

## **МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

Квантовая статистическая физика изучает свойства систем, состоящих из большого числа частиц, при низких температурах. В последние годы в этой области физики достигнут большой прогресс, что связано главным образом с применением математических методов квантовой теории поля. Основа этих методов — диаграммная техника — обладает высокой степенью автоматизма и наглядности. С ее помощью удалось решить целый ряд интересных физических вопросов, которые раньше были недоступны для рассмотрения.

В книге изложены эти новые методы и основные результаты, полученные за последнее время. Она предназначена для научных работников и аспирантов — физиков, а также для студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики, физики твердого тела и низких температур.

### **ОГЛАВЛЕНИЕ**

|                                                                                                                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие                                                                                                                                                                     | 7   |
| Глава I. Общие свойства систем из многих частиц при низких температурах                                                                                                         | 9   |
| § 1. Элементарные возбуждения. Энергетический спектр и свойства жидкого $\text{He}^4$ при низких температурах                                                                   | 9   |
| 1. Введение. Квазичастицы (9). 2. Спектр бозе-жидкости (15). 3. Сверхтекучесть (22).                                                                                            |     |
| § 2. Ферми-жидкость                                                                                                                                                             | 28  |
| 1. Возбуждения в ферми-жидкости (28). 2. Энергия квазичастиц (32). 3. Звук (38).                                                                                                |     |
| § 3. Вторичное квантование                                                                                                                                                      | 44  |
| § 4. Разреженный бозе-газ                                                                                                                                                       | 48  |
| § 5. Разреженный ферми-газ                                                                                                                                                      | 55  |
| Глава II. Методы квантовой теории поля при $T=0$                                                                                                                                | 64  |
| § 6. Представление взаимодействия                                                                                                                                               | 64  |
| § 7. Гринавская функция                                                                                                                                                         | 74  |
| 1. Определение. Гринавские функции свободных частиц (74). 2. Аналитические свойства (80). 3. Физический смысл полюсов (85). 4. Гринавская функция системы во внешнем поле (91). |     |
| § 8. Основные принципы диаграммной техники                                                                                                                                      | 93  |
| 1. Переход от переменной $N$ к переменной $\mu$ . (93). 2. Теорема Вика (94). 3. Диаграммы Фейнмана (97).                                                                       |     |
| § 9. Правила построения диаграмм для различных типов взаимодействия.                                                                                                            | 103 |
| 1. Диаграммная техника в координатном пространстве. Примеры (103). 2. Диаграммная техника в импульсном пространстве. Примеры (114).                                             |     |

|                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 10. Уравнение Дайсона. Вершинная часть. Многочастичные функции Грина.                                                                                                                                                                   | 120 |
| 1. Суммирование диаграмм. Уравнение Дайсона (120). 2. Вершинные части. Многочастичные функции Грина (125). 3. Энергия основного состояния (133).                                                                                          |     |
| Глава III. Диаграммная техника при конечных температурах                                                                                                                                                                                  | 136 |
| § 11. Температурные гриновские функции                                                                                                                                                                                                    | 136 |
| 1. Общие свойства (136). 2. Температурные гриновские функции свободных частиц (142).                                                                                                                                                      |     |
| § 12. Теория возмущений                                                                                                                                                                                                                   | 144 |
| 1. Представление взаимодействия (144). 2. Теорема Вика (148).                                                                                                                                                                             |     |
| § 13. Диаграммная техника в координатном пространстве. Примеры                                                                                                                                                                            | 154 |
| § 14. Диаграммная техника в импульсном пространстве                                                                                                                                                                                       | 167 |
| 1. Переход к импульсному представлению (167). 2. Примеры (171).                                                                                                                                                                           |     |
| § 15. Ряд теории возмущений для термодинамического потенциала $\Omega$                                                                                                                                                                    | 181 |
| § 16. Уравнение Дайсона. Многочастичные функции Грина                                                                                                                                                                                     | 187 |
| 1. Уравнение Дайсона (187). 2. Связь гриновских функций с термодинамическим потенциалом $\Omega$ (192).                                                                                                                                   |     |
| § 17. Временные гриновские функции $G$ при конечных температурах. Аналитические свойства гриновских функций                                                                                                                               | 195 |
| Глава IV. Теория ферми-жидкости.                                                                                                                                                                                                          | 208 |
| § 18. Свойства вершинной части при малых передачах импульса. Нулевой звук                                                                                                                                                                 | 208 |
| § 19. Эффективная масса. Связь граничного импульса с числом частиц. Бозевские ветви спектра. Теплоемкость                                                                                                                                 | 215 |
| 1. Вспомогательные соотношения (215). 2. Доказательство основных соотношений теории ферми-жидкости (219). 3. Бозевские ветви спектра (221). 4. Другой вывод связи граничного импульса $p_0$ с числом частиц (223). 5. Теплоемкость (227). |     |
| § 20. Особенности вершинной части в случае малого суммарного импульса сталкивающихся частиц                                                                                                                                               | 232 |
| § 21. Взаимодействие электронов с фононами при $T=0$                                                                                                                                                                                      | 236 |
| 1. Вершинная часть (237). 2. Гриновская функция фононов (239). 3. Гриновская функция электронов (241).                                                                                                                                    |     |
| § 22. Некоторые свойства вырожденной плазмы.                                                                                                                                                                                              | 246 |
| 1. Постановка задачи (246). 2. Вершинная часть для малых передач импульса (249). 3. Электронный спектр (255). 4. Термодинамические функции (259).                                                                                         |     |
| Глава V. Система взаимодействующих бозе-частиц                                                                                                                                                                                            | 263 |
| § 23. Применение методов теории поля к системе частиц Бозе при абсолютном нуле температур                                                                                                                                                 | 263 |
| § 24. Функция Грина                                                                                                                                                                                                                       | 275 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Структура уравнений (275). 2. Аналитические свойства функций Грина (280). 3. Поведение функций Грина при малых импульсах (285).                                                                                                                                                                      |     |
| § 25. Разреженный неидеальный бозе-газ.                                                                                                                                                                                                                                                                 | 287 |
| 1. Диаграммная техника (287). 2. Связь химического потенциала с собственно энергетическими частями одночастичных функций Грина (290). 3. Приближение малой плотности (294). 4. Эффективный потенциал взаимодействия (298). 5. Функции Грина бозе-газа в приближении малой плотности. Спектр (302).      |     |
| § 26. Свойства спектра одночастичных возбуждений вблизи точки окончания спектра                                                                                                                                                                                                                         | 303 |
| 1. Постановка вопроса (303). 2. Система уравнений (306). 3. Свойства спектра вблизи порога рождения фонона (309). 4. Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с параллельными не равными нулю импульсами (313). 5. Распад на два возбуждения, вылетающих под углом друг к другу (315). |     |
| § 27. Применение методов теории поля к системе взаимодействующих бозе-частиц при конечной температуре                                                                                                                                                                                                   | 318 |
| Глава VI. Электромагнитное излучение в поглощающей среде                                                                                                                                                                                                                                                | 325 |
| § 28. Гриневские функции излучения в поглощающей среде                                                                                                                                                                                                                                                  | 325 |
| § 29. Вычисление диэлектрической постоянной.                                                                                                                                                                                                                                                            | 335 |
| § 30. Силы Ван-дер-Ваальса в неоднородном диэлектрике                                                                                                                                                                                                                                                   | 340 |
| § 31. Молекулярные силы взаимодействия между твердыми телами                                                                                                                                                                                                                                            | 347 |
| 1. Силы взаимодействия между твердыми телами (347). 2. Силы взаимодействия между атомами в растворах (355). 3. Тонкая пленка на поверхности твердого тела (359).                                                                                                                                        |     |
| Глава VII. Теория сверхпроводимости                                                                                                                                                                                                                                                                     | 362 |
| § 32. Общие сведения. Выбор модели                                                                                                                                                                                                                                                                      | 362 |
| 1. Явление сверхпроводимости (362). 2. Модель. Гамильтониан взаимодействия (364).                                                                                                                                                                                                                       |     |
| § 33. Феномен Купера. Неустойчивость основного состояния системы невзаимодействующих ферми-частиц относительно сколь угодно слабого притяжения между частицами                                                                                                                                          | 367 |
| 1. Уравнение для вершинной части (367). 2. Свойства вершинной части (372). 3. Определение температуры перехода (374).                                                                                                                                                                                   |     |
| § 34. Система основных уравнений для сверхпроводника                                                                                                                                                                                                                                                    | 376 |
| 1. Сверхпроводник при абсолютном нуле температур (376). 2. Уравнения при наличии внешнего электромагнитного поля. Градиентная инвариантность (383). 3. Сверхпроводник при конечных температурах (385).                                                                                                  |     |
| § 35. Вывод уравнений теории сверхпроводимости в фононной модели.                                                                                                                                                                                                                                       | 388 |
| § 36. Термодинамика сверхпроводников                                                                                                                                                                                                                                                                    | 393 |
| 1. Зависимость щели в спектре от температуры (393). 2. Термодинамика                                                                                                                                                                                                                                    |     |

|                                                                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| сверхпроводника (394).                                                                                                                          |     |
| § 37. Сверхпроводник в слабом электромагнитном поле                                                                                             | 398 |
| 1. Постоянное слабое магнитное поле (398). 2. Сверхпроводник в переменном поле (408).                                                           |     |
| § 38. Свойства сверхпроводника в произвольном магнитном поле вблизи температуры перехода                                                        | 414 |
| § 39. Теория сверхпроводящих сплавов                                                                                                            | 421 |
| 1. Постановка вопроса (421). 2. Остаточное сопротивление нормального металла (423). 3. Электромагнитные свойства сверхпроводящих сплавов (432). |     |
| Литература                                                                                                                                      | 442 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

За последнее время в статистической физике были достигнуты значительные успехи благодаря широкому использованию методов, заимствованных из квантовой теории поля. Плодотворность этих методов связана с новой формулировкой теории возмущений и в первую очередь с широким использованием так называемых диаграмм Фейнмана. Основное преимущество диаграммной техники состоит в ее наглядности: оперируя понятиями одночастичной задачи, эта техника позволяет установить структуру любого приближения и с помощью правил соответствия написать нужные выражения. Новые методы позволили решить большое количество вопросов, к которым нельзя было подступиться при старой формулировке теории, а также получить целый ряд новых общих соотношений. В настоящее время эти методы являются наиболее мощными и результативными в квантовой статистике.

Формулировке методов теории поля в квантовой статистике, а также их приложениям к конкретным вопросам посвящена в настоящее время большая и очень разбросанная журнальная литература. В то же время среди лиц, занимающихся статистической физикой, знакомство с этими методами не является общераспространенным. Потому нам кажется, что назрела необходимость дать последовательное и достаточно полное изложение вопроса, которое было бы доступно для широкого читателя.

Несколько слов относительно материала, помещенного в этой книге. Мы стремились в первую очередь продемонстрировать практический характер новых методов. Поэтому, кроме подробного изложения математического аппарата, в книге рассматриваются различные конкретные проблемы квантовой статистики. Затронутые вопросы, конечно, не

составляют полного перечня того нового, что было сделано в этой области за последние годы. Их подбор производился с учетом степени их общезначимости, а также возможностей иллюстрации на этих примерах общего метода.

Мы ограничились одним из возможных вариантов формулировки квантовой статистики на языке теории поля (например, мы не касались так называемой трехмерной теории возмущений и др.). С нашей точки зрения метод функций Грина, положенный в основу данной книги, является наиболее простым и удобным.

Предполагается, что читатель знаком с основами статистической физики и квантовой механики. В книге описан метод вторичного квантования и имеются все сведения, необходимые для вывода техники теории поля. Этому выводу предпослана первая глава, в которой кратко изложены некоторые современные представления относительно характера энергетических спектров и приведены простые примеры.

В книге применяется система единиц, соответствующая  $\hbar = 1$ . Температура выражается в энергетических единицах ( $k = 1$ ).

Авторы выражают признательность акад. Л. Д. Ландау и Л. П. Питаевскому за ценные обсуждения вопросов, затронутых в книге.

---

# ОБЩИЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ ИЗ МНОГИХ ЧАСТИЦ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

## § 1. Элементарные возбуждения.

### Энергетический спектр и свойства жидкого $\text{He}^4$ при низких температурах

**1. Введение. Квазичастицы.** Статистическая физика изучает поведение систем, состоящих из очень большого числа частиц. Макроскопические свойства жидкостей, газов, твердых тел в конечном итоге обуславливаются микроскопическими взаимодействиями между составляющими систему частицами. Очевидно, что решение полной задачи, включающей в себя определение поведения каждой отдельной частицы, является невыполнимым. В то же время суммарные, макроскопические характеристики определяют только некоторые усредненные свойства всей системы.

Рассмотрим для определенности термодинамические свойства. Макроскопическое состояние системы определяется заданием трех независимых термодинамических переменных, например, давления  $P$ , температуры  $T$  и среднего числа частиц в системе  $N$ . С квантовомеханической точки зрения замкнутая система из  $N$  частиц характеризуется своими уровнями энергии  $E_n$ . Выделим в этой системе некоторый объем, такой, чтобы новую подсистему все еще можно было рассматривать как макроскопическую. Поскольку число частиц в такой подсистеме по-прежнему очень велико, а силы взаимодействия между частицами действуют на расстояниях порядка атомных, то, отвлекаясь от пограничных эффектов, рассматриваемую подсистему можно в свою очередь считать замкнутой и характеризовать уровнями энергии при данном

числе частиц в подсистеме. Поскольку на самом деле рассматриваемая подсистема взаимодействует с остальными частями замкнутой системы, то она не имеет строго фиксированных энергии и числа частиц и с конечной вероятностью может находиться на любом уровне.

Как известно из статистической физики (см., например [1]), микроскопический вывод термодинамических формул основан на так называемом распределении Гиббса, которое устанавливает следующую вероятность нахождения подсистемы в состоянии с энергией  $E_{nN}$  и числом частиц  $N$ :

$$w_{nN} = Z^{-1} e^{-\frac{E_{nN} - \mu N}{T}}. \quad (1.1)$$

В этой формуле  $T$  означает абсолютную температуру,  $\mu$  — химический потенциал, а  $Z$  — нормировочный множитель, который определяется из условия

$$\sum_{nN} w_{nN} = 1. \quad (1.2)$$

Согласно (1.1) имеем:

$$Z = \sum_{nN} e^{-\frac{E_{nN} - \mu N}{T}}. \quad (1.3)$$

Величина  $Z$  называется полной статистической суммой. Если уровни энергии  $E_{nN}$  известны, то статистическая сумма может быть вычислена. Это сразу определяет и термодинамические функции, так как величина  $Z$  связана с термодинамическим потенциалом  $\Omega$  (потенциал в переменных  $V$ ,  $T$ ,  $\mu$ ) соотношением

$$\Omega = -T \ln Z. \quad (1.4)$$

Очевидно, проще всего по этим формулам могут быть вычислены термодинамические функции идеальных газов, поскольку их энергия складывается из энергий отдельных частиц. Для системы большого числа взаимодействующих частиц определение уровней энергии в общем случае невозможно. Поэтому до сих пор взаимодействие между частицами в квантовой статистике удавалось учитывать только в том случае, если оно достаточно слабое. При вычислении термодинамических величин по теории возмущений практически удается найти только одно-два первых приближения. Для



большинства физических задач, в которых взаимодействие отнюдь не мало, подход, основанный на непосредственном использовании формул (1.1) — (1.4), является нереальным.

