принципы математики. СПб., 1913.
13. *Venn J.* Symbolic. London, 1881; 2nd ed., 1894.

ЛАМБЕРТ — ГЕОМЕТР

Б. Л. Лаптев

Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777) в своих геометрических исследованиях не был склонен пользоваться аналитическим методом — методом координат. Он предпочитал классический евклидов подход, опирающийся на непосредственное рассмотрение фигур и облегчающий интуитивное постижение результата.

Он проявил себя как глубокий геометр, увлеченный проникновением в многообразие геометрических связей, но при этом он никогда не забывал о возможностях их практического использования.

Его геометрические достижения относятся главным образом к трем областям (разделам):

I. Тригонометрии.

II. Перспективе и картографии.

III. Основаниям геометрии.

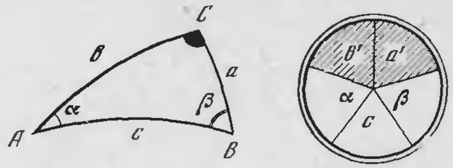
I. Тригонометрия

Ламберт проанализировал число возможных основных соотношений между элементами треугольника, перебрал различные случаи их решения, вывел некоторые новые формулы, удобные для логарифмических расчетов, составил сводку важнейших гониометрических формул [1, с. 369—424] и положил начало исследованию возможных случаев решения четырехугольников («План тетрагонометрии») [2, с. 175—183].

Особенно интересные результаты он получил в сферической тригонометрии. В своей книге «Дополнения к применению математики и их приложения» (I ч. Берлин, 1765), в разделе, посвященном тригонометрии [1, с. 369—424], он поставил и решил проблему: найти математическую сущность правила Непера для сферических прямоугольных треугольников.

Как известно, двумя элементами такой треугольник определяется. Непер, классифицируя возможные случаи решения треугольников, когда один элемент выражается через два других (а таких соотношений будет $C_5^3 = C_5^2 = 10$), пришел к очень простому мнемоническому правилу (которым и сейчас пользуются все, имеющие дело со сферической тригонометрией), позволяющему легко выписывать все эти 10 соотношений. Надо разделить окружность на пять равных секторов и вписать в них названия пяти элементов в естественной последовательности, по-

Рис. 1



лучаемой при обходе периметра, например, против часовой стрелки (рис. 1, где места для катетов затемнены). Далее, надо заменить катеты a и b их дополнениями a' и b' до $\pi/2$:

$$a' = \frac{\pi}{2} - a, \qquad b' = \frac{\pi}{2} - b.$$

Тогда для каждого элемента схемы его косинус равен произведению котангенсов двух прилежащих элементов, а также произведению синусов остальных двух элементов (их называют противолежащими):

$$\cos * = \begin{cases} \operatorname{ctg} * \operatorname{ctg} * & \text{(для прилежащих)}, \\ \sin * \sin * & \text{(для противолежащих)}. \end{cases}$$

Например, для гипотенузы c имеем

$$\cos c = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta,$$

$$\cos c = \sin a' \sin b' = \cos a \cos b.$$

Эти соотношения для гипотенузы легко выводятся. Но почему оказываются справедливыми и остальные восемь, выписываемые по правилу Непера? В чем заключаются математические основания этого факта?

Ответ на эту проблему Ламберт получил, осуществив, исходя из данного треугольника, построение звездчатого сферического пятиугольника с пятью прямыми углами при вершинах [1]. Тогда выделяется цикл из пяти треугольников (включая исходный), причем переход от одного из них к следующему (в выбранном направлении обхода) соответствует повороту схемы Непера на определенную часть полного оборота. Мы изложим его рассуждения, подвергнув их для простоты незначительному видоизменению.

Пусть ABC — исходный сферический прямоугольный треугольник (рис. 2) с катетами a и b, острыми углами α

