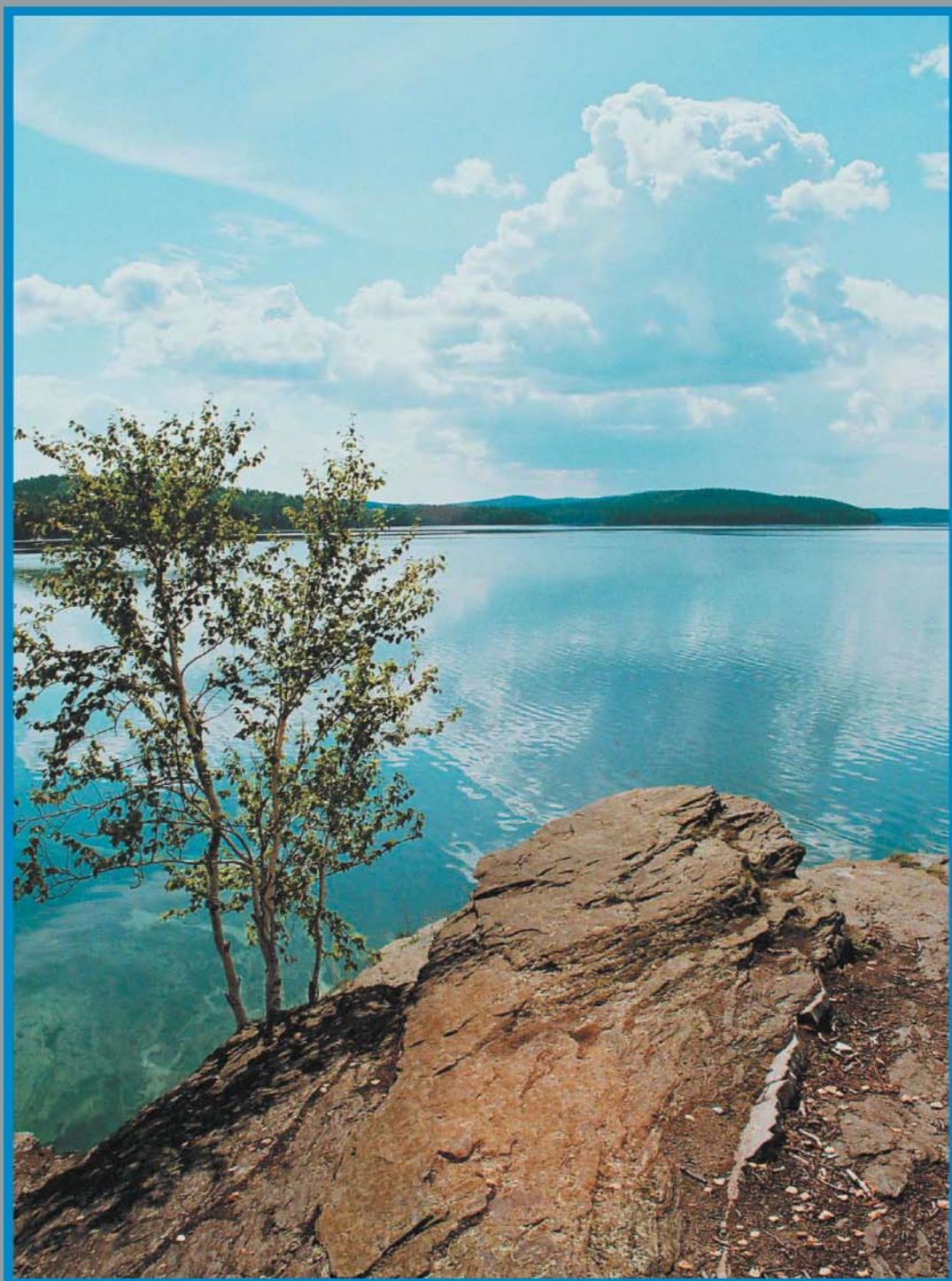


ПРИРОДА

7 06



поднятия. По данным Р.А.Цыкина и Е.В.Прокатеня, в юрском и меловом периодах амплитуды суммарных тектонических движений составляли 200—500 м. Интенсивность движений была в 1.5—2.0 раза ниже, чем на современном этапе. Енисейский кряж в течение последующих 130 млн лет отличался равнинным рельефом. В олигоцене (33—23 млн лет назад) регион представлял собой холмистую, относительно низкую равнину. В миоцене (20—5 млн лет назад) территория интенсивно поднималась (о чем свидетельствуют глубоко врезанные речные долины) и постепенно превращалась в возвышенную равнину.

С конца плиоцена (1.8 млн лет назад) район Ангаро-Канского антиклинория испытывал устойчивое воздымание со средней скоростью 0.2—0.3 мм в год. Суммарная амплитуда поднятия за этот период оценивается в 400—500 м. По-видимому, в это время на поверхности впервые обнажаются гранитоиды Нижнеканского массива. В приповерхностных зонах в условиях быстрого вертикального подъема тектонических блоков протекают процессы релаксации упругих напряжений, возникает анизотропное поле напряжений и формируются системы трещин различного генезиса, которые наследуют и трещины, заложенные еще на этапе усыхания гранитного массива.