Несколько особым является случай очень низких температур. При  $T \rightarrow 0$  в статистической сумме существенны уровни энергии, расположенные сравнительно низко над основным уровнем (слабовозбужденные состояния). Характер энергетического спектра системы в этой области энергий можно установить довольно детально, основываясь на весьма общих соображениях, справедливых независимо от величины и особенностей взаимодействия между частицами.

Для того чтобы последующие рассуждения были более ясны, рассмотрим в качестве примера колебательные возбуждения кристаллической решетки. До тех пор, пока колебания являются малыми, решетку можно рассматривать как совокупность связанных гармонических осцилляторов. Введя нормальные координаты, мы получим систему  $3N$  ( $N$  — число атомов) линейных осцилляторов с собственными частотами  $\omega_i$ . Согласно квантовой механике, энергетический спектр такой системы определяется формулой  $E = \sum_{i=1}^{3N} \omega_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right)$ ,

где  $n_i$  — любые положительные целые числа или нуль. Различные наборы чисел  $n_i$  дают различные уровни энергии системы.

Колебания решетки могут быть описаны как суперпозиция монохроматических плоских волн, распространяющихся в кристалле. Каждая волна характеризуется волновым вектором, частотой и некоторым номером  $s$ , определяющим тип волны. Возможность распространения волн различных типов приводит к тому, что частота  $\omega$ , рассматриваемая как функция волнового вектора  $\mathbf{k}$ , не является однозначной и состоит из нескольких ветвей  $\omega_s(\mathbf{k})$ , причем полное число ветвей равно  $3r$ , где  $r$  — число атомов, приходящихся на одну элементарную ячейку кристалла. При малых импульсах три из этих ветвей (так называемые акустические ветви) характеризуются линейной зависимостью частоты от волнового вектора  $\omega_s(\mathbf{k}) = u_s(\theta, \varphi) |\mathbf{k}|$ . У остальных кривая  $\omega_s(\mathbf{k})$  начинается с некоторого конечного значения при  $\mathbf{k} = 0$  и в области малых волновых векторов слабо зависит от  $\mathbf{k}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Более подробные сведения о спектре колебаний решетки содержатся, например, в книге Р. Е. Пайерлса [1a].

Знание частотного спектра, уровней энергии и матричных элементов смещений атомов решетки (координат осцилляторов) дает, во всяком случае в принципе, полную возможность рассчитать как термодинамические, так и кинетические характеристики колеблющейся решетки. Однако на практике оказывается весьма удобным вместо картины связанных осцилляторов пользоваться другой эквивалентной картиной, которую можно получить с помощью квантовомеханического принципа соответствия. Согласно этому принципу, каждой плоской волне можно сопоставить совокупность движущихся «частиц». Волновой вектор  $\mathbf{k}$  будет определять импульс этих частиц<sup>1)</sup>, а частота  $\omega_s(\mathbf{k})$  — их энергию<sup>2)</sup>. Возбужденное состояние решетки можно представлять себе как совокупность таких «частиц» (их называют фононами), свободно движущихся в объеме тела. Этому вполне соответствует выражение для энергетических уровней системы, которое аналогично энергии идеального газа.

Числа  $n_i$  можно интерпретировать как числа фононов, в состоянии  $i (i = (\mathbf{k}, s))$ . Они могут принимать любые значения. Отсюда следует, что фононы подчиняются статистике Бозе даже в том случае, если составляющие систему атомы имеют полуцелый спин.

При самых низких температурах наиболее существенную роль будут играть фононы с малыми энергиями. Из того, что было сказано выше о ветвях частотного спектра, следует, что наименьшими энергиями обладают фононы, соответствующие акустическим ветвям в области малых импульсов. Зависимость  $\omega(\mathbf{k})$  в данном случае является линейной, и уже из одного этого факта можно сделать целый ряд качественных заключений, например, о законе  $\sim T^3$  для теплоемкости решетки.

Для количественных расчетов вместо спектра реальной решетки часто пользуются так называемой изотропной моделью Дебая. В этой модели вместо трех акустических ветвей низкочастотная часть спектра предполагается такой же, как

<sup>1)</sup> В действительности  $\mathbf{k}$  не импульс, а «квазиимпульс» (см. [1a]), но здесь это различие несущественно.

<sup>2)</sup> Напоминаем, что в принятой здесь системе единиц  $\hbar = 1$ . Это значит, что энергия имеет размерность  $\text{сек}^{-1}$ , а импульс —  $\text{см}^{-1}$ . Для перехода к обычным единицам все энергии и импульсы следует умножить на  $\hbar$ .

у изотропного тела, т. е. состоящей из продольных фононов с энергией  $\omega_l(k) = u_l k$  и поперечных фононов с двумя возможными поляризациями и одинаковой зависимостью энергии от импульса  $\omega_t(k) = u_t k$ . Далее, считается, что импульсы фононов не превышают некоторого граничного значения  $k_D$ , определяемого нормировкой на правильное число степеней свободы. При этом, очевидно,  $k_D \sim \frac{1}{a}$ , где  $a$  — межатомное расстояние. Такая модель приводит к известной интерполяционной формуле Дебая для теплоемкости твердых тел. В дальнейшем мы применим эту модель для изучения взаимодействия электронов с фононами в металле.

Если учесть малые ангармонические члены в потенциальной энергии колеблющейся решетки, то приведенное выше выражение для энергии перестает быть точным. Появляется некоторая вероятность перехода между состояниями с различными наборами чисел  $n_i$ . Это может быть интерпретировано и на языке фононов как различные процессы взаимодействия между фононами, приводящие к рассеянию их друг на друге и к рождению новых фононов. Иначе говоря, при строгом рассмотрении фононы лишь приближенно можно считать свободно движущимися частицами.

Роль ангармонических членов будет увеличиваться с ростом амплитуды колебаний, т. е. с повышением температуры. В картине с фононами при повышении температуры увеличивается число фононов, что приводит к повышению роли актов взаимодействия между фононами. Поэтому само понятие фононов как свободно движущихся частиц применимо лишь к области не слишком высоких температур (значительно меньших температуры плавления).

Перейдем теперь к общему случаю. По аналогии с рассмотренным примером основной картины энергетического спектра для слабовозбужденных состояний системы служит предположение, что уровни в первом приближении могут быть построены по тому же принципу, что и уровни энергии идеальных газов.

Иными словами, предполагается, что любой уровень энергии получается как сумма энергий некоторого числа «квазичастиц», или элементарных возбуждений, движущихся в объеме тела и обладающих импульсом  $p$  и энергией  $\epsilon(p)$ . (Закон

дисперсии возбуждений  $\varepsilon(p)$ , вообще говоря, не совпадает с выражением для энергии свободных частиц  $\varepsilon_0(p) = \frac{p^2}{2m}$ . Следует сразу же подчеркнуть, что элементарные возбуждения возникают в результате коллективных взаимодействий частиц системы, а потому относятся ко всей системе в целом, а не к отдельным частицам. В частности, их число отнюдь не совпадает с полным числом частиц в системе.

Все энергетические спектры можно разделить на две большие группы — спектры типа Бозе и спектры типа Ферми. В первом случае возбуждения обладают целочисленным собственным моментом (спином) и подчиняются статистике Бозе. Во втором случае возбуждения обладают полуцелым спином и подчиняются статистике Ферми. Согласно квантовой механике, момент всякой системы может меняться только на целое число. Отсюда следует, что бозевские возбуждения могут появляться и исчезать поодиночке, а фермиевские — всегда парами.

Как уже было отмечено в приведенном выше примере с колебаниями решетки, статистика элементарных возбуждений не обязательно совпадает со статистикой частиц, составляющих систему. Очевидно лишь то, что бозе-система не может обладать возбуждениями с полуцелым спином.

Элементарные возбуждения не соответствуют точным стационарным состояниям системы, а представляют собой суперпозицию большого числа точных стационарных состояний с узким энергетическим разбросом (пакеты). Ввиду этого существует конечная вероятность перехода из одного такого состояния в другое, что приводит к расплыванию пакета, т. е. к затуханию возбуждения. Поэтому описание системы с помощью элементарных возбуждений справедливо лишь до тех пор, пока энергетическая ширина пакета, определяющая его затухание, мала по сравнению с его энергией.

Расплывание пакета и связанное с ним затухание элементарных возбуждений можно представить себе как результат взаимодействия «квазичастиц» друг с другом. При этом выполняются законы сохранения энергии и импульса. Очевидно, все такие переходы можно разделить на процессы «распада» одного возбуждения на несколько других и процессы «рассеяния» возбуждений друг на друге.

Как мы увидим ниже, распад возбуждений может происходить только при достаточно большой энергии. Процессы рассеяния становятся существенными только тогда, когда число возбуждений достаточно велико. Таким образом, при низких температурах, где существенны возбуждения с малыми энергиями и число их мало, оба типа процессов, приводящих к затуханию возбуждений, не будут существенными. Слабость взаимодействия между возбуждениями при низких температурах позволяет рассматривать их как идеальный газ «квазичастиц».

В настоящее время на основании экспериментальных данных и прямых теоретических расчетов можно считать, что изложенные представления о структуре спектров являются твердо установленным фактом. Конечно, энергетические спектры различных физических объектов (например, жидких изотопов гелия  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$ , металлов, диэлектриков и др.) совершенно различны. Так, спектр жидкого  $\text{He}^4$  является спектром бозевского типа, а спектр жидкого  $\text{He}^3$  и электронные спектры металлов<sup>1)</sup> принадлежат к спектрам фермиевского типа.

**2. Спектр бозе-жидкости<sup>2)</sup>.** Одним из примеров системы, обладающей спектром бозевского типа, является так называемая бозе-жидкость, т. е. жидкость, состоящая из атомов с целочисленным спином. В природе существует только одна такая жидкость — жидкий гелий (точнее, изотоп  $\text{He}^4$ ), которая не затвердевает при абсолютном нуле температуры. Поскольку атомы  $\text{He}^4$  обладают нулевым спином, мы можем по существу, ограничиться только этим случаем.

Зависимость энергии возбуждения бозе-жидкости от импульса, при предельно малых значениях последнего, определяется из весьма общих соображений. Область малых импульсов  $p$  соответствует длинноволновым колебаниям жидкости. Но такие колебания есть не что иное,

---

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений оговоримся, что в дальнейшем мы всюду рассматриваем только изотропную модель металла, что, конечно, очень далеко от действительной картины. Электронные спектры в реальных металлах резко анизотропны, и поэтому многие изложенные в книге результаты в применении к металлам имеют только качественный характер.

<sup>2)</sup> Излагаемые представления о спектре бозе-жидкости были впервые высказаны Л. Д. Ландау [2, 3].

как обыкновенный звук. Отсюда мы сразу заключаем, что элементарные возбуждения при малых  $p$  тождественны квантам звука — фононам, для которых связь энергии и импульса хорошо известна. Действительно, замечая, что частота звука  $\omega$  связана с волновым вектором соотношением  $\omega = uk$ , где  $u$  — скорость звука, мы немедленно получаем интересующее нас соотношение

$$\epsilon = up. \quad (1.5)$$

Таким образом, при малых импульсах энергия возбуждения в бозе-жидкости линейно зависит от его импульса, причем коэффициент пропорциональности совпадает со скоростью звука.

При увеличении импульса зависимость  $\epsilon(p)$  перестает быть линейной и дальнейший ход кривой  $\epsilon(p)$  не может быть определен столь же простым способом. В этой связи представляет интерес приведенное ниже рассуждение, позволяющее сделать ряд выводов о зависимости  $\epsilon(p)$  при произвольных импульсах<sup>1)</sup>.

Энергия жидкости представляет собой функционал ее плотности  $\rho(\mathbf{r})$  и гидродинамической скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ :

$$E(\rho, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{v}^2 d\mathbf{r} + E^{(1)}(\rho), \quad (1.6)$$

где  $E^{(1)}$  — часть энергии, не зависящая от скорости. Мы будем рассматривать малые колебания. При этом  $\rho(\mathbf{r}) = \bar{\rho} + \delta\rho(\mathbf{r})$ , где  $\bar{\rho}$  — равновесная плотность, не зависящая от координат, а  $\delta\rho(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  — малые величины, описывающие колебания. Заметим, что по определению

$$\bar{\rho} = \frac{1}{V} \int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \int \delta\rho d\mathbf{r} = 0.$$

С точностью до величин второго порядка малости по  $\delta\rho$  и  $\mathbf{v}$  функция  $\rho(\mathbf{r})$  в первом члене правой части (1.6) может

---

<sup>1)</sup> Вывод, который приводится ниже, принадлежит Л. П. Питаевскому [4].

быть заменена ее средним значением  $\bar{\rho}$ . С той же точностью выражение для  $E^{(1)}$  запишется в виде

$$E^{(1)}(\rho) = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \int \psi(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \int \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\rho(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

Функции  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  определяются только свойствами жидкости, не возмущенной колебаниями, т. е. однородной и изотропной, в силу чего функция  $\psi(\mathbf{r})$  должна быть константой:  $\psi(\mathbf{r}) = \text{const} = \psi$ , а  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  зависит только от  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ :  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ . Член первого порядка в разложении  $E^{(1)}$  поэтому просто пропорционален  $\int \delta\rho(\mathbf{r}) dV \equiv 0$ . Окончательно,

$$E = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \frac{\bar{\rho}}{2} \int \mathbf{v}^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \int \int \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta\rho(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

Скорость  $\mathbf{v}$  связана с колебаниями плотности уравнением непрерывности

$$\dot{\rho} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

которое с точностью до членов первого порядка по  $\delta\rho$  и  $\mathbf{v}$  можно записать как

$$\dot{\rho} + \bar{\rho} \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.7)$$

Перейдем теперь к компонентам Фурье:

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad \varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

и учтем, что малые колебания жидкости всегда являются продольными, т. е. скорость  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$  в волне с волновым вектором  $\mathbf{p}$  всегда направлена по  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} \mathbf{p}.$$

Теперь из (1.7) легко найти, что

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = i \frac{\dot{\rho}_{\mathbf{p}}}{\rho} \frac{\mathbf{p}}{p^2}$$

и,

$$E = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left( \frac{|\dot{\rho}_{\mathbf{p}}|^2}{2\bar{\rho}p^2} + \frac{1}{2} \varphi_{\mathbf{p}} |\rho_{\mathbf{p}}|^2 \right). \quad (1.8)$$

Первый член в (1.8) представляет собой энергию невозмущенной жидкости, второй — распадается на сумму членов, каждый из которых есть не что иное, как энергия гармонического осциллятора с частотой  $\omega_p$ , где

$$\omega_p^2 = \bar{\rho} p^2 \varphi_p. \quad (1.9)$$

Мы видим, таким образом, что всякое малое колебание жидкости распадается на элементарные колебания — элементарные возбуждения, описываемые уравнениями для гармонического осциллятора.