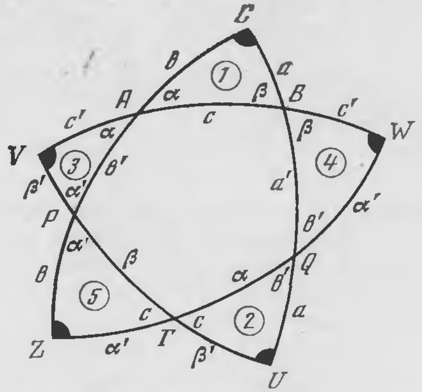


Рис. 2

и β и гипотенузой c. Рассмотрим полюс Г гипотенузы c. Через Г проходят поляры [2] точек A и B (так как эти точки лежат на c). Пусть U и Z — точки пересечения продолжения стороны a с полярой точки B и соответственно продолжения стороны b с полярой точки A. Пересечения этих поляр с продолжениями гипотенузы c назовем соответственно W и V. Таким образом, возникает звездчатый пятиугольник $CUVWZC$ с прямыми углами при вершинах. Пересечения его сторон выделяют (см. рис. 2) простой пятиугольник, опоясанный пятью прямоугольными треугольниками, прилегающими к этому пятиугольнику гипотенузами. Каждая сторона этого пятиугольника по построению служит полярой противоположной вершины, а величина стороны равна внешнему углу при этой вершине (на рис. 2 все размеры элементов указаны). Тре-

[1] Впоследствии к этому же пятиугольнику, по-видимому не зная о работе Ламберта, пришел и Гаусс, назвавший его «удивительным» (Pentagramma mirifica). Работа Гаусса была опубликована посмертно в его научном наследии [3, с. 481].

[2] Поляра, соответствующая данной точке сферы (полюсу),— это большой круг, удаленный от полюса на $\pi/2$.

угольники пронумеруем в порядке, соответствующем вершинам звездчатого пятиугольника $CUVWZC$, пронумерованным начиная с исходной вершины C при обходе звезды в указанном порядке: 1, 2, 3, 4, 5, 1. Тогда переход от одного треугольника к следующему выразится следующим образом.

	Катеты		Угол	Гипотенуза	Угол
1	a	b	α	c	β
2	β'	a	b'	α	c
3	c'	β'	α'	b'	α
4	α'	c'	β	a'	b'
5	b	α'	c	β	a'
1	a	b	α	c	β

Мы видим, что в каждом из этих пяти треугольников величины элементов равны величинам элементов (или их дополнениям) предыдущего треугольника, причем циклическая последовательность элементов сохраняется, но характер каждого элемента сдвинут на одно место.

Если построить соответствующую схему Непера для этих треугольников, то обнаруживается, что для каждого следующего треугольника секторы с величинами элементов просто поворачиваются на $^1/_5$ полного оборота против часовой стрелки (рис. 3).

В наличии этого цикла треугольников и заключается разгадка схемы Непера. Последовательно на место гипотенузы c встают по очереди α, b', a', β и c, т. е. из справедливости двух упомянутых ранее соотношений вытекает справедливость остальных восьми.

Отметим, что в изложении Ламберта треугольники нумеруются в порядке, соответствующем обходу простого пятиугольника $AB\mathit{Q}\Gamma PA$, т. е. в следующем порядке: 1, 4, 2, 5, 3, 1. Тогда переходу от одного треугольника к последующему соответствует поворот схемы Непера на $^2/_5$ оборота по часовой стрелке. Цикл замыкается в этом случае после двух полных оборотов: $^2/_5$, $^4/_5$, $^6/_5$, $^8/_5$, $^{10}/_5$.

Таким образом, в звездчатом пятиугольнике и циклической группе треугольников, с ним связанной, и заключается открытая Ламбертом математическая сущность правила Непера.

Интересно отметить, что Н. И. Лобачевский при выводе тригонометрических соотношений между элементами прямолинейного прямоугольного треугольника в своем пространстве тоже нашел циклическую последовательность пяти прямолинейных прямоугольных треугольников, порожденную данным, а затем ее использовал для отыскания этих соотношений.

Впоследствии, в 1922 г., индийский математик Мукопадиайа (S. D. Mukhopadhyaya) показал, как получается

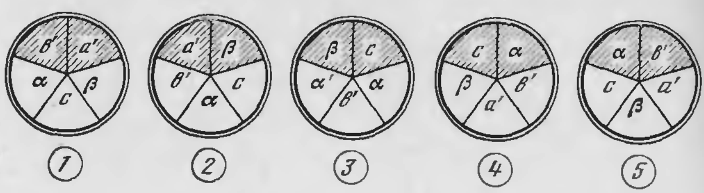


Рис. 3

эта последовательность с помощью простого пятиугольника с пятью прямыми углами при вершинах. А затем А. П. Норден в своих примечаниях к «Новым началам» Лобачевского, рассмотрев сферические треугольники, которые Лобачевский сопоставлял с прямолинейным, установил связь между пятиугольником Мукопадиайа и звездчатым пятиугольником Ламберта, называя, однако, последний пентаграммой Гаусса [4, с. 531—544].