Некоторые выводы и прогнозы

Последовательное рассмотрение основных эпизодов геотектонического развития дает основание предположить, что тенденция неотектонического поднятия района сохранится еще достаточно длительное время, охватывающее весь планируемый срок существования проектируемого подземного хранилища. Причина этого — гипсометрическое разобщение древней Сибирской платформы и молодой Западно-Сибирской плиты, между которыми и располагается Енисейский кряж. Данный процесс привел к усложнению тектонического строения, обновлению древних и заложению новых разломов и трещин. Таким образом, длительная геодинамическая эволюция Нижнеканского массива после его становления обусловлена воздыманием (или «всплыванием»), характерным, как известно, в целом для крупных гранитоидных тел. Суммарная величина такого воздымания составила не менее 5—6 км. Оно было прерывистым, усиливалось в отдельные эпохи и происходило на фоне тангенциального регионального тектонического сжатия, вектор которого был ориентирован в направлении юго-запад—северо-восток. Численно оценить величину будущего воздымания

сложно, однако, исходя из скорости эрозии, можно предположить, что оно не превысит нескольких сантиметров за 1000 лет. Вместе с тем вертикальные усилия, связанные с поднятием Нижнеканского массива, видимо, будут играть подчиненную роль в общей картине его напряженно-деформированного состояния, которое определяется тангенциальными сжимающими усилиями, ориентированными поперек жесткой глыбы Енисейского кряжа. Изменится ли региональное и местное поле тектонических напряжений и ориентировка траекторий главных усилий, а также скорость новейших тектонических движений, пока сказать трудно. Именно для ответа на этот вопрос и заложен геодинамический полигон, наблюдения на котором позволят создать корректные количественные тектонофизические модели и оценить как возможность, так и время проявления катастрофических тектонических событий, а главное — выбрать наименее тектонически напряженные блоки, где процесс деструкции практически отсутствует. Без этого задачу надежной и длительной изоляции радиоактивных отходов и отработанного ядерного топлива на впервые создаваемом подземном федеральном могильнике вряд ли можно будет решить. ■

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект 05-05-64975.



Трагическая и счастливая жизнь Эрнста Изинга

Е.З.Мейлихов

Модель Изинга — одна из стандартных моделей статистической физики, исследованию которой посвящено огромное число публикаций: известная интернетовская поисковая система Google по запросу «модель Изинга» выдает 330 тыс. ссылок (!). Парадокс состоит в том, что хотя многие слышали о модели Изинга, но почти никто не знает, кто такой Изинг. Между тем, Эрнст (или Эрнест) Изинг — автор работы, в которой впервые рассматривалась модель, названная позже его именем, и которая стала его первой и *единственной* публикацией. Настоящие заметки приурочены к недавно прошедшему 80-летнему юбилею появления этой классической статьи Изинга.

Модель Изинга I

Прежде всего напомним суть модели. Как известно, магнетизм различных тел связан с магнитными свойствами атомов, составляющих данное тело. Эти свойства, в свою очередь, обусловлены магнитными характеристиками электронов, входящих в состав атомов. Так же как наиболее важным пунктом «электрического паспорта»



Евгений Залманович Мейлихов, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института молекулярной физики Российского научного центра «Курчатовский институт». Область научных интересов — физика твердого тела.

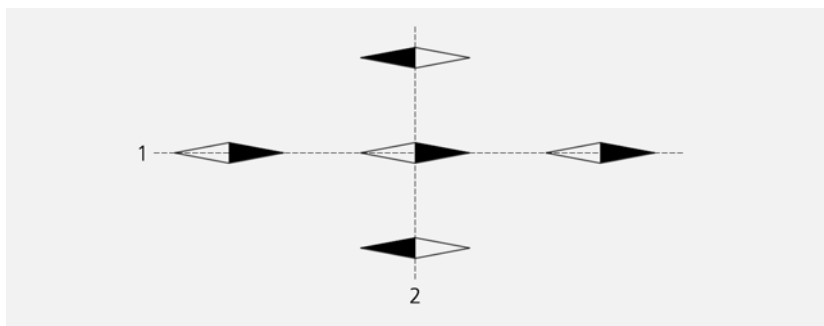
электрона является его электрический заряд, «визитной карточкой» его магнитных качеств служит собственный магнитный момент (спин). В отличие от заряда, магнитный момент характеризуется не только величиной, но и направлением (т.е. является вектором). Обычно магнитные моменты электронов направлены в разные стороны, так что их сумма (векторная) практически равна нулю. Однако в некоторых случаях магнитные моменты значительной части электронов становятся параллельными друг другу. Тогда и возникает сильный магнетизм, или, как его обычно называют, — ферромагнетизм (от лат. *ferrum* — железо).

Причина такого выстраивания магнитных моментов элект-

ронов — их взаимодействие друг с другом. Такое взаимодействие может быть *прямым* (без всяких «посредников») и *косвенным* (через «посредников», в качестве которых могут выступать другие электроны, свободные или входящие в состав атомов).

К чему приводит прямое взаимодействие, можно понять с помощью простых экспериментов с магнитными стрелками — чувствительными элементами прибора для определения направления магнитного поля Земли (компыаса). В отношении магнитных свойств такие стрелки очень похожи на электроны: они обладают собственным магнитным моментом (направленным вдоль оси стрелки от «южного» полюса к «северному»),

© Мейлихов Е.З., 2006



Анизотропное взаимодействие магнитных стрелок.

ориентация в пространстве которого меняется при вращении стрелки вокруг иглы.

Если две стрелки поместить близко друг от друга, их взаимодействие становится очень сильным и влиянием магнитного поля Земли можно пренебречь. Закрепим одну из стрелок, например, сняв ее с оси и приклеив к поверхности стола (фиксированную ориентацию этой стрелки будем далее называть выделенным направлением). На этой поверхности нарисуем две прямые линии, проходящие через центр закрепленной стрелки: одну — вдоль выделенного направления (линия 1), а другую — перпендикулярно ему (линия 2). Будем теперь приближать к неподвижной стрелке другую магнитную стрелку, способную вращаться вокруг иглы. Если в процессе этого приближения центр второй стрелки все время остается на линии 1, то (независимо от начальной ориентации) эта стрелка рано или поздно встанет так, что магнитные моменты обеих стрелок будут *параллельными*. Если же в процессе приближения второй стрелки ее центр все время остается на линии 2, то она в конце концов ориентируется так, что магнитные моменты обеих стрелок станут *антипараллельными*. Эти эксперименты показывают, что в отличие от электрического (кулоновского) взаимодействия между электрическими зарядами, зависящего только от знаков

этих зарядов и расстояния между ними, прямое взаимодействие магнитных моментов зависит еще и от угла, который соединяющая их линия составляет с выделенным направлением.