В квантовом случае энергия каждого такого осциллятора выражается формулой

$$\varepsilon_p = \omega_p \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Возникающая структура спектра системы полностью соответствует описанной выше картине элементарных возбуждений. Спектр системы представляет собой суммы энергий различного числа элементарных возбуждений; зависимость энергии элементарного возбуждения  $\varepsilon(p)$  от импульса определяется при этом формулой (1.9) и очевидным соотношением

$$\varepsilon(p) = \omega_p.$$

Для окончательного решения задачи нам необходимо выразить  $\varphi_p$  через характеристики системы. Для этого заметим, что в квантовом случае энергия основного состояния системы не совпадает, как в классическом, с  $E^{(1)}(\bar{\rho})$ , ибо при этом следует еще учитывать энергию так называемых нулевых колебаний осцилляторов, равную для каждого осциллятора, как известно,  $\omega_p/2$ . Таким образом, энергия основного состояния бозе-жидкости равна

$$E_0 = E^{(1)}(\bar{\rho}) + \sum_p \frac{\omega_p}{2},$$

причем (см. (1.8))

$$V \frac{\omega_p}{2} = \frac{1}{2\bar{\rho}p^2} |\dot{\bar{\rho}}_p|^2 + \frac{1}{2} \varphi_p |\bar{\rho}_p|^2 = \varphi_p |\bar{\rho}_p|^2. \quad (1.10)$$



Из (1.9) и (1.10) мы немедленно получаем <sup>1)</sup>:

$$\varepsilon(p) = \omega_p = \frac{p^2}{2mS(p)}, \quad (1.11)$$

где  $S(p) = \frac{|\rho_p|^2}{Vm\rho}$  есть фурье-компонента так называемой функции корреляции плотности

$$S(r-r') = \frac{[n(r) - \bar{n}][n(r') - \bar{n}]}{\bar{n}}. \quad (1.12)$$

Здесь  $n(r) = \rho(r)/m$  — число частиц в единице объема.

Хотя величину  $S(p)$  и невозможно вычислить, формула (1.11) позволяет сделать целый ряд очень важных заключений о виде  $\varepsilon(p)$ . С другой стороны, зная некоторые общие свойства спектра  $\varepsilon(p)$ , мы можем судить о поведении  $S(p)$ , которая определяет собой процессы взаимодействия жидкости с различными частицами (нейтронами и т. д.; см. ниже, гл. III, § 17).

В области малых импульсов энергия возбуждения, как уже упоминалось выше, линейно зависит от импульса:  $\varepsilon \approx up$ . Отсюда следует, что и  $S(p)$  также линейно зависит от импульса  $S \approx \frac{p}{2mu}$ .

В области малых расстояний, или, что то же самое, больших импульсов, функция  $S(r)$  имеет, как известно (см. [1], § 114), вид

$$S(r) = \delta(r) + v(r), \quad (1.13)$$

где  $v(r)$  не имеет особенностей при  $r \rightarrow 0$ . В фурье-компонентах мы тогда имеем:

$$S(p) = 1 + v(p),$$

$v(p) \rightarrow 0$  при  $p \rightarrow \infty$ . Таким образом, при больших импульсах  $S(p)$  стремится к единице и

$$\varepsilon(p) \approx \frac{p^2}{2m},$$

<sup>1)</sup> Формула (1.11) была впервые получена Р. Файнманом [5] другим способом. Его вывод существенно сложнее и с нашей точки зрения не является более общим, чем изложенный выше.

т. е. энергия элементарного возбуждения совпадает с энергией свободного атома жидкости (атома  $\text{He}^4$ ).

При промежуточных значениях импульса функция  $S(p)$  может или монотонно возрасть от нуля до единицы при возрастании  $p$ , либо может иметь максимум при значении

$p \sim \frac{1}{a}$ , где  $a$  — межатомные расстояния (это следует из соображений размерности, поскольку в задаче о жидкости есть только единственный параметр размерности длины — межатомное расстояние). В последнем случае спектр элементарных возбуждений может иметь вид, как на рис. 1. Впервые гипотеза о том, что спектр возбуждений жидкого  $\text{He}^4$  имеет минимум при

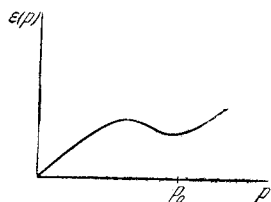


Рис. 1.

$p \sim \frac{1}{a}$ , была высказана Л. Д. Ландау [2, 3].

Следует отметить, что произведенный вывод формулы (1.11) основан на гидродинамическом приближении, при котором жидкость рассматривается как сплошная среда. Это приближение становится неправильным в тех случаях, когда существенны расстояния порядка межатомных, или импульсы порядка  $1/a$ . Поэтому формула (1.11), правильная при малых импульсах, должна рассматриваться как интерполяция между областью малых импульсов и областью предельно больших импульсов, при которых частицы фактически являются свободными и элементарные возбуждения совпадают с частицами, т. е. обладают энергией  $p^2/2m$ .

Спектр элементарных возбуждений в жидком  $\text{He}^4$ , разумеется, не может быть рассчитан во всех деталях. Наиболее точные кривые зависимости  $\varepsilon(p)$  были получены в последнее время из экспериментов по рассеянию нейтронов в  $\text{He}^4$  [6].

Знание энергетического спектра позволяет вычислить термодинамические функции жидкого  $\text{He}^4$  (точнее, разность их значений при данной температуре и при  $T=0$ ). При этом, в зависимости от величины  $T$ , наибольшую роль будут играть различные участки спектра (см. рис. 1).

В области самых низких температур наибольшее значение имеет часть спектра при малых  $p$ , т. е. фононы. При более высоких температурах наиболее существенными становятся

возбуждения в окрестности минимума  $\varepsilon(p)$  (при  $p = p_0$ ). Разлагая энергию  $\varepsilon$  по степеням  $p - p_0$ , получаем<sup>1)</sup>:

$$\varepsilon(p) = \Delta + \frac{1}{2m^*} (p - p_0)^2. \quad (1.14)$$

Элементарные возбуждения в этой части энергетического спектра называются «ротонами».

Все термодинамические величины будут слагаться из «фононной» и «ротонной» частей. Для нахождения термодинамического потенциала достаточно подставить (1.1), (1.14) в формулу (см. [1], § 53)

$$\Omega = VT \int \ln \left( 1 - e^{\frac{\mu - \varepsilon(p)}{T}} \right) \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (1.15)$$

При этом надо иметь в виду следующие обстоятельства. Во-первых, число возбуждений не является заданным, а само определяется из условия равновесия — минимума свободной энергии по отношению к изменению числа частиц; это дает:

$$\left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{V, T} = \mu = 0 \quad (F = \Omega + \mu N). \quad (1.16)$$

При  $\mu = 0$  потенциал  $\Omega$  совпадает со свободной энергией  $F$ . Во-вторых, ввиду того, что энергия ротонов всегда велика по сравнению с теми температурами, о которых идет речь, бозевское распределение для ротонов может быть заменено распределением Больцмана. Это связано с тем, что в случае  $T \ll \varepsilon_{\text{рот}}$  при вычислении интеграла в (1.15) достаточно ограничиться первым членом разложения  $\ln(1 - e^{-\varepsilon_{\text{рот}}/T})$  по малой величине  $e^{-\varepsilon_{\text{рот}}/T}$ , откуда и следует больцмановская формула

$$F_{\text{рот}} = -VT \int e^{-\frac{\varepsilon_{\text{рот}}}{T}} \frac{dp}{(2\pi)^3}.$$

<sup>1)</sup> Численные значения констант, входящих в эту формулу, для  $\text{He}^4$  равны [6]

$\Delta = 11,4 \cdot 10^{11} \text{ сек}^{-1}$ ,  $p_0 = 1,92 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$ ,  $m^* = 0,16 m_{\text{He}^4}$ .

С учетом этих замечаний находим:

$$F_{\phi} = -V \frac{\pi^2 T^4}{90u^3}, \quad (1.17)$$

$$F_{\text{рот}} = -V \frac{2m^{*1/2} T^{3/2} p_0^2}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\Delta}{T}}.$$

Отсюда нетрудно получить и все остальные термодинамические величины.

**3. Сверхтекучесть.** Наиболее интересным свойством бозе-жидкости является свойство «сверхтекучести», т. е. способность протекать по капиллярным трубкам без трения. Л. Д. Ландау [2] показал, что это свойство следует из предложенной им формы спектра возбуждений.

Рассмотрим бозе-жидкость при абсолютном нуле, текущую по капилляру со скоростью  $v$ . В системе, связанной с жидкостью, она покоится, а капилляр движется со скоростью  $-v$ . Наличие трения между жидкостью и стенкой приведет к тому, что жидкость начнет увлекаться стенками капилляра. Это означает, что у жидкости появляются отличные от нуля импульс и энергия. Это возможно только в том случае, если в ней появятся элементарные возбуждения. При появлении одного такого возбуждения жидкость приобретает импульс  $p$  и энергию  $\epsilon(p)$ . Перейдем обратно в систему координат, связанную с капилляром. Энергия жидкости в этой системе окажется равной

$$\epsilon + pv + \frac{Mv^2}{2}.$$

Таким образом, появление возбуждения меняет энергию жидкости на величину  $\epsilon + pv$ . Для того чтобы такое возбуждение могло появиться, надо, чтобы это изменение было отрицательным, т. е.

$$\epsilon + pv < 0.$$

Эта величина имеет минимальное значение, когда  $p$  и  $v$  направлены в противоположные стороны. Таким образом, во всяком случае необходимо, чтобы  $\epsilon - pv < 0$ , т. е.  $v > \frac{\epsilon}{p}$ . Наконец, для того чтобы в жидкости вообще могли рождаться

возбуждения, надо, чтобы скорость удовлетворяла условию

$$v > \left( \frac{\varepsilon}{p} \right)_{\min}. \quad (1.18)$$

Минимальному значению  $\varepsilon/p$  соответствует точка кривой  $\varepsilon(p)$ , в которой

$$\frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{\varepsilon}{p}, \quad (1.19)$$

т. е. точка, где прямая, проведенная из начала координат, касается кривой  $\varepsilon(p)$ .

Таким образом, сверхтекучее течение может осуществляться только в том случае, если скорость жидкости меньше скорости элементарного возбуждения в точках, удовлетворяющих условию (1.19). (Напомним, что  $\frac{d\varepsilon}{dp}$  есть скорость элементарного возбуждения.)

Для всякой бозе-жидкости всегда существует, по крайней мере, одна точка, в которой условие (1.19) выполняется. Эта точка — начало координат  $p=0$ . Поскольку при  $p$ , близких к нулю, возбуждения движутся со скоростью звука, условие сверхтекучести заведомо нарушается при скоростях течения, превышающих скорость звука  $u$ .

В спектре возбуждений жидкого  $\text{He}^4$  существует еще одна опасная точка. Из вида кривой на рис. 1 ясно, что она лежит правее ротонного минимума. Воспользовавшись (1.14), легко находим, что скорость сверхтекучего течения должна быть:

$$v < \frac{1}{m^*} (V \sqrt{p_0^2 + 2m^* \Delta} - p_0)$$

или, если учесть численные значения для постоянных (из которых видно, что  $p_0^2 \gg 2m^* \Delta$ ),

$$v < \frac{\Delta}{p_0}.$$

Окончательно, мы приходим к выводу, что движение в  $\text{He}^4$  заведомо не будет сверхтекучим при скоростях, превышающих  $\Delta/p_0$ .

При температурах, отличных от нуля, в бозе-жидкости появляются возбуждения. Нетрудно видеть, что это не меняет

приведенного выше рассуждения о возможности появления новых возбуждений при течении. Интересно, однако, понять, какое влияние на движение жидкости оказывают уже имеющиеся в ней возбуждения.

Для этого представим себе, что «газ элементарных возбуждений» движется в жидкости с некоторой макроскопической скоростью  $\mathbf{v}$ . Функция распределения в этом случае получается из функции распределения покоящегося газа заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}$ . Импульс газа, отнесенный к единице объема, получается из интеграла

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p} n (\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (1.20)$$

При малых скоростях  $n(\varepsilon - \mathbf{p}\mathbf{v})$  можно разложить по  $\mathbf{p}\mathbf{v}$ . В результате получаем:

$$\mathbf{P} = - \int \mathbf{p} (\mathbf{p}\mathbf{v}) \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = - \frac{\mathbf{v}}{3} \int p^2 \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (1.21)$$

Из (1.21) следует, что импульс движущегося газа возбуждений  $\mathbf{P}$  пропорционален скорости движения  $\mathbf{v}$ . Коэффициент пропорциональности между  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{v}$ , очевидно, представляет собой массу движущегося тела. Таким образом, мы видим, что движение газа возбуждений относительно жидкости сопровождается переносом массы. Отдельные возбуждения могут, разумеется, взаимодействовать со стенками, рассеиваться на них. При рассеянии возбуждений происходит обмен импульсом между газом возбуждений и стенкой. Это означает, что движение газа возбуждений будет вязким. Поскольку, как мы только что видели, движение газа возбуждений сопровождается переносом массы, мы приходим к выводу, что в бозе-жидкости, в которой уже есть возбуждения, может иметь место вязкое течение, причем со скоростями, при которых заведомо не происходит нарушения условия сверхтекучести (1.18). Существенно, однако, что вязкое движение сопровождается переносом массы, отнюдь не совпадающей с массой всей жидкости; эта масса определяется соотношением (1.21) и зависит от числа возбуждений (в частности, при  $T=0$ ,  $\mathbf{P}=0$ ).

Рассмотрим теперь общую картину движения бозе-жидкости, когда скорость движения такова, что условие сверхтекучести не нарушено.

Начнем с абсолютного нуля температуры. Если жидкость в начальный момент находилась в основном состоянии, т. е. возбуждения в ней отсутствовали, то они не могут появиться и в дальнейшем и движение будет сверхтекучим.

При  $T \neq 0$  картина существенно меняется. Теперь в жидкости имеются возбуждения, число которых определяется соответствующими формулами статистики. Хотя новых возбуждений появиться не может, ничто, как уже говорилось выше, не мешает уже существующим возбуждениям сталкиваться со стенкой, обмениваясь с ней импульсом. В этом вязком движении будет участвовать только часть массы жидкости в соответствии с (1.21). Оставшаяся часть массы жидкости будет по-прежнему двигаться без трения со стенкой и с частью жидкости, участвующей в вязком течении. Таким образом, бозе-жидкость при  $T \neq 0$  представляет собой как бы смесь двух жидкостей — «сверхтекучей» и «нормальной», движущихся без трения друг относительно друга.