II. Перспектива и картография

Основные исследования Ламберта, относящиеся к теории перспективы, включены в его книгу «Свободная перспектива, или Руководство к выполнению перспективных чертежей без изготовления плана» (1759) [5]. Одновременно появился и французский перевод этой книги под названием «Перспектива, освобожденная от затруднений, связанных с геометрическим планом» [6].

Книга была предназначена для художников и архитекторов, но, несмотря на практическую направленность, гинальных геометрических задач затрудняло ее понимание практиками. Параллельные проекции рассматривались здесь как частный случай центрального проектирования из бесконечно удаленной точки зрения. Изучалась перспектива на наклонную плоскость. В частности, метод Лакайля (Nicolas Louis de La Caille) [7, т. 3, с. 196] использования на линии горизонта отметок углов, образованных с плоскостью картины прямыми параллельными горизонтальной плоскости, был распространен Ламбертом и на случай перспективы на наклонную плоскость.

Значительное внимание было уделено восстановлению натуральных размеров фигуры по ее перспективному чертежу, и, таким образом, Ламберт явился здесь провозвестником методов фотограммометрии [8].

Продолжением и дополнением к его книге является опубликованная посмертно его работа «Важнейшие и употребительнейшие основные законы перспективы, выведенные из геометрически начерченного ландшафта» [9].

В появившемся через 15 лет новом издании «Свободной перспективы» (1774) [15] Ламбертом произведены некоторые незначительные улучшения текста, кроме того, имеется обширное приложение: «Замечания и дополнения» (Anmerkungen und Zusätze), в котором после беглого обзора важнейших сочинений по перспективе и ряда дополнений к рассмотренным ранее задачам введен важный цикл задач проективного характера, а именно задач на построение с помощью одной линейки: построения конического сечения по пяти точкам, построения с недоступной точкой, построения при наличии начерченного круга или параллелограмма и др.

Таким образом, задолго до Понселе и Штейнера Ламберт владел ростками идей проективной геометрии.

Он оставил яркий след и в картографии (см. его «Замечания и дополнения к изготовлению географических и небесных карт» (1772) [11, с. 105—199]). Еще до Гаусса он рассматривал картографические проекции, сохраняющие углы (не получив, правда, замечательной связи с теорией функций комплексного переменного). Однако равноугольная коническая проекция вошла в учебники под его именем [12, с. 130—133], а проекция, сохраняющая площади, оказалась притом практически очень важной, нередко применяется, а в учебниках по картографии широко известна как «азимутальная (или зенитальная) равновеликая проекция Ламберта» [12, с. 90, 130, 181—191, 230; 13, с. 44, 100, 171, 251].

Нельзя не отметить его чисто геометрический результат, касающийся параболы и эллипса, который он получил евклидовым методом в сочинении 1761 г., посвященном изучению свойств кометных орбит [10]. Речь идет о вычислении величины секториальной площади, описанной фокальным радиус-вектором параболы или эллипса по заданным длинам начального и конечного радиус-векторов и хорды, соединяющей их концы. Лагранж отметил, что его попытка получить этот результат методом координат потребовала очень сложных расчетов.

III. Основания геометрии

Очень интересные, глубокие мысли, опережающие науку XVIII в., были высказаны Ламбертом по вопросам, касающимся оснований геометрии. Этими вопросами Ламберт усиленно занимался в середине 1760-х годов, как показывают его письма к Г. Голланду (1742—1784). Так, в своем письме от 11 апреля 1765 г. он, высказываясь о методе Евклида [14, с. 21—39], касается данных Евклидом определений основных геометрических объектов — точек, прямых линий и плоскостей. Он отмечает, что они не являются определениями в собственном смысле слова, а по существу это просто названия тех инструментов, с которыми геометр в дальнейшем будет иметь дело.

Ламберт пишет [14, с. 29]: «То, что Евклид скапливает и помещает свои определения в начале определения, является как бы просто номенклатурой. Он делает это так, как, например, часовой мастер или иной художник, начинающий знакомить своих учеников с названиями инструментов».

Таким образом, здесь намечается современный подход к основным геометрическим элементам, четко сформулированный Гильбертом на рубеже XIX и XX вв. в «Основаниях геометрии»: «Мы мыслим три системы вещей: вещи первой системы называем *точками* и обозначаем A, B, C, ... вещи второй системы называем *прямыми*...» и т. д.