Косвенное взаимодействие магнитных моментов промоделировать трудно. Можно лишь предположить, что при наличии «посредников» зависимость энергии взаимодействия от указанного выше угла пропадает и остается лишь зависимость от расстояния между магнитными моментами и от их знаков (т.е. направлений). Точный расчет подтверждает это предположение*. Таким образом, для определенности можно, например, считать, что взаимодействие всегда (независимо от взаимного расположения) благоприятствует параллельной ориентации магнитных моментов.

Представим теперь, что магнитные стрелки (которые, напомним, моделируют магнитные моменты электронов) расположены в узлах регулярной решетки. Поскольку взаимодей-

* В качестве аналогии рассмотрим теннис, в котором взаимодействие игроков осуществляется напрямую — с помощью мяча, который доставляет игроку, принимающему подачу, ту информацию, что была вложена в него подающим игроком. А вот в футболе мяч, посланный в поле вратарем одной из команд, попадает к вратарю другой команды, испытав предварительно взаимодействие с десятком полевых игроков и полностью потеряв ту информацию, что была вложена в него первым вратарем.

ствие быстро падает с увеличением расстояния, можно ограничиться взаимодействием только *соседних* магнитных моментов. Согласно принятому предположению, такое взаимодействие благоприятствует выстраиванию соседних магнитных моментов вдоль некоторого выделенного направления и тем самым понижает энергию системы, внося в нее отрицательный вклад $-J$. Наоборот, антипараллельная ориентация соседних моментов энергетически невыгодна и приводит к увеличению энергии на величину J . Это и есть модель Изинга, в которую, однако, необходимо внести еще один элемент — тепловые флуктуации.

Очевидно, что при сделанных предположениях наименьшей энергии системы соответствует состояние, в котором все магнитные стрелки параллельны друг другу. Однако представим теперь, что стол, на котором размещены все эти стрелки, беспорядочно трясется (например, во время землетрясения). Ясно, что если такая тряска станет достаточно сильной, ориентационный порядок среди магнитных моментов стрелок исчезнет. Настоящие же магнитные моменты отдельных электронов настолько малы, что не нуждаются в землетрясении: для них достаточно всегда существующей тепловой «тряски» решетки. Если энергия $\sim kT$, получаемая ими от решетки, сравнима с энергией взаимодействия J , то в равновесном состоянии полной ориентации магнитных моментов не будет. Более того, неясно, сохранится ли хотя бы преимущественная ориентация этих моментов?

Для ответа на этот вопрос и была предложена модель, которую называют моделью Изинга. В ней магнитные моменты спины, располагающиеся в узлах регулярной решетки, могут быть ориентированы только вдоль (или против) некоторого выделенного направления. Учитывается лишь взаимодействие

соседних спинов, энергия которого принимает (в зависимости от их взаимной ориентации) значения $\pm J$. Эта модель принципиально важна в том отношении, что относится к системе, в которой наблюдаются *кооперативные* явления и фазовые переходы, и допускает математическое рассмотрение.

Эрнст Изинг (1900—1998)

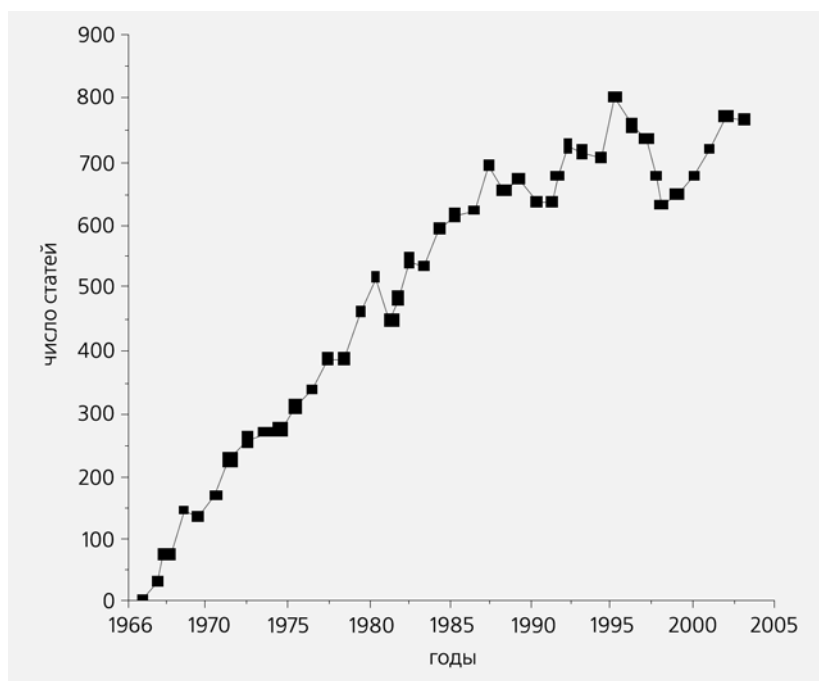
Впервые количественный анализ подобной модели был проведен в 1924 г. Эрнстом Изингом в его докторской диссертации [1]. В 1925 г. полученные им результаты были опубликованы* [2].

Жизнь Изинга захватила практически весь прошлый век и включила в себя многие драматические события политики и науки. О том, насколько важной оказалась модель Изинга для последующего развития физики, свидетельствует хотя бы тот факт, что уже после 1966 г. появилось около 20 тыс. публикаций со ссылкой на оригинальную работу Изинга и более 300 тыс. публикаций, использующих или развивающих эту модель.

Однако несмотря на грандиозную популярность модели Изинга, мало кто знает о самом ее авторе, в долгой жизни которого переплелось много трагического и счастливого. Описанная в настоящих заметках биография Изинга в значительной мере основана на материалах работ [3—6].