В действительности, конечно, такого разделения не происходит, а просто в жидкости имеют место два движения, каждому из которых соответствует своя эффективная масса или плотность. «Нормальная» плотность представляет собой коэффициент пропорциональности между импульсом единицы объема движущегося газа возбуждений и его скоростью. Подставляя в (1.21) формулу бозе-распределения с  $\epsilon = u p$ , а затем распределение Больцмана с  $\epsilon$  из (1.14), можно найти фононную и ротонную части нормальной плотности:

$$\rho_{n\phi} = \frac{2\pi^2 T^4}{45 u^5}, \quad (1.22)$$

$$\rho_{nr} = \frac{2m^{*1/2} p_0^4 e^{-\frac{\Delta}{T}}}{3(2\pi)^{3/2} T^{1/2}}.$$

Оставшаяся часть плотности жидкости  $\rho_s$  соответствует сверхтекучему движению. Таким образом,

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (1.23)$$

Макроскопическую скорость газа возбуждений обозначим через  $\mathbf{v}_n$ . Скорость сверхтекучей жидкости обозначим через  $\mathbf{v}_s$ . Эта скорость обладает одним существенным свойством. Если поместить бозе-жидкость в цилиндр и вращать его вокруг

оси, то нормальная часть будет увлечена стенками цилиндра и начнет вращаться вместе с ним. Наоборот, сверхтекучая часть будет покоиться. Таким образом, сверхтекучую часть нельзя привести во вращение. Иначе говоря, движение сверхтекучей части всегда потенциально. Математически это выражается условием

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_s = 0. \quad (1.24)$$

Движение сверхтекучей части жидкости играет роль внешних условий для возбуждений. Следует отметить, что именно в системе отсчета, связанной со сверхтекучей частью, функция  $\varepsilon(p)$  имеет ту форму, о которой говорилось выше. В покоящейся системе, очевидно, получим:

$$\varepsilon' = \varepsilon(p) + p\mathbf{v}_s, \quad (1.25)$$

где  $p$  — импульс в системе отсчета, связанной со сверхтекучей жидкостью.

Это надо учитывать при написании кинетического уравнения для возбуждений, которое, следовательно, будет иметь вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial \mathbf{r}} = I(n), \quad (1.26)$$

где  $I(n)$  — интеграл столкновений.

Наличие двух типов движений в бозе-жидкости с двумя различными скоростями приводит к весьма своеобразной гидродинамике. Уравнения гидродинамики можно получить из кинетического уравнения (1.26). Этот вывод (мы его здесь приводить не будем) был проделан И. М. Халатниковым и изложен в его обзоре [7] <sup>1)</sup>.

Двухскоростная гидродинамика бозе-жидкости во многом отличается от обычной гидродинамики. В частности, оказывается, что в бозе-жидкости могут происходить колебания двух различных типов с разными скоростями распространения.

Колебания первого типа представляют собой обычный звук, или, как говорят, первый звук. В волне такого звука жидкость движется как целое; нормальная и сверхтекучая

<sup>1)</sup> Уравнения гидродинамики сверхтекучего  $\text{He}^4$ , справедливые при не слишком больших скоростях движения, были впервые получены Л. Д. Ландау [2].



части не разделяются. Скорость распространения первого звука равна  $u$ . Колебания второго типа — так называемый второй звук — распространяются со скоростью

$$u_2 = \sqrt{\frac{\rho_s T S^2}{\rho_n \rho C}}, \quad (1.27)$$

где  $C$  и  $S$  — соответственно, теплоемкость и энтропия единицы объема. В такой волне нормальная и сверхтекучая части жидкости колеблются в противофазе, причем так, что полный поток жидкости  $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \approx 0$ .

Мы не будем более подробно останавливаться на вопросах, касающихся гидродинамики сверхтекучей жидкости. Распространение звука в жидком  $\text{He}^4$ , а также процессы взаимодействия возбуждений, приводящие к различным диссипативным явлениям (вязкости, теплопроводности и т. д.), разобраны в многочисленных специальных работах и подробно изложены в обзорах Е. М. Лифшица [8] и И. М. Халатникова [7], к которым мы и отсылаем читателя.

Посмотрим теперь, что можно сказать о поведении бозевской жидкости при более высоких температурах, когда число возбуждений в ней становится большим. В этом случае уже нельзя пренебречь взаимодействием между возбуждениями, и наши представления о возбуждениях как о газе свободных частиц перестают соответствовать действительности. Тем самым теряют смысл формулы (1.17) для термодинамических величин, вычисленные для газовой модели. Равным образом это относится и к формулам (1.22) для нормальной плотности. Однако представление о двух типах движения в бозе-жидкости, происходящих с соответствующими эффективными плотностями, не связано непосредственно с рассмотренной выше картиной возбужденного состояния, и можно считать, что это представление сохранится для сравнительно высоких температур. То же самое относится к уравнениям гидродинамики, являющимся фактически следствиями только законов сохранения, из которых они могут быть выведены (см. [7]). По мере роста температуры нормальная плотность  $\rho_n$  будет расти до тех пор, пока она не достигнет значения, равного  $\rho$ . В этой точке в гелии происходит фазовый переход (так называемая  $\lambda$ -точка). Ниже точки перехода возможно сверхтекучее движение,

выше этой точки его уже нет и гидродинамика бозе-жидкости не отличается от обычной.

Переход от  $\rho_n \neq \rho$  к  $\rho_n = \rho$  в принципе мог бы быть как непрерывным, так и скачкообразным. Из эксперимента следует, что фазовый переход в гелии является переходом второго рода и не сопровождается выделением или поглощением скрытой теплоты (см. [9], § 130). Отсюда следует, что нормальная плотность  $\rho_n$  непрерывно растет при повышении температуры и в точке перехода делается равной  $\rho$ .

Намного выше  $\lambda$ -точки гелий не обладает никакими особенностями по сравнению с обычной жидкостью. Что же касается окрестности  $\lambda$ -точки, то здесь есть основания ожидать целого ряда существенно новых свойств. Вопрос о поведении различных характеристик систем, в первую очередь их термодинамических функций, в окрестности точки фазового перехода второго рода в настоящее время еще не решен и представляет собой одну из интереснейших проблем физики конденсированных сред.

## § 2. Ферми-жидкость

**1. Возбуждения в ферми-жидкости.** Рассмотрим систему из взаимодействующих частиц, подчиняющихся статистике Ферми. Мы ограничимся случаем, когда спин частиц равен  $1/2$ , поскольку фактически речь может идти только о жидком  $\text{He}^3$ , об электронах в металлах или об ядерной материи. Систему взаимодействующих фермиевских частиц со спином  $1/2$  мы будем называть ферми-жидкостью.

Теория слабо возбужденных состояний ферми-жидкости была построена Л. Д. Ландау [10, 11]. В основе этой теории лежит предположение о том, что спектр возбуждений ферми-жидкости строится по тому же принципу, что и спектр идеального ферми-газа. Поэтому, прежде чем перейти к ферми-жидкости, имеет смысл связать известную картину возбужденного состояния ферми-газа с представлением об элементарных возбуждениях.

В основном состоянии идеального ферми-газа при  $T=0$ , как известно, частицы заполняют все квантовые состояния с импульсами, меньшими некоторого граничного значения  $p_0$ , а все состояния с большими импульсами не заполнены. В импульсном пространстве заполненные состояния образуют

сферу с радиусом  $p_0$ , называемую ферми-сферой. Величина  $p_0$  определяется из условия, чтобы число состояний с  $p < p_0$  было равно числу частиц:

$$p_0 = \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3}, \quad (2.1)$$

где  $N/V$  — плотность частиц.

В возбужденном состоянии распределение частиц по импульсам будет иным. Нетрудно видеть, что всякое такое состояние может быть построено из основного путем последовательного перевода частиц из внутренней части ферми-сферы наружу. При каждом таком элементарном акте получается состояние, отличающееся от исходного наличием частицы в состоянии с  $p > p_0$  и «дырки» с  $p < p_0$ . Вот эти частицы с  $p > p_0$  и дырки с  $p < p_0$ , очевидно, и играют роль элементарных возбуждений идеального ферми-газа. Они обладают спином  $1/2$ , могут возникать и исчезать лишь парами и для слабовозбужденных состояний обладают импульсами в окрестности  $p_0$ . Энергию таких элементарных возбуждений удобно отсчитывать от ферми-границы (т. е. от  $p_0^2/2m$ ). При этом энергия возбуждений типа частиц отсчитывается от ферми-границы вверх, а энергия дырок — вниз

(т. е. энергия частиц есть  $\xi = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} \approx v(p - p_0)$ ,  $v = \frac{p_0}{m}$ , а энергия дырок равна  $-\xi = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \approx v(p_0 - p)$ ).

В теории Л. Д. Ландау предполагается, что слабовозбужденное состояние ферми-жидкости обладает большим сходством со слабовозбужденным состоянием ферми-газа. Оно может быть описано с помощью совокупности элементарных возбуждений со спином  $1/2$  и импульсами в окрестности  $p_0$ . Существенным для теории Ландау является предположение о том, что величина  $p_0$  связана с плотностью числа частиц жидкости той же формулой (2.1), что и в случае идеального газа (доказательство этого утверждения будет дано в гл. IV). Так же как и в газе, возбуждения в жидкости бывают двух типов — «частицы» с импульсом, большим  $p_0$ , и «дырки» с импульсом, меньшим  $p_0$ , которые могут появляться и исчезать только парами. Отсюда следует, что количество «частиц» обязательно должно равняться числу «дырок».

Несмотря на большое сходство между возбуждениями в ферми-жидкости и в идеальном ферми-газе, между ними существуют и важные различия, которые происходят от того, что возбуждения в жидкости взаимодействуют между собой. Наиболее ярким проявлением этого взаимодействия является существование сверхтекучих (или сверхпроводящих, если речь идет об электронах в металле) ферми-жидкостей. Нетрудно видеть, что рассмотренный выше спектр возбуждений ферми-газа не приводит к сверхтекучести. Действительно, для возбуждения ферми-газа, т. е. для образования «частицы» с  $p > p_0$  и «дырки» с  $p < p_0$ , достаточно сколь угодно малой энергии. В то же время суммарный импульс этой пары может достигать значения  $2p_0$ . Ввиду этого  $\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{\min} = 0$  и, согласно формуле (1.18), отсюда следует нулевая критическая скорость, иначе говоря, отсутствие сверхтекучести. Появление сверхтекучести связано с тем, что определенный тип взаимодействия квазичастиц приводит к радикальной перестройке спектра. В частности, оказывается, что возбуждение такой ферми-жидкости требует затраты энергии, которая не может быть сделана меньше некоторой определенной величины. В таких случаях принято говорить, что в спектре возбуждений имеется щель.

Мы не будем пока касаться сверхтекучих ферми-жидкостей (им будет посвящена гл. VII), а перейдем к рассмотрению свойств возбуждений нормальных ферми-систем.

Взаимодействие между возбуждениями приводит к тому, что само представление об элементарных возбуждениях имеет смысл только вблизи граничного импульса  $p_0$ . Как уже было отмечено выше, об элементарных возбуждениях можно говорить лишь в том случае, если их затухание мало по сравнению с энергией. Величина затухания определяется либо процессами распада одного возбуждения на несколько других, либо столкновениями возбуждений друг с другом. Если энергия возбуждения велика по сравнению с температурой жидкости, то главную роль играют процессы распада, и величина затухания пропорциональна вероятности этих процессов. Учитывая законы сохранения энергии и импульса, а также условия равенства числа «частиц» и числа «дырок», нетрудно увидеть, что вероятность распада

пропорциональна  $(p - p_0)^2$ <sup>1)</sup>. С другой стороны, энергия возбуждения пропорциональна  $p - p_0$ . Отсюда ясно, что затухание будет относительно малым только для возбуждений с импульсами в окрестности  $p_0$ .

Если речь идет о равновесной ферми-жидкости при конечных температурах, то средняя энергия «частиц» и «дырок» будет порядка  $T$ . Ввиду того, что возбуждения подчиняются статистике Ферми, число их также будет пропорционально  $T$ . Нетрудно увидеть, что для таких возбуждений вероятности распада и рассеяния будут одного порядка, т. е. обе будут пропорциональны  $T^2$ <sup>2)</sup>. Отсюда следует, что описание ферми-жидкости с помощью элементарных возбуждений применимо только при достаточно низких температурах.

<sup>1)</sup> Для оценки вероятности удобно воспользоваться аналогией с ферми-газом. Рассмотрим такой процесс: частица с импульсом  $p_1$  ( $p_1 > p_0$ ) взаимодействует с одной из частиц внутри ферми-сферы с импульсом  $p_2$  ( $p_2 < p_0$ ). В результате получаются две частицы с импульсами  $p_3$  и  $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$ , причем  $p_3, p_4 > p_0$ . Таким образом, частица с импульсом  $p_1$  «распалась» на частицы с импульсами  $p_3$  и  $p_4$  и дырку с импульсом  $p_2$ . Полная вероятность такого процесса пропорциональна

$$\int \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) dp_2 dp_3,$$

$$p_2 < p_0, p_3 > p_0, p_4 = |p_1 + p_2 - p_3| > p_0.$$

Нетрудно видеть, что при  $p_1 - p_0 \ll p_0$  допустимые области изменения модулей векторов  $p_2$  и  $p_3$  таковы:

$$p_0 < p_3 < p_1 + p_2 - p_0, \quad 2p_0 - p_1 < p_2 < p_0.$$

Угол между  $p_1$  и  $p_2$  может быть любым. При этом угол между  $p_3$  и  $p_1 + p_2$  определяется из условия сохранения энергии, и интеграл по этому углу уничтожает  $\delta$ -функцию. Остающийся интеграл по  $dp_2 dp_3$  берется вблизи  $p_2 \approx p_3 \approx p_0$  и дает множитель  $(p_1 - p_0)^2$ .

<sup>2)</sup> Для почти идеального ферми-газа эти процессы представляют собой, по сути дела, одно и то же явление, и соответствующая вероятность пропорциональна

$$\int \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4) n(\varepsilon_2) (1 - n(\varepsilon_3)) (1 - n(\varepsilon_4)) dp_2 dp_3.$$

Формально можно считать, что при  $|p_2| > p_0$  речь идет о рассеянии, а при  $|p_2| < p_0$  — о распаде. При  $\varepsilon_1 - \mu \sim T$  интеграл в обоих случаях пропорционален  $T^2$ .

Свойства энергетического спектра ферми-жидкости можно сделать более наглядными с помощью модели, основанной на аналогии с ферми-газом. Представим себе, что основному состоянию жидкости соответствует совокупность квазичастиц, заполняющих ферми-сферу с граничным импульсом  $p_0$ . Соотношение (2.1) можно интерпретировать как равенство числа квазичастиц числу частиц жидкости. Возбуждения в такой модели полностью соответствуют концепции «частиц» и «дырок». В частности, равенство числа «частиц» числу «дырок» выражается как сохранение числа квазичастиц в этой модели. Если ввести функцию распределения квазичастиц  $n(p)$ , то ее изменения будут ограничены условием

$$\int \delta n \, d\mathbf{p} = 0. \quad (2.2)$$

Описанная газовая модель удобна для дальнейшего изучения свойств ферми-жидкости. Однако необходимо помнить, что само понятие квазичастиц имеет смысл только в окрестности поверхности ферми-сферы. Отсюда следует, что все свойства газовой модели, для которых существенную роль играют квазичастицы, далекие от поверхности, не соответствуют реальной ферми-жидкости.

**2. Энергия квазичастиц.** Кроме сделанных выше предположений о характере элементарных возбуждений, теория Л. Д. Ландау базируется еще на одном допущении, которое касается взаимодействия квазичастиц. Предполагается, что это взаимодействие может быть описано с помощью самосогласованного поля, действующего на квазичастицу со стороны окружающих квазичастиц.