Далее Ламберт отмечает, что в своих доказательствах Евклид пользуется выражением per definitionem (по определению) лишь в смысле per hypothesin (по предположению).

Так как пока существование понятия не доказано, всякое определение — это лишь гипотеза, пока не дан хотя бы один пример или на основании аксиом и постулатов не найдены условия возможности определяемой фигуры.

Так, определение параллелей — это просто гипотеза, пока не доказана возможность их существования, что в своем месте Евклид и делает.

Ламберту принадлежит содержащее ряд оригинальных и ценных мыслей исследование «Теория параллельных линий». Рукопись относится к 1766 г., но при жизни Ламберт ее не опубликовал. Она появилась в печати в 1786 г. при публикации Иоганном Бернулли (1744—1807) его научного наследия [15]. Текст был опубликован еще раз с соответствующей вводной статьей в 1895 г. в известной хрестоматии Энгеля и Штеккеля по истории параллелей [16, с. 137—208].

В этой работе Ламберт поставил своей целью строго доказать 11-ю аксиому (по другим спискам это 5-й постулат) Евклида, опираясь на остальные аксиомы и постулаты. Эта аксиома формулируется так: если на плоскости две прямые образуют при пересечении с третьей внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых углов, то эти прямые при продолжении обязательно пересекаются, и притом с той стороны от третьей прямой, где лежат упомянутые углы.

Ламберт знает о многочисленных попытках так или иначе освободиться от этой аксиомы. Он упоминает, в частности, известную диссертацию Клюгеля (1763) [17], в которой, по его словам, «с большим остроумием и сдержанностью выявлены содержащиеся в 30 таких попытках недостатки и чаще всего вкравшиеся: логический круг, пробелы, скачки, паралогизмы, неправильно употребляемые и безосновательно принятые определения, а также дополнительные аксиомы». В частности, Клюгель рассматривает и попытку Саккери (1733), основанную на рассмотрении четырехугольника с прямыми углами при основании и равными боковыми сторонами. Этот четырехугольник Саккери ранее встречался у Омара Хайяма [7, т. 3, с. 215—217]. Остальные два угла α будут равны. Предварительно возможны три гипотезы: 1°. $\alpha = \pi/2$, 2°. $\alpha > \pi/2$, 3°. $\alpha < \pi/2$. Саккери приводит к противоречию гипотезы 2° и 3° (допуская ошибку в случае гипотезы 3°), а тогда остается 1°, из которой легко вытекает евклидова аксиома параллелей.

Несмотря на заключение Клюгеля, что все рассмотренные им в [17] попытки доказательства постулата параллельности имеют ошибки, Ламберт тоже предпринимает аналогичную попытку. Он исходит из рассмотрения четырехугольника с тремя прямыми углами и четвертым углом α (это половина четырехугольника Омара Хайяма. Такой четырехугольник встречался ранее в работах Ибн ал-Хайсама (965—1039) [7, т. 1, с. 232—233]). Хотя в конце своей работы Ламберт и совершает ошибку, однако значительный материал обоснован им совершенно строго. В связи с проведенным исследованием Ламбертом высказана одна гениальная догадка, оправдавшаяся уже много позднее при построении интерпретаций геометрии Лобачевского.

Труд Ламберта состоит из трех частей.

В первой части «Предварительные рассмотрения» он останавливается на понятии доказательства. Что значит доказать 11-ю аксиому? Речь идет не об истинности или мыслимости евклидовой геометрии, а о логическом выводе 11-й аксиомы из остальных аксиом и постулатов, что следовало бы в принципе сделать чисто формально, не вдаваясь в геометрическую суть.

Во второй части «Изложение некоторых теорем, которые рассмотрены самостоятельно» изложены различные подходы к доказательству аксиомы параллелей, при проведении которых все-таки всегда остается некоторый недоказанный остаток.

Третья часть «Теория параллельных линий» и содержит упомянутую попытку Ламберта доказать 11-ю аксиому совершенно строго, sine amore ac invidia (т. е. не прибегая к аргументам любви или недоброжелательства).

Отправной пункт его исследования — это рассмотрение двух перпендикуляров AM и BN (рис. 4), восставленных в концах отрезка AB к этому отрезку по одну сторону от него. Из произвольной точки A_1 луча AM опускается перпендикуляр A_1B_1 на BN, и в образовавшемся четырехугольнике с тремя прямыми углами при вершинах A, B, B_1 рассмотрен четвертый угол α при вершине A_1. Если не опираться на аксиому параллельности, то возможны всего три гипотезы:

1°. $\alpha = \pi/2$, гипотеза прямого угла,

2°. $\alpha > \pi/2$, гипотеза тупого угла,

3°. $\alpha < \pi/2$, гипотеза острого угла.