Эрнст Изинг родился 10 мая 1900 г. в Кельне (Германия) в семье лавочника Густава Изин-

* Журнал, где опубликована эта работа (написанная на немецком языке), малодоступен. В Интернете имеется английская версия статьи в переводе Джоанны Изинг (жены Э.Изинга, экономиста по специальности) и Тома Каммингса (Thomas F.Cummings, химика по специальности), содержащая ряд неточностей (http://www.fh-augsburg.de/~harsch/anglica/Chronology/20thC/Ising/isi_fm00.html).



Ежегодное количество публикаций, посвященных модели Изинга после 1966 г. (общее число публикаций за 1966—2003 гг. — около 20 тыс.).

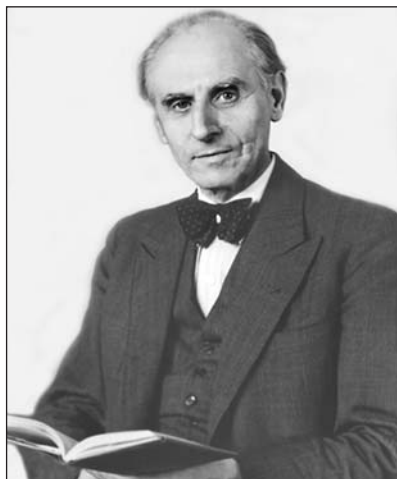
га и его жены Теклы (урожденной Лозе). Двумя годами позже семья переехала в Бохум (Вестфалия), где Эрнст и провел свое детство. Весной 1907 г. он поступил в местную школу, а в 1918 г. окончил гимназию. Шла война, и Эрнста призвали на военную подготовку, но, к счастью, первая мировая война закончилась раньше, чем он мог быть отправлен на фронт. Весной 1919 г. Изинг начал изучать математику и физику в Геттингенском университете, затем продолжил свое образование в Бонне и, начиная с 1922 г., — в Гамбурге.

В 20-е годы прошлого века Гамбург был одним из центров развития мировой физической науки. Здесь занимались исследованиями многие выдающиеся ученые. Во время учебы в Гамбурге Изинг познакомился со своим ровесником Вольфгангом Паули (1900—1958), который только что начал работать в том же университете в должности ассистент-профессора теоретической физики. В марте 1924 г.

Паули опубликовал статью, где был сформулирован один из важнейших принципов современной теоретической физики (в 1945 г. он получил Нобелевскую премию «за открытие принципа запрета, который называют принципом Паули»).

В это же время в Гамбурге работал Отто Штерн (1888—1969), который стал полным профессором Гамбургского университета в 1923 г. и вместе с Вальтером Герлахом (1889—1979) проводил свои знаменитые эксперименты с атомными пучками в неоднородном магнитном поле. В 1943 г. Отто Штерн (эмигрировавший к тому времени в США) был удостоен Нобелевской премии «за вклад в развитие метода молекулярных пучков и открытие и изменение магнитного момента протона».

Заняться теоретической физикой предложил Изингу заведующий кафедрой теоретической физики Гамбургского университета профессор Вильгельм Ленц (1888—1957), помощник-



Вильгельм Ленц (1888–1957).



Эрнст Изинг
(приблизительно 1925 г.).



Изинг во время чтения лекции
в Университете Брэдли
(начало 70-х годов).

ком которого (с 1922 г.) был Паули. Под руководством Ленца Изинг в 1922 г. начал исследовать одну из моделей ферромагнетизма, которая и стала темой его диссертации [1]. Защита состоялась в июле 1924 г. на факультете математики и естественных наук Гамбургского университета.

После получения докторской степени Изинг переехал в Берлин и в 1925–1926 гг. служил в патентном бюро компании «Allgemeine Elektrizitätsgesellschaft» (AEG). Неудовлетворенный этой работой, он решил стать учителем. В течение года Изинг работал в известной школе-интернате в Салеме, но для продвижения на педагогическом поприще надо было получить специальное образование. Поэтому в 1928 г. он возвращается в Берлинский университет для изучения философии и педагогики и в 1930 г. сдает государственный экзамен школьному совету по высшему образованию. В том же году Изинг женится на Джоанне Эмер, докторе экономики, которую он встретил в Берлине. Молодая супружеская пара переезжает в Страусберг возле Берлина, где Эрнст получает должность помощника преподавателя в высшей школе — должность для лиц, сдавших соответствующий экзамен, но еще не имеющих необходимого опыта. Позже он переезжает в Гроссен-на-Одере (ныне — город Кросно в Польше), чтобы заменить заболевшего коллегу.

В 1933 г. к власти приходит Гитлер, и вскоре государственные служащие-евреи лишаются работы. Не избежал этой участи и Эрнст Изинг. В течение года он оставался безработным, не считая временной работы в Париже в школе для детей эмигрантов. В 1934 г. Изинг находит новую работу в еврейской школе-интернате в Капуте вблизи Потсдама. Эта школа была основана прогрессивным педагогом-теоретиком Гертрудой Файертаг (1890–1943?); ее имя носит

сейчас одна из улиц Потсдама); рядом находился летний дом Альберта Эйнштейна. Когда Эйнштейн в 1932 г. уехал в США, школа арендовала этот дом для дополнительных занятий. Позже Изинг с удовольствием рассказывал, как он купался в ванне Эйнштейна, поскольку в его доме ванны не было.

В последующие годы число учеников возрастало, так как еврейских детей изгоняли из общественных школ. В 1937 г. Изинг становится одним из руководителей школы. 10 ноября 1938 г. во время «Хрустальной ночи» — погромной акции, направленной против немецких евреев, — жители деревни, спровоцированные нацистами, подвергли школу полному разграблению. Воспитанники школы вместе с ее директором Файертаг и преподавателями спрятались в ближайшем лесу. Почти через 60 лет оставшиеся в живых вернулись на это место и, вспоминая о былых событиях, назвали их «изгнанием из рая».