При этом энергия системы уже не будет равна сумме энергий отдельных квазичастиц, а будет функционалом от их функции распределения. Энергию отдельной квазичастицы естественно определить как вариационную производную полной энергии по функции распределения

$$\delta E = 2 \int \varepsilon \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} V \quad (2.3)$$

(множитель 2 происходит от суммирования по проекциям спина).

Действительно, из этой формулы видно, что  $\epsilon$  есть не что иное, как изменение энергии системы при добавлении одной квазичастицы с импульсом  $p$ <sup>1)</sup>.

В формулах (2.2) и (2.3) предполагается, что распределение квазичастиц однородно по пространству. Фактически это ограничение сводится к тому, что пространственная неоднородность может иметь место только на расстояниях, заметно превышающих длину волны квазичастиц. Поскольку мы рассматриваем только возбуждения в окрестности ферми-границы, т. е. с импульсами, близкими к  $p_0$ , то из формулы (2.1) следует, что соответствующая длина волны порядка межатомных расстояний. Таким образом, требование пространственной однородности практически не вносит никаких ограничений.

При наличии магнитного поля, а также в случае ферромагнитной системы функцию распределения следует считать оператором, действующим на спиновые индексы (матрицей плотности), —  $n_{\alpha\beta}$ . Вместе с  $n_{\alpha\beta}$  оператором является и энергия квазичастицы  $\epsilon_{\alpha\beta}$ . В случае, когда отсутствует магнитное поле и система не является ферромагнитной, операторы  $n_{\alpha\beta}$  и  $\epsilon_{\alpha\beta}$  пропорциональны единичной матрице. Поэтому в общем случае формулу (2.3) следует записать в виде

$$\delta\left(\frac{E}{V}\right) = \sum_{\alpha, \beta} \int \epsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} \frac{dp}{(2\pi)^3}.$$

Написанное выражение удобно сокращенно писать в виде

$$\delta\left(\frac{E}{V}\right) = \text{Sp}_\sigma \int \epsilon \delta n \frac{dp}{(2\pi)^3}, \quad (2.4)$$

если понимать под  $\epsilon$  и  $n$  соответствующие матрицы; знак  $\text{Sp}_\sigma$  означает, как обычно, сумму диагональных элементов произведения матриц  $\epsilon$  и  $\delta n$ .

Определение энергии квазичастиц по формуле (2.4) приводит к тому, что их равновесная функция распределения действительно является функцией Ферми. Для доказательства

---

<sup>1)</sup> Напоминаем, что  $n(p)$  есть импульсное распределение квазичастиц, т. е.  $2 \int n(p) \frac{dp}{(2\pi)^3}$  есть число квазичастиц в единице объема.

этого наиболее удобно воспользоваться известным выражением для энтропии<sup>1)</sup>

$$\frac{S}{V} = - \text{Sp}_\sigma \int [n \ln n + (1 - n) \ln(1 - n)] \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (2.5)$$

Эта формула имеет чисто комбинаторное происхождение, и ее применимость к ферми-жидкости определяется тем, что классификация уровней квазичастиц по предположению соответствует классификации уровней частиц в идеальном газе.

Из условия максимальности энтропии при соблюдении постоянства числа частиц и энергии,

$$\delta N = 0, \quad \delta E = 0,$$

можно путем варьирования по  $\delta n$  найти функцию распределения

$$n(\epsilon) = n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{T}} + 1}. \quad (2.6)$$

Энергия  $\epsilon$  здесь является функционалом от  $n$ , так что в действительности формула (2.6) является очень сложным неявным определением  $n(\epsilon)$ .

Будучи функционалом от  $n$ ,  $\epsilon$  зависит и от температуры. Эту зависимость можно представить в следующей форме. Если обозначить через  $\epsilon^{(0)}(p)$  равновесную энергию квазичастиц при  $T=0$ , то при малом отклонении от равновесия или при небольших температурах она будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \epsilon(p, \sigma) &= \epsilon^{(0)}(p, \sigma) + \delta\epsilon(p, \sigma) = \\ &= \epsilon^{(0)}(p, \sigma) + \text{Sp}_{\sigma'} \int f(p, \sigma; p', \sigma') \delta n(p', \sigma') \frac{dp'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь  $\delta n = n - n_F(T=0)$ , а  $f$  — оператор, зависящий от импульсов и операторов спина двух квазичастиц. В формуле (2.7) применены обозначения, указывающие на матричный характер входящих в него величин. Как мы уже говорили,  $\epsilon$  и  $n$  являются матрицами по спиновым переменным. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, мы записали их в виде

<sup>1)</sup> Как обычно, под  $\text{Sp}_\sigma \ln n$  мы понимаем сумму логарифмов диагональных элементов  $n_{\alpha\alpha}$ .



$\varepsilon(\mathbf{p}, \sigma)$ ,  $n(\mathbf{p}, \sigma)$ , где  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  — известные матрицы Паули, связанные с оператором спина квазичастицы  $\mathbf{s}$  соотношением  $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ . Оператор  $f$  является матрицей как по отношению к спиновым переменным, входящим в левую часть (2.7), так и по отношению к спиновым переменным оператора  $\delta n$ , стоящего под интегралом в правой части (2.7). В наиболее подробном виде (2.7) можно записать в форме

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}) + \int f_{\alpha\beta; \gamma\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\delta\gamma}(\mathbf{p}') \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

Эта формула поясняет смысл обозначения  $f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma')$ .

Определенная таким образом функция  $f$  является второй вариационной производной от энергии единицы объема по  $\delta n$  (ср. (2.7) и (2.4)), а следовательно, симметрична относительно перестановки  $\mathbf{p}, \sigma$  с  $\mathbf{p}', \sigma'$ . Функция  $f$  — очень важная характеристика ферми-жидкости. Как мы увидим ниже (см. гл. IV), она связана с амплитудой рассеяния двух квазичастиц на нулевой угол.

Зависимость функции  $f$  от спиновых переменных может быть представлена в общей форме:

$$f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') = \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \sigma_i \sigma'_k \zeta_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (2.8)$$

Если взаимодействие спинов имеет обменное происхождение<sup>1)</sup>, то второй член этой формулы будет иметь вид  $(\sigma\sigma')\zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ .

В отсутствие магнитного поля энергия квазичастиц  $\varepsilon$  не зависит от спина. Функция  $\varepsilon^{(0)}$  в (2.7) зависит только от  $p$  и может быть разложена в ряд по  $p - p_0$ :

$$\xi(p) = \varepsilon^{(0)}(p) - \mu(0) = v(p - p_0), \quad (2.9)$$

<sup>1)</sup> Обычно различают несколько типов взаимодействия частиц, зависящих от их спинов: обменное взаимодействие, связанное с возможностью перестановки одинаковых частиц; спин-орбитальное взаимодействие, происходящее от релятивистского взаимодействия движущегося магнитного момента с электрическими полями; непосредственное магнитное взаимодействие моментов. Обменное взаимодействие обычно значительно превышает все остальные виды взаимодействий. Характерным отличием обменного взаимодействия является инвариантность по отношению к поворотам полного момента системы частиц в пространстве. Таким свойством обладает скалярное произведение  $(\sigma\sigma')$ .

где  $\mu(0)$  — химический потенциал при  $T=0$ , а  $v$  — константа. Величину  $v$ , представляющую собой скорость возбуждений на ферми-границе, можно записать в виде

$$v = \frac{p_0}{m^*}, \quad (2.10)$$

где  $m^*$  — эффективная масса. Как было показано Л. Д. Ландау [10], между  $m^*$  и  $f$  существует определенная связь.

Напишем соотношение, выражающее тот простой факт, что импульс единицы объема жидкости совпадает с потоком массы. Импульс единицы объема ферми-жидкости совпадает, очевидно, с импульсом квазичастиц, т. е. равен

$$2 \int p n \frac{dp}{(2\pi)^3}.$$

С другой стороны, в силу предположения о равенстве числа частиц ферми-жидкости и числа квазичастиц поток частиц жидкости совпадает с потоком квазичастиц и равен

$$2 \int v n \frac{dp}{(2\pi)^3},$$

где  $v$  — скорость квазичастиц. Плотность потока массы получается из этого выражения просто умножением его на массу атома жидкости  $m$ . Замечая теперь, что  $v$  по определению равно  $\frac{\partial \epsilon}{\partial p}$ , запишем условие равенства импульса и потока массы в виде

$$\int p n \frac{dp}{(2\pi)^3} = m \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p} n \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (2.11)$$

Проварьируем (2.11) по  $n$ , учтя, что происходящее при этом изменение энергии  $\epsilon$  связано с  $\delta n$  соотношением (2.7), которое в случае отсутствия магнитного поля (т. е. при  $n$  и  $\epsilon$ , не зависящих от спина) можно записать в виде

$$\delta \epsilon = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f(p, \sigma; p', \sigma') \delta n' \frac{dp'}{(2\pi)^3}.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \int \frac{p}{m} \delta n \frac{dp}{(2\pi)^3} &= \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta n \frac{dp}{(2\pi)^3} + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int n \delta n' \frac{\partial}{\partial p} f(p, \sigma; p', \sigma') dp \frac{dp'}{(2\pi)^6}. \end{aligned}$$

Во втором интеграле проинтегрируем по  $\mathbf{p}$  по частям и переобозначим переменные  $\mathbf{p}\sigma \rightleftharpoons \mathbf{p}'\sigma'$

$$\int \frac{\mathbf{p}}{m} \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} - \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma} \text{Sp}_{\sigma'} \int \int \delta n f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') \frac{\partial n'}{\partial \mathbf{p}'} \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{p}'}{(2\pi)^6}.$$

В силу произвольности  $\delta n$  отсюда сразу получается:

$$\frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') \frac{\partial n'}{\partial \mathbf{p}'} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

При  $T=0$  энергия  $\varepsilon$  вблизи поверхности Ферми имеет вид (2.9), а  $\frac{\partial n'}{\partial \mathbf{p}'} \approx -\frac{\mathbf{p}'}{p'} \delta(p' - p_0)$ . Заметив, что в силу изотропности жидкости  $f$  зависит только от угла  $\chi$  между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , находим:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{p_0}{2(2\pi)^3} \text{Sp}_{\sigma} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\chi) \cos \chi d\Omega, \quad (2.12)$$

где  $f(\chi)$  — значение  $f$  при  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = p_0$ . Интегрирование в (2.12) производится по направлениям вектора  $\mathbf{p}'$ . Это соотношение связывает массу атома жидкости с эффективной массой квазичастиц. Оно сохраняет, с точностью до малых поправок, свою силу и при достаточно низких температурах.

Теплоемкость ферми-жидкости выражается через  $m^*$  по обычной формуле для ферми-газа. Действительно, согласно (2.3), имеем для теплоемкости на единицу объема

$$C_V = \left( \frac{\partial (E/V)}{\partial T} \right)_{N, V} = 2 \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_N \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.13)$$

Нетрудно показать, что замена  $\varepsilon$  на  $\varepsilon^{(0)}$  в подынтегральном выражении дает относительную ошибку порядка  $(T/\mu(0))^3$ . Таким образом, в линейном по  $T$  приближении мы получаем обычную газовую формулу

$$C_V = \frac{1}{3} m^* p_0 T. \quad (2.14)$$

Той же формулой выражается и энтропия при низких температурах <sup>1)</sup>.

**3. Звук.** Так же как и в бозе-жидкости, распространение звука в ферми-жидкости имеет ряд специфических особенностей (хотя и других, чем в бозе-жидкости). Если рассматривать звук заданной частоты, то при не слишком низких температурах его распространение происходит по законам обычной гидродинамики. Затухание звука будет при этом пропорционально времени между столкновениями возбуждений  $\tau$ . При понижении температуры вероятность столкновений будет уменьшаться пропорционально квадрату размытия ферми-распределения, а следовательно, время столкновений будет увеличиваться по закону  $T^{-2}$ . При температурах, когда  $\tau$  становится порядка  $1/\omega$ , звук вообще перестает распространяться.

Однако оказывается, что при дальнейшем понижении температуры опять появляется возможность распространения звука. При этом скорость его будет, вообще говоря, иной, и он уже не будет представлять собой просто волну сжатия и разрежения. Это явление было предсказано Л. Д. Ландау [11] и названо им «нулевым звуком». Ввиду того, что в определении природы звука существенно лишь соотношение между  $\omega$  и  $\tau$ , эти два звука могут быть охарактеризованы как низкочастотный звук ( $\omega\tau \ll 1$ ) и высокочастотный звук ( $\omega\tau \gg 1$ ).

Скорость звука при не слишком низких температурах, когда соблюдается условие  $\omega\tau \ll 1$ , определяется обычным образом через сжимаемость. При этом оказывается, что она существенным образом зависит от функции  $f$  [10].

Сжимаемость удобно выразить через производную химического потенциала по числу частиц  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$ . Пользуясь тем, что химический потенциал зависит лишь от  $N/V$ , находим:

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = -\frac{V^2}{N^2} \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial \left(\frac{N}{V}\right)} \quad (2.15)$$

<sup>1)</sup> Формулой (2.13) можно воспользоваться для определения  $m^*$  из экспериментальных данных о теплоемкости. Импульс  $p_0$  согласно (2.1) определяется из плотности жидкости. Для жидкого  $\text{He}^3$ , таким образом, находим (см. [12, 13]):

$$p_0 = 0,76 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad m^* = 2m_{\text{He}^3}.$$

( $P$  — давление). Отсюда сразу следует связь между  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$  и  $u^2$ :

$$u^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \left( \frac{mN}{V} \right)} = \frac{1}{m} N \frac{\partial \mu}{\partial N}. \quad (2.16)$$

Производная  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$  вычисляется следующим образом. Ввиду того, что  $\mu \approx \varepsilon(p_0)$ , изменение  $\mu$  происходит как вследствие изменения  $p_0$ , так и вследствие изменения вида функции  $\varepsilon(p)$ :

$$\delta \mu = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_\sigma' \int f \delta n' \frac{dp'}{(2\pi)^3} + \frac{\partial \varepsilon^{(0)}(p_0)}{\partial p_0} \delta p_0. \quad (2.17)$$

(Мы считаем, что магнитное поле отсутствует.) Согласно (2.1), изменения  $\delta N$  и  $\delta p_0$  связаны соотношением

$$\delta N = \frac{1}{\pi^2} p_0^2 \delta p_0 V.$$

Так как в интеграле формулы (2.17) существенны лишь изменения  $\delta n$  вблизи ферми-границы, то можно произвести интегрирование по абсолютной величине импульса. Это дает:

$$\int f \delta n' \frac{dp}{(2\pi)^3} = \frac{\delta N}{8\pi V} \int f d\Omega.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \frac{1}{16\pi V} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_\sigma' \int f d\Omega + \frac{\pi^2}{p_0 m^* V}. \quad (2.18)$$

Используя выражение (2.12) для эффективной массы и соотношение (2.1), находим:

$$u^2 = \frac{p_0^2}{3m^2} + \frac{1}{6m} \left( \frac{p_0}{2\pi} \right)^3 \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_\sigma' \int f(\chi) (1 - \cos \chi) d\Omega. \quad (2.19)$$

Таким образом, в области частот  $\omega \tau \ll 1$  скорость звука определяется (2.19). Она отличается от скорости звука при отсутствии взаимодействия  $u^2 = \frac{p_0^2}{3m^2}$ .