Если удастся доказать, что гипотезы 2° и 3° приводят

Рис. 4

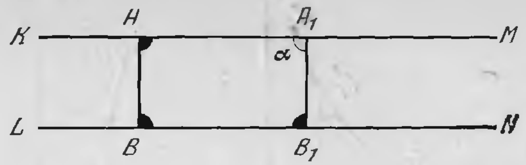
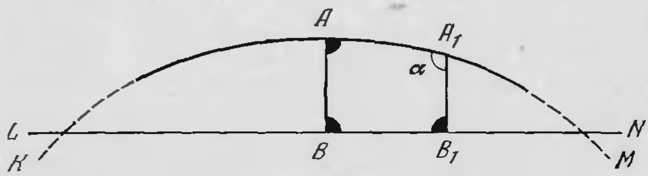


Рис. 5



к противоречию, то остается гипотеза 1°, а из нее вытекает евклидова аксиома параллельности. Таким образом, 11-я аксиома будет строго доказана.

Во всех трех случаях Ламберт изучает, как меняется длина A_1B_1 при удалении A_1 от A по лучу AM.

При гипотезе 1° оказывается, что все эти отрезки сохраняют постоянную длину (получается прямоугольник), т. е. AM и BN являются равноотстоящими прямыми, причем $AA_1 = BB_1$. Далее доказывается, что прямая, проходящая через A и отклонившаяся от AM на произвольно малый угол (в сторону AB), обязательно пересечет BN, т. е. 11-я аксиома справедлива.

При гипотезе 2° доказывается, что отрезки A_1B_1 уменьшаются, и притом ускоренно. Поэтому AM пересекается с BN. По симметрии то же произойдет с AK и BL, а тогда через две точки будут проходить две различные прямые, что противоречит основной аксиоме прямой линии (рис. 5).

При гипотезе 3° доказывается, что отрезки A_1B_1 (рис. 6) при удалении A_1 от A растут неограниченно, и при этом угол α при A_1 становится сколь угодно малым.

Интересно отметить, что Ламберт еще не видел в этих необычных свойствах прямой линии противоречия.

Он просто указывает, что вместо 11-й аксиомы можно было бы принять в качестве аксиомы невозможность асимптотического сближения двух прямых. (При гипотезе 3° здесь происходит асимптотическое сближение прямой AM и прямой QP — предельного положения B_1A_1 при неограниченном удалении A_1 от A.)

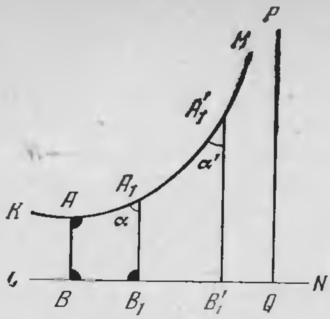


Рис. 6

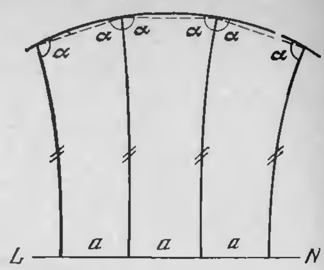


Рис. 7

Далее Ламберт, продолжая исследование и допустив серьезную ошибку, приходит к формальному противоречию. Отложив ряд равных отрезков a по прямой LN и восстановив в их концах по одну сторону этой прямой перпендикуляры равной длины, он получает правильную выпуклую ломаную (рис. 7). Далее, ошибочно допустив, что через вершины правильной ломаной можно провести дугу окружности (в геометрии Лобачевского это будет дуга эквидистанты), он получает противоречие: с одной стороны, биссектральные прямые, проведенные в вершины ломаной, должны сойтись как радиусы в центре окружности, с другой стороны, они при продолжении по другую сторону прямой не могут пересечься, так как по доказанному расходятся после пересечения с ней [3].

В ходе рассуждений, связанных с выводом следствий из гипотезы 3° (еще до получения своего окончательного результата), он делает ряд чрезвычайно важных и проницательных замечаний, причем нередко высказывается очень эмоционально, проявляя увлеченность полученными результатами.