После погрома Изинг возвращается в Берлин. 15 ноября он отправляет в школьную администрацию Потсдама письмо, в котором пишет: «С 11 ноября еврейская школа-интернат в Капуте закрыта. Возобновление занятий в обозримом будущем невозможно. Боюсь, что все бумаги и документы утрачены. Мой нынешний адрес: Берлин-Вильмерсдорф, Паретцерштрассе, 10 IV. Изинг». Ответа он не получил.

Через три месяца, ранним утром 27 января 1939 г., Изинг был вызван в гестапо. Там он подвергся четырехчасовому допросу и был освобожден только после того, как обещал покинуть Германию. Решив эмигрировать в США, Изинг с женой отправляются в Люксембург. Однако им пришлось задержаться там, ввиду ограниченной квоты для эмигрантов. В день, когда Изингу исполнилось сорок лет, германская армия оккупировала Люксембург и американский консулат был закрыт. Чтобы вы-

жить, супруги Изинг вынуждены были наняться в прислугу.

Секретное письмо Адольфа Эйхмана (январь 1942 г.) провозгласило полную депортацию евреев, за исключением тех, кто имел супругов немецкого происхождения. В соответствии с этим правилом Изинг мог бы остаться с семьей. Но его и остальных еврейских мужей нееврейских жен не выпустили из Люксембурга и заставили работать на германскую армию. С мая 1943 г. вплоть до освобождения осенью 1944 г. они занимались демонтажем железнодорожных путей на линии Мажино в Лоррейне.

Через два года после окончания второй мировой войны Изинг с семьей покинул Европу на борту грузового судна и в апреле 1947 г. прибыл в Нью-Йорк. На этом закончилась первая половина его жизни.

В течение года он работал преподавателем в государственном педагогическом колледже в Миноте (Северная Дакота), а в 1948 г. получил должность профессора физики в университете Брэдли в Пеории (Иллинойс), где и преподавал вплоть до ухода на пенсию в 1976 г. Гражданство США и имя Эрнест он получил в 1953 г. Здесь, в провинциальной Пеории, прошла вторая, гораздо более счастливая половина жизни Изинга.

После Второй мировой войны Паули попросил своего коллегу Валентина Телегди навести справки о выживших физиках. Изинг был «обнаружен», и в феврале 1951 г. Паули написал ему: «Дорогой м-р Изинг, спасибо за ваше письмо. Я рад узнать, что Вы пережили гитлеровскую “жизнь” и нашли работу...»

Увлечением Изинга в послевоенные годы стало преподавание. Его ученики помнят проводимые им на лекциях тщательные демонстрационные опыты и свойственный лектору тонкий юмор. Он говорил, что урок нельзя считать успешным, если в ходе его ученики хотя бы один



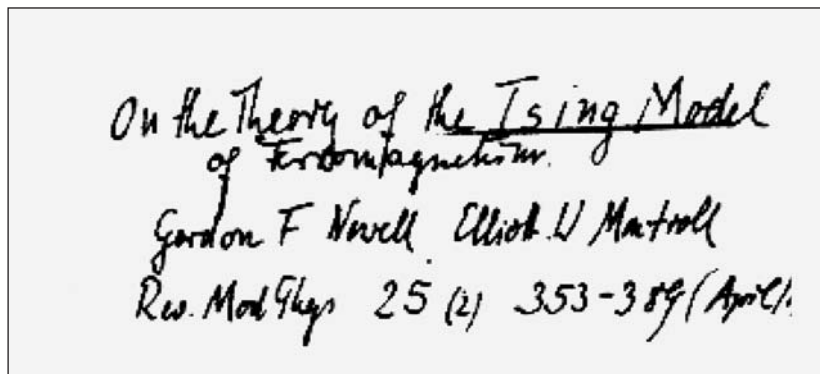
Эрнест и Джоанна Изинги в Пеории (Иллинойс), март 1996 г.

раз не рассмеялись. Он любил изящные искусства и поэзию и даже в преклонные годы мог цитировать Гёте и других немецких классиков. Это, по-видимому, нашло отражение в еще одной (научно-популярной) публикации Изинга «Гёте как физик» [7].

Изинг любил спорт, особенно туризм и плавание. В 1980 г. (в 80-летнем возрасте!) он с женой участвовал в ледяном шоу Дороти Хэмилл, золотой медалистки Олимпийских Игр. Они вместе танцевали вальс. Кроме

того, он был страстным фотографом. И до, и после выхода на пенсию он много путешествовал, побывал почти во всех американских штатах и посетил многие страны мира.

В течение долгих лет Изинг не принимал никакого участия в научной жизни и только в 1949 г. узнал о широкой известности своей статьи. Он изумлялся каждый раз, когда в публикациях упоминалась его имя, но будучи человеком скромным, всегда отмечал вклад своего руководителя. В одном из писем



Заметка в записной книжке Изинга со ссылкой на обзор G.F.Newell, E.W.Montroll (Rev. Mod. Phys. 1953. V.25. №2. P.353—389)

он писал: «Я хочу обратить внимание, что эта модель должна на самом деле называться моделью Ленца—Изинга. Идея принадлежала моему наставнику доктору Вильгельму Ленцу, который предложил мне исследовать ее математически в моей диссертации...».

Эрнст Изинг умер 11 мая 1998 г. в своем доме в Пеории на следующий день после своего 98-го дня рождения.

Модель Изинга II

Концепция микроскопической модели магнитной системы, состоящей из элементарных магнитных моментов с двумя возможными ориентациями «вверх» и «вниз», была предложена Вильгельмом Ленцем. Он впервые использовал эту модель для объяснения парамагнитных свойств твердых тел [8]. В конце своей статьи он следующими словами сформулировал идею взаимодействия: «Предположение о том, что потенциальная энергия взаимодействия атома (элементарного магнита) в ферромагнетике с его соседями в положении “0” отличается от таковой в положении “π”, приводит к выводу о естественной ориентации атомов и возникновению спонтанной намагниченности... Можно надеяться, что таким образом удастся объяснить свойства ферромагнетиков».