Для изучения распространения звука в области частот  $\omega \tau \gg 1$  мы воспользуемся обычным кинетическим уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = I(n), \quad (2.20)$$

где  $I(n)$  — интеграл столкновений. При малом отклонении от равновесия функцию распределения можно представить в виде

$$n = n_F + \delta n,$$

где  $n_F$  — равновесная функция, а  $\delta n$  — малая добавка, являющаяся периодической функцией времени:

$$\delta n \sim e^{i(kr - \omega t)}.$$

Интеграл столкновений имеет порядок величины

$$I(n) \sim \frac{\delta n}{\tau},$$

и им можно пренебречь по сравнению с членом  $\frac{\partial n}{\partial t}$ . При линеаризации уравнения (2.20) следует иметь в виду, что  $\varepsilon$  является функционалом от  $n$ , а поэтому  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}}$  не равно нулю. Согласно (2.7),

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{r}} = \text{Sp}_{\sigma'} \int f \frac{\partial \delta n'}{\partial \mathbf{r}} \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}.$$

С учетом сделанного замечания мы получим:

$$(k\mathbf{v} - \omega) \delta n - k\mathbf{v} \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \text{Sp}_{\sigma'} \int f \delta n' \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} = 0. \quad (2.21)$$

Из вида этого уравнения следует, что  $\delta n$  пропорционально  $\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \approx -\delta(\varepsilon - \mu)$ . Обозначая  $\delta n = \frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \nu$ , получаем:

$$(k\mathbf{v} - \omega) \nu + k\mathbf{v} \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int F \nu' \frac{d\Omega'}{4\pi} = 0, \quad (2.22)$$

где

$$F(\chi) = f(\chi) \frac{p_0 m^*}{\pi^2}. \quad (2.23)$$

Если выбрать  $\mathbf{k}$  в качестве полярной оси и ввести обозначения  $\tilde{u} = \frac{\omega}{k}$  — скорость распространения волны,  $s = \frac{\tilde{u}}{v}$ , то уравнение (2.22) приобретет вид

$$(s - \cos \theta) \nu(\theta, \varphi, \sigma) = \cos \theta \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma'} \int F(\chi) \nu(\theta', \varphi', \sigma') \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (2.24)$$

Из уравнения (2.24) видно основное отличие обычного звука и звука, распространяющегося в ферми-жидкости при  $\omega\tau \gg 1$ . В первом случае функция распределения остается изотропной в системе отсчета, где жидкость как целое покоится. Это значит, что меняется радиус ферми-сферы и кроме того, ее центр колеблется относительно точки  $\mathbf{p} = 0$ . Во втором случае функция распределения меняется более сложным образом, так, что ферми-поверхность не остается сферической. Изменение ферми-поверхности определяется функцией  $v$ .

Рассмотрим, прежде всего, решение уравнения (2.24), не зависящее от спина. При этом от всей функции  $F(\chi)$  остается только часть  $\Phi(\chi)$ , связанная с функцией  $\varphi$  в (2.8). Возьмем сначала наиболее простой случай, а именно,  $\Phi = \Phi_0 = \text{const}$ . Из уравнения (2.24) получаем:

$$v = \frac{\text{const} \cdot \cos \theta}{s - \cos \theta} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (2.25)$$

Как мы сейчас увидим,  $s$  должно быть больше единицы. Это значит, что поверхность Ферми оказывается вытянутой в направлении движения.

Подставляя (2.25) в (2.24) с  $F = \Phi_0$ , находим уравнение для  $s$ . После интегрирования, получаем:

$$\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{\Phi_0}. \quad (2.26)$$

Отсюда видно, что если величина  $s$  является действительной (это соответствует незатухающим волнам), то она должна быть больше единицы, т. е.

$$\tilde{u} > v. \quad (2.27)$$

Из уравнения (2.24) видно, что это условие остается справедливым для любой функции  $\Phi$ . Далее, ввиду того, что левая часть уравнения (2.26) всегда положительна, ясно, что условием существования нулевого звука является положительность  $\Phi_0$ .

Если функция  $\Phi_0$  велика, то  $s$  тоже велико. Из уравнения (2.26) получаем  $s \rightarrow \sqrt{\frac{\Phi_0}{3}}$  при  $\Phi_0 \rightarrow \infty$ . Наоборот, при  $\Phi_0 \rightarrow 0$   $s \rightarrow 1$ , т. е.  $\tilde{u} \rightarrow v$ . Это — случай почти идеального ферми-газа.

Нетрудно видеть, что заключение относительно стремления  $s$  к 1 при  $\Phi \rightarrow 0$  не зависит от вида  $\Phi$ . Действительно, из (2.24) следует, что при  $\Phi \rightarrow 0$   $s \rightarrow 1$ , а  $v$  отлично от нуля лишь вблизи малых  $\theta$ . Согласно (2.19), в слабо неидеальном ферми-

газе  $u^2 = \frac{p_0^2}{3m^2}$ , т. е.  $u \approx \frac{v}{\sqrt{3}} \approx \frac{\tilde{u}}{\sqrt{3}}$ . Таким образом, скорость нулевого звука будет превышать обычную скорость звука в  $\sqrt{3}$  раз. Надо отметить, что в пределе почти идеального ферми-газа  $\tau$  очень увеличивается, в результате чего расширяется диапазон частот, соответствующий нулевому звуку, а обычный звук, наоборот, существует только в области очень низких частот.

В общем случае произвольной функции  $\Phi(\chi)$  уравнение (2.24) уже не решается таким простым способом. Если разложить  $v(\theta, \varphi)$  и  $\Phi(\chi)$  в ряды по сферическим гармоникам, то уравнения для амплитуд, соответствующих сферическим функциям с разными азимутальными числами  $m$  (т. е. множителями  $e^{im\varphi}$ ), разделяются. При этом число  $m$  не превышает максимального номера  $l$  в разложении функции  $\Phi(\chi)$  по полиномам Лежандра  $\Phi(\chi) = \sum_l \Phi_l P_l(\cos \chi)$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что в общем случае может возникнуть несколько «нулевых звуков», для которых изменения функции распределения неизотропны в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения  $k$ . Как и в простейшем случае, возможность появления таких колебаний определяется видом функции  $\Phi$ . Например, если  $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \cos \chi$ , то условием появления колебаний с  $v \sim e^{i\varphi}$  является  $\Phi_1 > 6$ .

Обратим внимание на то, что в таких волнах не происходит сжатия и разрежения жидкости.

В случае, когда функция  $f$  зависит от спинов частиц, в жидкости могут распространяться особые волны, которые можно назвать спиновыми. Действительно, представим себе, например, что функция  $F(\chi)$  имеет вид (обменное взаимодействие спинов)

$$F(\chi) = \Phi(\chi) + Z(\chi)(\sigma\sigma'). \quad (2.28)$$

В таком случае, кроме решений, не зависящих от спина, уравнению (2.24) удовлетворяет функция  $v$ , имеющая вид

$$v = v\sigma, \quad (2.29)$$



где  $\mathbf{v}$  — неизвестный вектор. Для функции  $\mathbf{v}$  получаем уравнение

$$(s - \cos \theta) \mathbf{v} = \cos \theta \int Z \mathbf{v}' \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (2.30)$$

Уравнение для компонент вектора  $\mathbf{v}$  отличается от уравнения для  $\mathbf{v}$ , не зависящего от спина, только заменой  $\Phi$  на  $Z$ . Поэтому все дальнейшие рассуждения справедливы и для спиновых волн. Можно показать [10], что нулевой член разложения  $Z$  по сферическим гармоникам определяет выражение для магнитной восприимчивости ферми-жидкости. Для жидкого  $\text{He}^3$  он оказывается отрицательным, что, по всей вероятности, свидетельствует о невозможности распространения спиновых волн в этой жидкости.

Несколько особый случай представляют электроны в металлах. Очевидно, в металле не могут распространяться колебания, сопровождающиеся изменением только одной электронной плотности при неизменной кристаллической решетке. Такие колебания привели бы к появлению нескомпенсированного электрического заряда, а поэтому возбуждение таких колебаний в действительности требует очень большой энергии. По всей вероятности, это означает, что функция  $f$  в случае кулоновских сил содержит бесконечную константу, не зависящую от угла (см. также § 22). Согласно (2.26), отсюда следует  $s = \infty$ . Однако это рассуждение относится только к колебаниям плотности; в электронной жидкости могут, при определенных условиях, распространяться высшие «звуки» с  $\mathbf{v} \sim e^{im\varphi}$  (где  $m \neq 0$ ) и спиновые волн, не связанные с изменениями плотности.

Возможность распространения звуковых волн при  $T = 0$  означает, что в спектре возбуждений жидкости имеются бозевские фоновые ветви с линейной зависимостью энергии от импульса  $\epsilon_i = u_i p$ . Однако поправки в термодинамических величинах, происходящие от фононов, содержат более высокие степени  $T$  (теплоемкость  $\sim T^3$ ), не учитываемые в рассматриваемом приближении.

В дальнейшем (гл. IV) будет показано, как основные положения изложенной теории могут быть получены из микроскопического рассмотрения системы ферми-частиц с произвольными короткодействующими силами взаимодействия.

Теория Ландау в изложенном виде относится прежде всего к свойствам жидкого  $\text{He}^3$  при низких температурах.

Наличие кулоновского взаимодействия между частицами приводит к ряду особенностей. Некоторые из них будут продемонстрированы на примере простой модели в § 22. Еще более существенным образом отличаются от обычной ферми-жидкости сверхтекучие (сверхпроводящие) ферми-системы. Свойства сверхпроводников будут рассмотрены в гл. VII. Наконец, следует отметить ферромагнитные ферми-системы, также отличающиеся от рассмотренной модели. Свойства таких ферми-жидкостей были исследованы в работе А. А. Абрикосова и И. Е. Дзялошинского [14], к которой мы отсылаем читателя.

### § 3. Вторичное квантование

Изложенная выше теория бозе- и ферми-жидкостей носила в известном смысле феноменологический характер. Она основывалась на определенных предположениях о спектре температурных возбуждений. В дальнейшем мы будем заниматься микроскопическим обоснованием этой теории. В настоящем параграфе будет изложен вспомогательный математический аппарат, известный под названием метода вторичного квантования<sup>1)</sup>.

Допустим, что мы имеем систему из  $N$  невзаимодействующих частиц, которые могут находиться в каких-то состояниях с волновыми функциями  $\varphi_1(\xi)$ ,  $\varphi_2(\xi)$ , ..., образующими полную и ортонормированную систему. Здесь  $\xi$  обозначает любые переменные, характеризующие состояние частицы, обычно это — координаты и проекция спина. Вместо полной волновой функции для описания системы, очевидно, могут быть заданы числа частиц, находящихся в состоянии  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , ... Это означает переход к новому представлению, называемому представлением вторичного квантования. Роль переменных в нем играют числа  $N_1$ ,  $N_2$ , ... Начнем со случая частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Полная волновая функция системы бозе-частиц, как известно, симметрична относительно перестановки переменных, соответствующих различным частицам. Нетрудно проверить, что волновая функция, отвечающая

---

<sup>1)</sup> Мы считаем полезным привести здесь краткое изложение метода вторичного квантования (см., например [15]) ввиду того, что этот метод является основой развиваемого в дальнейшем аппарата.

числам заполнения  $N_1, N_2, \dots$ , имеет вид

$$\Phi_{N_1 N_2 \dots} = \left( \frac{N_1! N_2! \dots}{N!} \right)^{1/2} \sum_P \varphi_{p_1}(\xi_1) \varphi_{p_2}(\xi_2) \dots \varphi_{p_N}(\xi_N); \quad (3.1)$$

здесь  $p_i$  — номера состояний, а сумма берется по всем возможным перестановкам различных чисел  $p_i$ . Множитель перед суммой введен для нормировки  $\left( \int |\Phi|^2 \prod_i d\xi_i = 1 \right)$ . Будем рассматривать  $\Phi_{N_1 N_2 \dots}$  как функцию переменных  $N_i$ .

Пусть  $F^{(1)}$  есть некоторый симметричный по всем частицам оператор вида

$$F^{(1)} = \sum_a f_a^{(1)}, \quad (3.2)$$

где  $f_a$  — оператор, действующий только на функции от  $\xi_a$ . Нетрудно видеть, что такой оператор, действуя на функцию  $\Phi_{N_1 N_2 \dots}$ , переводит ее либо в ту же самую функцию, либо в другую, соответствующую изменению состояния одной из частиц. Ввиду этого матричные элементы  $F^{(1)}$  по функциям (3.1) имеют вид:

диагональные

$$\overline{F^{(1)}} = \sum_i f_{ii}^{(1)} N_i,$$

недиагональные

$$(F^{(1)})_{N_i-1}^{N_i} \quad N_k-1 \quad N_k = f_{ik}^{(1)} V \overline{N_i N_k}, \quad (3.3)$$

где

$$f_{ik}^{(1)} = \int \varphi_i^*(\xi) f^{(1)} \varphi_k(\xi) d\xi.$$

В смысле действия на числа  $N_i$  оператор  $F^{(1)}$  можно изобразить, если ввести операторы  $a_i$ , которые уменьшают на единицу число частиц в  $i$ -м состоянии и обладают матричными элементами

$$(a_i)_{N_i-1}^{N_i} = V \overline{N_i}. \quad (3.4)$$

Эрмитовски сопряженные операторы  $a_i^+$ , очевидно, имеют матричные элементы:

$$(a_i^+)_{N_i-1}^{N_i} = (a_i)_{N_i}^{N_i-1}^* = V \overline{N_i}. \quad (3.5)$$

т. е. увеличивают число частиц на единицу. Нетрудно проверить, что оператор  $F^{(1)}$  может быть записан в виде

$$F^{(1)} = \sum f_{ik}^{(1)} a_i^+ a_k. \quad (3.6)$$

Действительно, матричные элементы этого оператора совпадают с формулами (3.3). Это и есть выражение  $F^{(1)}$  в представлении вторичного квантования.

Согласно формулам (3.4) и (3.5), произведения операторов  $a_i^+$  и  $a_i$  представляют собой диагональные операторы

$$\begin{aligned} a_i^+ a_i &= N_i, \\ a_i a_i^+ &= N_i + 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.4), (3.5) и (3.7) следуют перестановочные соотношения операторов  $a_i$ :

$$\begin{aligned} [a_i a_k^+] &= a_i a_k^+ - a_k^+ a_i = \delta_{ik}, \\ [a_i a_k] &= [a_i^+ a_k^+] = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Аналогичным образом может быть изображен симметризованный оператор

$$F^{(2)} = \sum_{a,b} f_{ab}^{(2)}, \quad (3.9)$$

где  $f_{ab}^{(2)}$  действует на функции от  $\xi_a$  и  $\xi_b$ . В представлении вторичного квантования оператор  $F^{(2)}$  имеет вид

$$F^{(2)} = \sum_{iklm} f_{lm}^{(2) ik} a_i^+ a_k^+ a_l a_m, \quad (3.10)$$

где

$$f_{lm}^{(2) ik} = \int \varphi_i^*(\xi_1) \varphi_k^*(\xi_2) f^{(2)} \varphi_l(\xi_1) \varphi_m(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Это же относится и к более сложным операторам.