Так, установив, что при этой гипотезе существует внутренне определенная (абсолютная) единица длины, он вос-

---

[3] Следует заметить, что итог рассуждений Ламберта в его «Теории параллелей» изложен в известной книге В. Ф. Кагана «Основания геометрии» [18, с. 105] неправильно. Там сказано: «Ламберт приходит к твердому выводу, что все попытки доказать пятый постулат Евклида ни к чему не привели». Аналогичную неточность содержит изложение этого вопроса в трехтомной «Истории математики», где указывается, что «Ламберт не нашел противоречия в гипотезе острого угла...» [7, т. 3, с. 218], и в книге Б. А. Розенфельда «История неевклидовой геометрии» [19, с. 97].

клицает: «Это следствие настолько привлекательно, что вызывает желание, чтобы третья гипотеза была истинной» [4].

Выяснив, что в случае гипотезы 2° площадь S треугольника пропорциональна избытку суммы его углов над π, а в случае гипотезы 3° — недостатку, он отмечает, что гипотеза 2° выполняется для сферических треугольников, так как для них

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

т. е. он впервые в истории геометрии дает пример реализации абстрактной системы. Далее, как бы предугадывая будущую интерпретацию геометрии Лобачевского, он пишет: «Отсюда я должен бы был почти сделать вывод, что третья гипотеза проявляется на поверхности мнимой сферы. По крайней мере должно быть нечто, почему на плоскости ее не удается опровергнуть так просто, как вторую гипотезу».

Весьма вероятно, что он не стал публиковать свою работу, потому что сам вскоре усмотрел ее слабую сторону — введение допущения, что через правильную ломаную можно всегда провести дугу окружности (эту аксиому как эквивалентную пятому постулату впоследствии упоминал в переписке и Гаусс).

Таковы некоторые замечательные геометрические результаты и предположения Ламберта. Даже бегло очерченный вклад, внесенный им в геометрию, позволяет оценить Ламберта как оригинального и глубокого исследователя, оставившего свой многообразный след в истории этой науки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lambert J. H.* Beitrag zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin, 1765. I Theil.
2. *Lambert J. H.* Beitrag zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin, 1770. II Theil, erster Abschn.
3. *Gauss K. F.* Werke. Göttingen, 1876, Bd. 3.
4. *Лобачевский Н. И.* Полн. собр. соч., т. 2. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
5. *Lambert J. H.* Die freie Perspective, oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriss von freien Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen. Zürich, 1759. Имеется 2-е изд. с приложением замечаний и дополнений.— Там же, 1774.

[4] Подобное желание высказывал впоследствии и Гаусс в письме к Тауринусу от 8 ноября 1824 г. [20, с. 106].

6. *Lambert J. H.* La perspective affranchie de l'embarras du plan géométrical. Zürich, 1759.
7. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, т. 1—3/Под ред. А. П. Юшкевича. Том 1. С древнейших времен до начала Нового времени. М.: Наука, 1970. Том. 3. Математика XVIII столетия. М.: Наука, 1972.
8. *Schur F.* Johann Heinrich Lambert als Geometer.— Jahresber. Dtsch. Math.-Verein., 1905, 14, S. 186—198.
9. *Lambert J. H.* Die vornehmsten und brauchbarsten Grundgesätze der Perspecktive, aus Betrachtung einer geometrisch gezeichneten Landschaft abgeleitet/Hrsg. C. F. Hindenburg.— Arch. reine und angew. Math., 1799.
10. *Lambert J. H.* Insigniores orbitae cometarum proprietates, 1761.
11. *Lambert J. H.* Beitrag zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Berlin, 1772. III. Theil.
12. *Граур А. В.* Математическая картография. Л., 1938.
13. *Каврайский В. В.* Математическая картография. Л.; М., 1934.
14. *Lambert J. H.* J. H. Lamberts-Deutscher Gelehrter/Hrsg. Joh. Bernoulli. Berlin, 1781, Bd. 1.
15. *Lambert J. H.* Theorie der Parallellinien.— Mag. reine und angew. Math. Leipzig, 1786, 2 Stück, S.137—164; 3 Stück, S.325—358.
16. *Engel F., Stäckel P.* Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss. Leipzig, 1895.
17. *Klügel G. S.* Conatuum praecipuorum theoriam parallelarum demonstrandi recensio. Göttingen, 1763.
18. *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Часть первая. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
19. *Розенфельд Б. А.* История неевклидовой геометрии. М.: Наука. 1976.
20. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию ее идей/Ред. А. П. Норден. М., 1956.