В своей диссертации [1] Изинг рассмотрел частный случай линейной цепочки магнитных моментов, связанных взаимодействием с ближайшими соседями. Он показал, что спонтанную намагниченность нельзя объяснить в рамках такой одномерной модели. В статье [2], написанной по материалам диссертации, он ошибочно обобщил полученный результат и на трехмерный случай.

Изинг знал о первой ссылке на его работу в статье Гейзенберга [9], в которой тот ввел квантовомеханическое обмен-

ное взаимодействие для описания ферромагнетизма. Гейзенберг писал: «Другие сложности детально обсудил Ленц, а Изингу удалось показать, что и предположение о наличии достаточно больших сил между любыми двумя соседними атомами цепочки не объясняет появления ферромагнетизма».

Стефен Браш, автор опубликованного в 1967 г. обзора [10], посвященного модели Изинга, так комментирует этот пассаж Гейзенберга: «Таким образом, Гейзенберг использовал предполагаемую несостоятельность модели Ленца—Изинга для объяснения ферромагнетизма как оправдание для разработки своей собственной теории, основанной на более сложном взаимодействии между спинами. Это привело к опрокидыванию естественного порядка развития теории ферромагнетизма: сначала рассматривалась более изощренная модель Гейзенберга и только затем теоретики все-таки вернулись к исследованию свойств более простой модели Ленца—Изинга».

Термин «модель Изинга» ввел, по-видимому, Рудольф Пайерлс в своей статье 1936 года [11], которая называлась «О модели ферромагнетизма Изинга». Он рассмотрел границу, которая разделяет области со спинами «вверх» и «вниз» в двумерной квадратной решетке Изинга. Оценив верхний предел длины замкнутых границ, он показал, что при достаточно низких температурах лишь малая доля от общего числа спинов заключена внутри областей, ограниченных такими границами. Следовательно, большинство спинов должно иметь противоположный знак, что означает спонтанную намагниченность системы.

Наиболее впечатляющий успех модели Изинга связан с исследованием фазового перехода между ферромагнитным и парамагнитным состояниями. Настоящий прорыв произошел, когда различные авторы обнаружи-

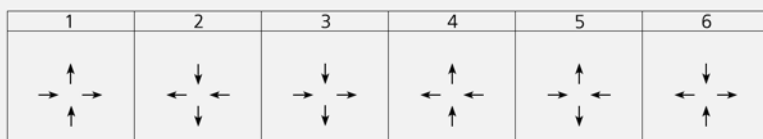
ли, что проблему можно сформулировать в матричном представлении, в котором свойства системы связаны с так называемыми собственными значениями некоторой матрицы [12, 13].

Хендрик Крамерс и Грегори Ванье [12] нашли численное значение температуры T_c , при которой в двумерной изинговской системе возникает отличный от нуля суммарный магнитный момент (так называемая температура Кюри): $kT_c = 2.27J$, а точное и полное ее решение (для прямоугольной решетки) было получено в 1944 г. Ларсом Онзагером [14].

В настоящее время известны также точные решения двумерной проблемы Изинга для треугольной и шестиугольной решеток и решетки Бете*, а также для так называемой модели льда на квадратной решетке (она же — шестивершинная модель) и восьмивершинной модели [15].

В модели льда решетка состоит из атомов двух сортов (условно — «кислород» и «водород»), первые из которых занимают узлы квадратной решетки, а вторые расположены на связях между ними. Атомы подчиняются «правилу льда»: из четырех водородных атомов, окружающих каждый кислородный атом, два (любые) расположены близко, а два других удалены вдоль линий соответствующих связей. «Водородная» связь между атомами кислорода осуществляется через атомы водорода. В модели Изинга этим связям соответствуют магнитные моменты, которые можно изображать стрелками, параллельными линиям связи и направленными к тому концу связи, который занят атомом водорода. «Правило

* Эта решетка строится с помощью специальной процедуры и не является решеткой в обычном смысле этого слова. Она напоминает ветвистое дерево, в котором от каждой развилки отходит одинаковое количество ветвей. Каждый узел в такой решетке связан с одинаковым числом соседей, но в ней нет замкнутых путей.



Различные комбинации ориентаций диполей в шестивершинной модели.

льда» сводится к утверждению, что у каждого узла (где расположен атом кислорода) имеются два момента, направленные к нему, и два момента, направленные от него. Всего имеется шесть различных конфигураций стрелок, удовлетворяющих этому правилу (поэтому модель типа льда называют иногда шестивершинной моделью) с энергиями, которые, вообще говоря, могут быть все отличны друг от друга. Все шесть допустимых конфигураций стрелок-диполей у вершины представлены на рисунке.

Восьмивершинная модель — обобщение модели льда. В ней к приведенным выше шести конфигурациям стрелок вокруг узла добавляются еще две, в которых все стрелки входят в узел или выходят из него (очевидно, для таких узлов правило льда не выполняется).

Что касается трехмерной модели Изинга, то, несмотря на многочисленные попытки, найти ее точное решение до сих пор не удалось (согласно приближенному аналитическим и компьютерным расчетам, $kT_c \approx 4.5J$). Более того, недавно появились строгие математические аргументы в пользу того, что точно решить эту проблему вообще невозможно [16]. Автор этого утверждения Сорин Истрил (директор отдела информатики в Celera/Applied Biosystems, Rockville, MD) говорит: «Конечно, это не так полезно, как найти чашу Грааля. Всем бы нам хотелось быть похожими на Ларса Онзагера. Но, по крайней мере, теперь никому не надо тратить время на решение неразрешимой задачи».