Рассмотрим гамильтониан системы взаимодействующих частиц, находящихся во внешнем поле,

$$H = \sum H_a^{(1)} + \sum_{a,b} U^{(2)}(r_a, r_b) + \sum_{a,b,c} U^{(3)}(r_a, r_b, r_c) + \dots, \quad (3.11)$$

где  $H_a^{(1)} = -\frac{\Delta_a}{2m} + U(r_a)$ . Согласно предыдущему, в представлении вторичного квантования он имеет вид

$$H = \sum H_{ik}^{(1)} a_i^+ a_k + \sum_{iklm} U_{lm}^{(2) ik} a_i^+ a_k^+ a_l a_m + \dots \quad (3.12)$$

Если в качестве  $\varphi_i$  выбрать собственные функции гамильтониана  $H_a^{(1)}$ , то первый член (3.12) становится равным

$$H^{(1)} = \sum \varepsilon_i a_i^+ a_i = \sum \varepsilon_i N_i. \quad (3.13)$$

В случае статистики Ферми полная волновая функция системы должна быть антисимметрична по всем переменным. Это приводит к тому, что числа заполнения в случае невзаимодействующих частиц могут принимать лишь значение 0 и 1, и волновая функция имеет вид

$$\Phi_{N_1 N_2 \dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^P \varphi_{p_1}(\xi_1) \varphi_{p_2}(\xi_2) \dots \varphi_{p_N}(\xi_N), \quad (3.14)$$

причем все числа  $p_1, p_2, \dots, p_N$  — разные. Символ  $(-1)^P$  показывает, что нечетные перестановки входят в сумму (3.14) со знаком «минус». Для определенности будем брать со знаком «плюс» тот член суммы, в котором

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_N. \quad (3.15)$$

Матричные элементы оператора  $F^{(1)}$  типа (3.2) в данном случае имеют вид:

диагональные

$$\overline{F^{(1)}} = \sum_i f_{ii} N_i, \quad (3.16)$$

недиагональные

$$(F^{(1)}) \begin{pmatrix} 1_i & 0_k \\ 0_i & 1_k \end{pmatrix} = \pm f_{ik}^{(1)},$$

где берется знак «плюс» или «минус» в зависимости от четности или нечетности общего числа частиц в состояниях, находящихся между  $i$ -м и  $k$ -м состояниями. Введем операторы  $a_i$  с матричными элементами

$$(a_i)_1^0 = (a_i^+)_0^1 = (-1)^{\sum_{l=1}^{i-1} N_l}. \quad (3.17)$$

С помощью этих операторов оператор  $F^{(1)}$  можно записать в виде (3.6).

Произведения операторов  $a_i$  и  $a_i^+$  равны

$$\begin{aligned} a_i^+ a_i &= N_i, \\ a_i a_i^+ &= 1 - N_i. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Таким образом,

$$\{a_i a_i^+\} = a_i a_i^+ + a_i^+ a_i = 1.$$

Все остальные антикоммутаторы равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} \{a_i a_k^+\} &= \delta_{ik}, \\ \{a_i a_k\} &= \{a_i^+ a_k^+\} = 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Более сложные операторы, и в частности гамильтониан, могут быть записаны через операторы  $a_i$ ,  $a_i^+$  так же, как и в случае бозе-частиц.

#### § 4. Разреженный бозе-газ

Простым примером квантовой жидкости является слабо неидеальный газ, т. е. газ, в котором роль взаимодействия частиц относительно мала. Как мы увидим, для этого нужно, чтобы амплитуда рассеяния частиц была мала по сравнению со средней длиной волны  $\lambda = 1/\bar{p}$ , которая для вырожденного газа по порядку величины совпадает со средним расстоянием между частицами.

В этих условиях благодаря малости импульса сталкивающихся частиц в первых приближениях достаточно учитывать только  $s$ -рассеяние. Если обозначить амплитуду  $s$ -рассеяния через  $a$ , то амплитуда  $p$ -рассеяния будет порядка  $a \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$ <sup>1)</sup>. Таким образом, если, например, в полной энергии  $s$ -рассеяние дает члены, начиная с порядка  $a/\lambda$ , то  $p$ -рассеяние дает члены по порядку не ниже  $(a/\lambda)^3$ . Отсюда следует, что с точностью до таких членов рассеяние можно считать изотропным.

<sup>1)</sup> Если величина  $r_0$  характеризует радиус действия сил, то, согласно квантовой механике (см. [15]), при  $\lambda \gg r_0$  амплитуды рассеяния с различными моментами  $l$  будут порядка  $r_0 \left(\frac{r_0}{\lambda}\right)^{2l}$ .

С той же точностью можно пренебречь тройными соударениями, причем можно показать, что для ферми-газа вклад от тройных соударений оказывается еще меньше  $\sim (a/\lambda)^5$ <sup>1)</sup>. Мы будем предполагать, что взаимодействие между частицами является отталкивательным, т. е. амплитуда рассеяния имеет знак «плюс». В случае бозе-газа это связано с тем, что даже при сколь угодно слабом притяжении бозе-газ при низких температурах никак не может остаться разреженным. В ферми-газе притяжение между частицами приводит к сверхтекучести. Этот случай мы здесь рассматривать не будем.

В этом параграфе будут вычислены энергия основного состояния и энергетический спектр разреженного бозе-газа ( $T=0$ )<sup>2)</sup>. В следующем параграфе будет рассмотрен разреженный ферми-газ. Для простоты будем считать, что частицы бозе-газа имеют спин, равный нулю. Энергию взаимодействия в этом случае запишем в виде

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a_{p_4}^+ a_{p_3}^+ a_{p_2} a_{p_1}. \quad (4.1)$$

Вынесение  $U$  за знак суммы соответствует тому, что взаимодействие между любыми парами частиц одинаково, причем амплитуда рассеяния не зависит от угла ( $s$ -рассеяние). Величина  $U$  в первом приближении связана с амплитудой рассеяния соотношением

$$U = \frac{4\pi}{m} a. \quad (4.2)$$

Это равенство нетрудно получить из следующего соображения. Согласно определению амплитуды  $s$ -рассеяния (см. [15], стр. 460, 482), она связана с эффективным сечением рассеяния

<sup>1)</sup> Последнее утверждение следует из того, что волновая функция трех сталкивающихся ферми-частиц должна быть антисимметричной. Для этого необходимо, чтобы третья частица обладала нечетным орбитальным моментом по отношению к той из первых двух, которая имеет одинаковую с ней проекцию спина. В результате появляется, по крайней мере, один лишний множитель  $(a/\lambda)^2$ .

<sup>2)</sup> Энергетический спектр разреженного бозе-газа был впервые найден Н. Н. Боголюбовым [16], энергия основного состояния была определена в работе Янга и Хуанга [17] и К. Бракнера и Савады [18]. В данном параграфе мы следуем в основном работам [16, 18].

двух одинаковых частиц соотношением (в системе центра инерции)

$$d\sigma = (2a)^2 d\Omega.$$

С другой стороны, величину  $d\sigma$  можно определить с помощью гамильтониана (4.1). В борновском приближении получаем (см. [15], стр. 466):

$$d\sigma = \left(\frac{m}{4\pi}\right)^2 (2U)^2 d\Omega,$$

откуда и следует формула (4.2).

Как показал Н. Н. Боголюбов [16], в том случае, когда речь идет об основном или слабовозбужденных состояниях разреженного бозе-газа, оператор энергии взаимодействия (4.1) может быть существенно упрощен, в результате чего удастся произвести диагонализацию гамильтониана и получить энергетический спектр. Идея упрощения сводится к следующему. В основном состоянии частицы идеального бозе-газа находятся на самом нижнем уровне с нулевой энергией или, как говорят, в конденсате. В разреженном газе ввиду слабости взаимодействия основное состояние будет мало отличаться от состояния идеального газа, т. е. число частиц, находящихся в конденсате, будет все еще значительно превышать число частиц на других уровнях:  $N - N_0 \ll N_0$ . Это же относится и к слабовозбужденным состояниям. Так как матричные элементы от бозевских операторов  $a_i$  равны  $\sqrt{N_i}$ , то ясно, что мы можем учитывать лишь взаимодействие частиц конденсата между собой и возбужденных частиц с частицами конденсата, пренебрегая взаимодействием надконденсатных частиц между собой. Это означает, что из всей суммы в (4.1) достаточно сохранить лишь следующие члены:

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \left[ a_0^+ a_0^+ a_0 a_0 + \sum_{p \neq 0} (2a_p^+ a_0^+ a_p a_0 + \right. \\ \left. + 2a_{-p}^+ a_0^+ a_{-p} a_0 + a_p^+ a_{-p}^+ a_0 a_0 + a_0^+ a_0^+ a_p a_{-p}) \right]. \quad (4.3)$$

Ввиду того, что  $N_0$  очень большое число, мы имеем право считать операторы  $a_0^+$  и  $a_0$  просто числами и заменить



их на  $\sqrt{N_0}$ . Действительно, коммутаторы этих операторов друг с другом или с любыми другими операторами  $a_i$ ,  $a_i^+$  дают единицы или нули, т. е. во всяком случае малы по сравнению с матричными элементами операторов  $a_0$  и  $a_0^+$ . Таким образом, получаем:

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \left[ N_0^2 + 2N_0 \sum_{p \neq 0} (a_{-p}^+ a_{-p} + a_p^+ a_p) + \right. \\ \left. + N_0 \sum_{p \neq 0} (a_p^+ a_{-p}^+ + a_p a_{-p}) \right]. \quad (4.4)$$

Полное число частиц в системе может быть записано в виде

$$N = N_0 + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}). \quad (4.5)$$

Это дает возможность выразить в формуле (4.4) все числа  $N_0$  через  $N$ . Ограничиваясь в  $H_{int}$  членами, содержащими не менее первой степени  $N$ , и добавляя оператор кинетической энергии, получаем следующий гамильтониан:

$$H = \frac{UN^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V} \right) (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}) + \right. \\ \left. + \frac{UN}{V} (a_p^+ a_{-p}^+ + a_p a_{-p}) \right]. \quad (4.6)$$

Последний член гамильтониана является недиагональным. Для диагонализации произведем линейное преобразование операторов  $a_p$  и  $a_p^+$ :

$$a_p = \frac{1}{\sqrt{1 - A_p^2}} (\alpha_p + A_p \alpha_{-p}^+), \\ a_p^+ = \frac{1}{\sqrt{1 - A_p^2}} (\alpha_p^+ + A_p \alpha_{-p}). \quad (4.7)$$

Новые операторы  $\alpha_p$  и  $\alpha_p^+$  удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и старые. Выразив в формуле (4.6)

операторы  $a_p$  и  $a_p^+$  через  $\alpha_p$  и  $\alpha_p^+$ , получаем:

$$H = \frac{UN^2}{2V} + \sum_{p \neq 0} \frac{1}{1 - A_p^2} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{NU}{V} \right) A_p^2 + \frac{NU}{V} A_p \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{1 - A_p^2} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{NU}{V} \right) (1 + A_p^2) + \right. \\ \left. + 2 \frac{UN}{V} A_p \right] (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}) + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{1 - A_p^2} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{NU}{V} \right) 2A_p + \right. \\ \left. + \frac{NU}{V} (1 + A_p^2) \right] (\alpha_p^+ \alpha_{-p}^+ + \alpha_p \alpha_{-p}). \quad (4.8)$$

Для того чтобы недиагональные члены обратились в нуль, необходимо, чтобы коэффициент  $A_p$  удовлетворял соотношению

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{NU}{V} \right) 2A_p + \frac{NU}{V} (1 + A_p^2) = 0.$$

Это даст:

$$A_p = \frac{V}{UN} \left( -\frac{p^2}{2m} - \frac{NU}{V} + \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V} \right)^2 - \left( \frac{UN}{V} \right)^2} \right). \quad (4.9)$$

Знак «плюс» перед корнем необходим для того, чтобы возбужденные состояния обладали положительной энергией. Выразив в (4.8) коэффициенты  $A_p$  согласно (4.9), получаем:

$$H = \frac{UN^2}{2V} - \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V} \right) - \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V} \right)^2 - \left( \frac{UN}{V} \right)^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V} \right)^2 - \left( \frac{UN}{V} \right)^2} (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}). \quad (4.10)$$

Полученное выражение состоит из двух слагаемых. Первое из них есть некоторая константа. Второе представляет собой диагональный оператор, который может быть записан в виде

$$\sum_{p \neq 0} n_p \varepsilon(p),$$

где  $n_p$  — числа заполнения, соответствующие операторам  $\alpha_p$ . Наименьшее значение энергии достигается, когда все  $n_p$  равны нулю, а поэтому  $\sum_p n_p \varepsilon(p)$  есть энергия возбуждения. Это

выражение имеет такой же вид, что и энергия системы невзаимодействующих частиц (3.13). Отсюда следует, что слабовозбужденное состояние разреженного бозе-газа может быть описано с помощью модели элементарных возбуждений с энергетическим спектром<sup>1)</sup>

$$\epsilon(p) = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{V}\right)^2 - \left(\frac{UN}{V}\right)^2}. \quad (4.11)$$

В пределе малых импульсов это выражение приобретает вид

$$\epsilon(p) \approx \frac{\sqrt{4\pi a N/V}}{m} p, \quad (4.12)$$

т. е. соответствует фоновой части спектра бозе-жидкости. При больших импульсах энергия  $\epsilon(p)$  переходит в энергию свободной частицы

$$\epsilon(p) \approx \frac{p^2}{2m}, \quad (4.13)$$

что тоже находится в соответствии с выводами § 2.

Первое слагаемое формулы (4.10), очевидно, представляет собой энергию основного состояния бозе-жидкости. Нетрудно видеть, что сумма по  $p$  в этом выражении расходится при больших импульсах как  $\sum_p \frac{1}{p^2}$ . Связано это с тем, что разло-

жение энергии по степеням  $U$  в действительности не имеет места. Наличие постоянного  $U$  приводит к бесконечности в энергии, как это видно непосредственно из формулы (4.10). В данном случае существенно, что амплитуда рассеяния  $a$  имеет конечную и притом малую величину, что делает возможным разложение энергии по этой величине.

Соотношение (4.2) между  $U$  и амплитудой рассеяния не является точным, а справедливо лишь до членов первого порядка. Ввиду того, что нас интересуют и члены высшего порядка в энергии, соотношение (4.2) должно быть исправлено. Рассматривая рассеяние двух частиц конденсата с переходом

<sup>1)</sup> Отметим, что в проделанном выводе было использовано борновское приближение. Однако в действительности формула (4.11), выраженная через амплитуду рассеяния  $a$  с помощью соотношения (4.2), справедлива не только в борновском приближении, а всегда, когда выполнено условие  $a/\lambda \ll 1$ . Это будет доказано в гл. V. То же самое относится и к формулам (4.16), (5.20) и (5.21).