Модель Изинга III

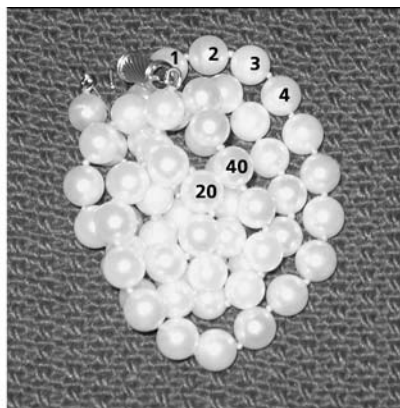
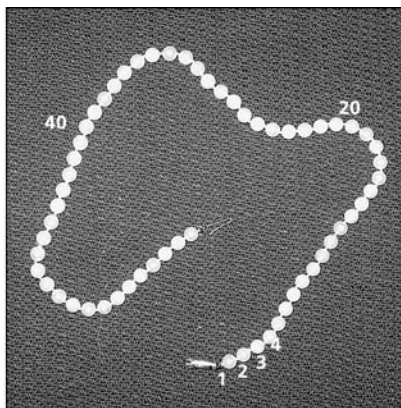
Все, о чем мы говорили до сих пор, относилось к регулярным решеткам магнитных моментов-спинов. Реальные же системы, свойства которых могут быть описаны в рамках модели Изинга, редко бывают абсолютно регулярными. Существует много причин, нарушающих строгую периодичность таких систем. Одна из них — случайное замещение магнитных моментов, составляющих решетку, магнитными моментами другой величины. Это приводит к тому, что энергия взаимодействия параллельных спинов, в отсутствие подобных «примесей» равная $-J$, случайным образом (с вероятностью, равной относительной концентрации примесей) может принимать другое значение: $-J'$. Ясно, что если в обоих случаях энергетически выгодным является параллельная ориентация спинов (т.е. $J, J' > 0$), то примеси лишь повлияют на температуру Кюри, ниже которой система по-прежнему будет ферромагнитной.

Сложнее обстоит дело, когда взаимодействие с примесями имеет антиферромагнитный характер (т.е. $J' < 0$). Можно ожидать, что ферромагнитное состояние в такой системе возможно лишь до тех пор, пока концентрация антиферромагнитных примесей не достигнет некоторой критической величины. И это действительно так, однако оказывается, что критическая концентрация определяется особым механизмом — перколяцией, которая обеспечивает существование связанной области

ферромагнитных спинов. Перколяция в значительной мере ответственна и за свойства системы, в которой нет примесей, но часть связей случайным образом удалена. Формально это соответствует случаю $J' = 0$.

В последнее время интенсивно исследуются изинговские системы, в которых, наоборот, случайным образом устанавливаются *дополнительные* (по отношению к существующим в регулярной решетке) связи. Причем длина таких дополнительных связей также случайна — они могут обеспечивать взаимодействие спинов в узлах, очень далеко отстоящих друг от друга. Такая нерегулярная система называется сетью «тесного мира». Это название — вольный перевод английского словосочетания *small world network*, относящегося к сетям с особыми свойствами. Одно из них, известное как «правило шести рукопожатий» [17], состоит в том, что любые два человека на Земле знакомы друг с другом через шесть «посредников». Английское изречение «It is a small world!», связанное с удивительно высокой вероятностью того, что два любых человека имеют общих знакомых, имеет русский эквивалент «Как тесен мир!», который и служит основанием для приведенного варианта перевода. В «обычных» сетях (регулярных и разупорядоченных) узлы соединены только со своими ближайшими соседями. В отличие от них, в «тесном мире» имеются случайные связи и между далекими (в геометрическом смысле) узлами. Именно наличие таких дальних связей (шунтов, или закортков) и обуславливает особые свойства таких сетей.

Задача Изинга в сети «тесного мира» возникает так же, как в обычной решетке, — в узлах сети размещаются изинговские спины, которые взаимодействуют (энергия взаимодействия J) лишь со своими ближайшими соседями, т.е. с теми, которые непосредственно связаны с выб-



Модель сети «тесного мира».

ранним спином. Однако здесь «ближайшими» становятся и некоторые геометрически удаленные спины, что, естественно, способствует магнитному упорядочению. Основная задача здесь — определить, как температура Кюри зависит от доли p дальних связей.

Точное решение такой задачи известно лишь для одномерной цепочки спинов. В остальных случаях она рассматривается путем компьютерного моделирования. Тем не менее качественно верные и достаточно точные в количественном отношении результаты можно получить, распространяя на сети «тесного мира» аргументы, высказанные Пайерлсом еще в 1936 г. [11]. Его соображения сводятся к оценке энергетической выгоды (или невыгоды) разбиения системы изинговских спинов на области (домены), внутри которых все спины параллельны, но их направление меняется при переходе через границу домена.

Особенно проста такая оценка для одномерной системы, где вблизи доменной границы расположена всего одна пара спинов, чья антипараллельная ориентация увеличивает энергию системы на $2J$. Казалось бы, это препятствует образованию такой границы, а значит, и нарушению ферромагнитного порядка в системе. Однако при ко-

нечной температуре термодинамически равновесное состояние, как известно, — это не состояние с наименьшей (внутренней) энергией, а наиболее вероятное состояние*. Вероятность же состояния тем больше, чем большим числом способов оно (это состояние) может быть реализовано. В рассматриваемом случае одномерной цепочки ферромагнитное состояние, в котором все спины параллельны друг другу, реализуется единственным способом. Состояние же с одной доменной границей может реализоваться большим числом способов, поскольку такая граница может располагаться в любом узле цепочки. Поэтому вероятность появления доменов велика. Это перевешивает энергетический проигрыш $2J$ и приводит к тому, что ферромагнитное состояние не является термодинамически равновесным. Формально данному случаю соответствует $T_c = 0$.

В сети «тесного мира» возможности размещения доменной границы значительно сужаются. Действительно, чтобы энергия системы не увеличи-

* Точнее — состояние (при постоянных температуре и объеме), соответствующее минимуму так называемой свободной энергии, которая меньше внутренней энергии системы на величину, тем большую, чем выше вероятность конфигурации, соответствующей тому или иному состоянию системы.

лась, такая граница не должна разрывать дальние связи. В результате число допустимых конфигураций с доменной границей падает, и термодинамически равновесное ферромагнитное состояние восстанавливается (т.е. $T_c > 0$). Оценки дают для одномерной цепочки спинов такую зависимость температуры Кюри от доли p дальних связей: $T_c \approx 2J/\ln|p|$ (результат справедлив, если $pN \gg 1$, где N — число спинов в цепочке).

В двумерной и трехмерной *регулярных* системах без дальних связей упорядоченное магнитное состояние существует (т.е. $T_c > 0$). Введение дальних связей приводит лишь к росту температуры Кюри на некоторую величину ΔT_c , зависящую от p . Распространяя описанные соображения на эти случаи, можно показать, что $\Delta T_c \propto p^{1/2}$ для двумерной системы и $\Delta T_c \propto p^{2/3}$ для трехмерной системы [18, 19]. Эти выводы подтверждаются компьютерным моделированием.

Система, которую называют сетью «тесного мира», — математическая абстракция. Возникает вопрос, существуют ли *реальные* физические объекты, устроенные таким образом? Ответ на него попыталась дать четверка студентов из американского Университета Миссисипи [20]. Они приобрели в ювелирной лавочке длинное ожерелье — нить, на которую было нанизано $N = 150$ бусинок, и использовали его как модель одномерной регулярной цепочки. Все бусинки были пронумерованы, после чего нить была случайным образом смята и превращена в комок, что, конечно, не нарушило ее одномерности. Однако после этого соседними оказались некоторые бусинки, которые до того находились далеко друг от друга, что эквивалентно введению дополнительных дальнедействующих связей. Затем была составлена таблица (так называемая лапласиан-матрица) размером $N \times N$, элемент которой, стоящий на пересечении i -го столбца с j -й

строкой, был равен 1 или 0, в зависимости от того, соседствуют ли друг с другом i -я и j -я бусинки. Точно такой же эксперимент был произведен с помощью компьютера, который по специальному вероятностному алгоритму «создал» виртуальную одномерную систему «тесного мира». Оказалось, что некоторая важная характеристика лапласиан-матриц (а именно, распределение их собственных значений) одинакова для реальной и виртуальной систем. Та же характеристика для исходной (прямолинейной) цепочки — совсем иная.

Этот эксперимент показал, что макроскопические системы сети «тесного мира» вполне реальны. Можно думать, что реальные и микроскопические системы, в которых роль бусинок исполняют атомы или молекулы. Не исключено, что они могут быть созданы из длинных (поли-

мерных) молекул примерно по той же схеме, что описана выше.

* * *

Введенная изначально для понимания природы ферромагнетизма, модель Изинга оказалась в центре разнообразных физических теорий, относящихся к критическим явлениям, жидкостям и растворам, спиновым стеклам, клеточным мембранам, моделированию иммунной системы, различным общественным явлениям и т.д. Кроме того, эта модель служит полигоном для проверки методов численного моделирования различных физических явлений.

Самая большая загадка Изинга — почему столь успешное начало научной деятельности не получило никакого продолжения? Одно из возможных объяснений состоит в том, что своей работой Изинг, как ему казалось, «закрыв» возможность

описания ферромагнетизма в рамках рассмотренной им модели. Недаром Гейзенберг, ссылаясь в 1928 г. на результат Изинга, подчеркнул именно этот негативный вывод. И все же робкое заявление Изинга о том, что его работа «...должна представлять интерес для проблемы ферромагнетизма...», которое он сделал в заключительной фразе своей статьи, оказалось пророческим. К сожалению, первое «положительное» упоминание модели, использованной Изингом, как возможной основы для объяснения ферромагнетизма появилось только в 1936 г. в упоминавшейся выше работе Пайерлса. Но в это страшное для Германии время Изинг был слишком занят сохранением еврейской школы в Капуде, а позже — и самой своей жизни. Поэтому вся последующая история модели Изинга прошла без участия самого Изинга. ■

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект 06-02-16313.

Литература

1. *Ising E.* Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus. Hamburg, 1924. Полный текст диссертации Э.Изинга можно найти в Интернете (http://www.fh-augsburg.de/~harsch/germanica/Chronologie/20Jh/Ising/isi_fe00.html).
2. *Ising E.* // Zeitschrift f. Physik. 1925. Bd.31. S.253—258.
3. *Fry L.* The Isings and the 20th Century. Peoria, 1991. P.4.
4. *Kobe S.* // Physikalische Blatter. 1995. Bd.51. S.426.
5. *Kobe S.* // J. Stat. Phys. 1997. V.88. P.991—995.
6. *Kobe S.* // Braz. J. Phys. 2000. V.30. №4. P.649—654.
7. *Ising E.* // American J. Physics. 1950. V.18. P.235—236.
8. *Lenz W.* // Phys. Zeitschrift. 1920. Bd.21. S.613—615.
9. *Heisenberg W.* // Zeitschrift f. Physik. 1928. Bd.49. S.619—636.
10. *Brush S.G.* // Rev. Mod. Phys. 1967. V.39. P.883—893.
11. *Peierls R.* // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1936. V.32. P.477—481.
12. *Kramers H.A., Wannier G.H.* // Phys. Rev. 1941. V.60. P.252—262.
13. *Montroll E.* // J. Chem. Phys. 1942. V.10. P.61—77.
14. *Onsager L.* // Phys. Rev. 1944. V.65. P.117—149.
15. *Бэкстер P.* Точно решаемые модели в статистической механике. М., 1985.
16. *Istrail S.* // Proceedings of the Thirty-Second Annual ACM Symposium on Theory of Computing. May 21—23. Portland, 2000. P.87—96.
17. *Milgram S.* // Psychol. Today. 1967. V.1. P.61—67.
18. *Meilikbov E.Z., Farzetdinova R.M.* // Phys. Rev. E. 2005. V.71. P.046111(1—8).
19. *Meilikbov E.Z., Farzetdinova R.M.* // e-Print arXiv:Cond-mat/0505502
20. e-Print arXiv:Cond-mat/0410589 v1/22 Oct 2004