в состояние  $p$ , —  $p$  во втором приближении теории возмущений, получаем:

$$U - \frac{U^2}{V} \sum_{p \neq 0} \frac{1}{p^2/m} = \frac{4\pi a}{m}. \quad (4.14)$$

Выражая отсюда  $U$  через  $a$  и подставляя получившееся выражение в (4.10), находим для энергии основного состояния

$$E = \frac{2\pi a}{m} \frac{N^2}{V} + \frac{8\pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \sum_p \frac{1}{p^2/m} - \\ - \frac{1}{2} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi a N}{mV}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4\pi a N/mV}{p^2/2m + 4\pi a N/mV}\right)^2}\right). \quad (4.15)$$

При больших  $p$  выражение (4.15) сходится. Интегрируя по импульсам, получаем:

$$\frac{E}{V} = \frac{2\pi a}{m} \left(\frac{N}{V}\right)^2 \left[1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} a^{3/2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}\right]. \quad (4.16)$$

Отметим, что разложение идет по  $\left[a \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}\right]^{3/2}$ .

Из этой формулы можно найти скорость звука

$$u = \sqrt{\frac{V^2}{mN} \frac{\partial^2 E}{\partial V^2}} = \frac{\sqrt{4\pi a N/V}}{m}. \quad (4.17)$$

Как и должно быть, это выражение совпадает с коэффициентом при  $p$  в формуле фоновой части спектра (4.12).

В начале этого параграфа уже говорилось, что в бозе-газе амплитуда  $a$  должна быть положительной. Это видно и из формулы (4.17), так как в случае  $a < 0$  скорость звука была бы мнимой (неустойчивость состояния).

Распределение возбуждений по импульсам дается обычной бозевской формулой

$$\bar{n}_p = \alpha_p^+ \alpha_p = \frac{1}{e^{s(p)/T} - 1}. \quad (4.18)$$

Что же касается импульсного распределения самих частиц бозе-жидкости, то его можно найти, если вычислить

$$\bar{N}_p = \overline{\alpha_p^+ \alpha_p}.$$

Подставляя формулы (4.7), получаем:

$$\bar{N}_p = \frac{\bar{n}_p + A_p^2 (\bar{n}_p + 1)}{1 - A_p^2}. \quad (4.19)$$

Конечно, это выражение относится только к  $p \neq 0$ . Число частиц с нулевой энергией получается из формулы

$$N_0 = N - \sum_{p \neq 0} \bar{N}_p.$$

При абсолютном нуле  $\bar{n}_p = 0$ , и, таким образом, из (4.19) находим:

$$\bar{N}_p = \frac{\frac{8\pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{N}{V}\right)^2}{\varepsilon(p) \left[ \varepsilon(p) + \frac{p^2}{2m} + \frac{4\pi a N}{mV} \right]}, \quad (4.20)$$

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{8}{3V\pi} a^{3/2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/2}. \quad (4.21)$$

Таким образом, ясно, что в неидеальном бозе-газе даже в основном состоянии отнюдь не все частицы обладают импульсом, равным нулю.

## § 5. Разреженный ферми-газ

Теперь перейдем к ферми-газу. Мы определим энергию основного состояния, эффективную массу возбудений и  $f$ -функцию<sup>1)</sup> с точностью до членов порядка  $(a/\lambda)^2$ , где  $a$  — амплитуда  $s$ -рассеяния.

Оператор энергии возбудения в данном случае не может быть записан в виде (4.1), как для бозе-частиц. Действительно, если в (4.1) под  $i, k, l, m$  подразумевать не только импульсы, но и проекции спина, то вследствие антикоммутативности фермиевских операторов сумма обращается в нуль. Связано это с тем, что в гамильтониане (4.1) не учтена специфика рассеяния ферми-частиц. Согласно квантовой меха-

<sup>1)</sup> Энергия основного состояния была вычислена в работах Янга и Хуанга [19] и Янга и Ли [20], эффективная масса возбудений была найдена А. А. Абрикосовым и И. М. Халатниковым [21], а также В. М. Галицким [22]. Функция  $f$  была вычислена в работе [21].

нике (см. [11], § 114), для одинаковых частиц со спином  $1/2$   $s$ -рассеяние может иметь место только в том случае, когда спины антипараллельны. При этом амплитуда удваивается по сравнению со случаем, когда частицы различны. Учитывая это обстоятельство, мы можем записать энергию взаимодействия в виде

$$H_{int} = \frac{U}{V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a_{p_3}^+ \frac{1}{2} a_{p_4}^+ - \frac{1}{2} a_{p_2} - \frac{1}{2} a_{p_1} \frac{1}{2}, \quad (5.1)$$

или, что то же самое,

$$H_{int} = \frac{U}{2V} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a_{p_3}^+ a_{p_4}^+ a_{p_2} a_{p_1}. \quad (5.1')$$

Так же как и раньше, величина  $U$  в первом приближении связана с амплитудой  $s$ -рассеяния соотношением

$$U = \frac{4\pi a}{m}. \quad (5.2)$$

Применим теорию возмущений по отношению к  $H_{int}$ . Добавка первого порядка к энергии основного состояния равна диагональному матричному элементу от  $H_{int}$ :

$$E^{(1)} = \frac{U}{V} \sum n_i n_k Q_{ik}, \quad (5.3)$$

где индексы  $i, k$  соответствуют заданным импульсам и проекциям спина,  $n_i$  — числа заполнения при  $T=0$ <sup>1)</sup>, равные 1 при  $p < p_0$  и 0 при  $p > p_0$  ( $p_0 = (3\pi^2 N/V)^{1/3}$ ), а множитель  $Q_{ik}$  в (5.3) учитывает то обстоятельство, что спины частиц в состояниях  $i$  и  $k$  противоположно направлены. Этот множитель удобно брать в виде

$$Q_{ik} = \frac{1}{4} (1 - \sigma_i \sigma_k), \quad (5.4)$$

где  $\frac{1}{2} \sigma_i$  — оператор спина частицы в состоянии  $i$ . Подставив (5.2) и (5.4) в (5.3), находим:

$$E^{(1)} = \frac{\pi a}{m} \frac{N^2}{V}. \quad (5.5)$$

<sup>1)</sup> Здесь  $n_i$  обозначают числа заполнения для невзаимодействующих частиц. Нетрудно понять, что при  $T=0$  они совпадают с числами заполнения квазичастиц и отличаются от  $N_i$  — чисел заполнения для системы взаимодействующих частиц.

Для нахождения поправки второго порядка воспользуемся выражением теории возмущений

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|(H_{int})_{nm}|^2}{E_n - E_m}. \quad (5.6)$$

Подставив в эту формулу выражение (5.1), получаем следующую сумму:

$$\frac{2U^2}{V^2} \sum_{iklm} \frac{n_i n_k (1 - n_l) (1 - n_m) Q_{ik} Q_{lm}}{(p_i^2 + p_k^2 - p_l^2 - p_m^2)/2m}. \quad (5.7')$$

Ввиду того, что нашей целью является получение разложения энергии по степеням  $a$ , мы должны, как и в § 4, учесть, что соотношение (5.2) между  $U$  и амплитудой рассеяния не является точным, а справедливо лишь с точностью до членов первого порядка по  $U$ . При учете членов второго порядка вместо соотношения (5.2) получается:

$$U + \frac{2U^2}{V} \sum_{l, m} \frac{Q_{lm}}{(p_i^2 + p_k^2 - p_l^2 - p_m^2)/2m} = \frac{4\pi a}{m}. \quad (5.2')$$

Если отсюда выразить  $U$  через  $a$  и подставить результат в формулу (5.3), то в выражении  $E^{(1)}$  возникнут члены, пропорциональные  $a^2$ , которые, естественно, следует отнести к поправке второго порядка. С учетом этого обстоятельства мы получаем следующее значение второго приближения к энергии:

$$E^{(2)} = \frac{32a^2\pi^2}{m^2V^2} \sum_{iklm} \left[ \frac{n_i n_k (1 - n_l) (1 - n_m) Q_{ik} Q_{lm}}{(p_i^2 + p_k^2 - p_l^2 - p_m^2)/2m} - \frac{n_i n_k Q_{ik} Q_{lm}}{(p_i^2 + p_k^2 - p_l^2 - p_m^2)/2m} \right]. \quad (5.7)$$

В противоположность выражению (5.7) это выражение не расходится при больших  $p$ . Следовательно, так же как и в бозе-газе, перенормировка  $U$  приводит к устранению расходимости в энергии.

Отметим, что соотношение (5.2') на первый взгляд кажется противоречивым, так как левая сторона зависит от угла между  $p_i$  и  $p_k$ , а правая не зависит. Это могло бы свидетельствовать о незаконности принятого нами вида оператора энергии взаимодействия. Однако в действительности это

обстоятельство не должно вызывать никаких опасений, так как в соотношении (5.2') не учтены члены, связанные с высшими моментами, вносящие, как уже отмечено, малый вклад в энергию.

В выражении (5.7) член с четырьмя  $n_i$ , возникающий от первого слагаемого, равен нулю ввиду того, что знаменатель антисимметричен относительно замены  $i, k \rightleftharpoons l, m$ , в то время как числитель симметричен и все области суммирования одинаковы. Остающиеся два члена с произведениями трех  $n_i$  равны друг другу. Таким образом, окончательно получаем:

$$E^{(2)} = - \frac{64a^2\pi^2}{m^2V^2} \sum_{iklm} \frac{n_i n_k n_l Q_{ik}}{(p_i^2 + p_k^2 - p_l^2 - p_m^2)/2m}. \quad (5.8)$$

Переходя от суммирования к интегрированию, это выражение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{E^{(2)}}{V} = & - \frac{64a^2\pi^2}{m^2(2\pi)^9} \int dp_1 \int dp_2 \int dp_3 \int dp_4 \times \\ & \times \frac{\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)/2m}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Энергия возбуждений, согласно § 2, определяется соотношением<sup>1)</sup>

$$\varepsilon_i = \frac{\delta E}{\delta n_i}. \quad (5.10)$$

Вариация выражений (5.3) и (5.8) по  $n_i$  дает:

$$\begin{aligned} \varepsilon(p) = & \frac{p^2}{2m} + \frac{2\pi a N}{mV} + \\ & + \frac{32\pi^2 a^2}{m^2(2\pi)^9} \int dp_1 \int dp_2 \int dp_3 \left[ \frac{\delta(p_1 + p_2 - p - p_3)}{(p^2 + p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)/2m} - \right. \\ & \left. - 2 \frac{\delta(p_1 + p - p_2 - p_3)}{(p^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)/2m} \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

<sup>1)</sup> На первый взгляд может показаться, что эта формула неправильна, так как  $\varepsilon$  есть вариационная производная  $E$  по функции распределения квазичастиц, а не по распределению частиц. Однако в формуле (5.10) имеется в виду производная не по истинному распределению частиц, а по распределению невзаимодействующих частиц, которое, как уже отмечено раньше (сноска на стр. 56), при  $T=0$  совпадает с распределением квазичастиц взаимодействующей системы.



Таким образом, для вычисления энергии основного состояния и эффективной массы возбуждений надо вычислить интегралы (5.9) и (5.11). Интегрирование является довольно громоздким ввиду высокой кратности интегралов и неудобства области интегрирования.

Вместо этого можно применить более простой способ, основанный на использовании функции  $f$ . Если ввести эту функцию

$$f_{ik} = \frac{\delta^2 E}{\delta n_i \delta n_k}, \quad (5.12)$$

то, согласно формулам (2.12), (2.19) § 2, мы можем определить отсюда эффективную массу и скорость звука малой частоты. Из скорости звука после соответствующего интегрирования можно найти энергию основного состояния.

Таким образом, задача сводится к определению величины  $f$ . Варьируя выражения (5.3) и (5.8) по  $n_i$ , а затем по  $n_k$ , мы находим следующее выражение для  $f$ :

$$f = \frac{8a\pi}{m} Q_{\sigma\sigma'} - \frac{64\pi^2 a^2}{m^2 (2\pi)^3} \int_{|p_1| < p_0} dp_1 \int dp_2 \left[ Q_{\sigma\sigma'} \frac{\delta(p + p' - p_1 - p_2)}{(p^2 + p'^2 - p_1^2 - p_2^2)/2m} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\delta(p + p_1 - p' - p_2)}{(p^2 + p_1^2 - p'^2 - p_2^2)/2m} + \frac{1}{4} \frac{\delta(p' + p_1 - p - p_2)}{(p'^2 + p_1^2 - p^2 - p_2^2)/2m} \right]. \quad (5.13)$$

При вычислении мы будем сразу полагать  $|p| = |p'| = p_0$ , интегрирование в (5.13) значительно проще, чем в (5.9) и (5.11). В результате находим:

$$f(\chi) = \frac{2\pi a}{m} \left[ 1 + 2a \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3} \left( 2 + \frac{\cos \chi}{2 \sin \frac{\chi}{2}} \ln \frac{1 + \sin \frac{\chi}{2}}{1 - \sin \frac{\chi}{2}} \right) \right] - \\ - \frac{2\pi a}{m} (\sigma\sigma') \left[ 1 + 2a \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\chi}{2}}{2} \ln \frac{1 + \sin \frac{\chi}{2}}{1 - \sin \frac{\chi}{2}} \right) \right]. \quad (5.14)$$

Заслуживает внимания особенность полученного выражения. При углах  $\chi$ , близких к  $\pi$ , функция  $f$  для частиц

с противоположными спинами имеет логарифмическую особенность:

$$f(\chi) \sim (1 - \sigma\sigma') \ln \frac{1}{\pi - \chi}. \quad (5.15)$$

Ясно, что в этом случае использованное здесь приближение, строго говоря, неприменимо. Особенность функции  $f$  при  $\chi = \pi$  является отражением особенности в амплитуде рассеяния возбуждений, сталкивающихся под углом  $\pi$  (см. гл. IV). Правильное выражение в этом случае можно получить, просуммировав основные члены ряда теории возмущений, т. е. члены, в которых логарифм входит в максимальной степени (на единицу меньшей степени  $a$ ). Если считать угол  $\chi$  в точности равным  $\pi$ , но зато  $\lambda = p^2 + p'^2 - 2p_0^2 \neq 0$ , то суммирование приводит к появлению в  $f$  множителя

$$\frac{1}{1 + a \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3} \left( \ln \frac{p_0^2}{\lambda} + \frac{i\pi}{2} \right)} \quad (5.16)$$

(действительная часть написана с логарифмической точностью). Так как согласно нашему предположению  $a$  положительно, это выражение стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Однако принципиально в случае ферми-газа возможен и случай  $a < 0$ . В противоположность бозе-газу в данном случае благодаря принципу Паули газ будет оставаться разреженным, и на первый взгляд все формулы сохраняют свою применимость. Если, однако, рассмотреть формулу (5.16), то становится ясно, что амплитуда рассеяния будет иметь полюс при каком-то малом мнимом значении  $\lambda$ . Это связано с нестабильностью основного состояния по отношению к образованию связанных пар квазичастиц с противоположными импульсами и спинами (эффект Купера), что является основной причиной сверхпроводимости металлов (см. гл. VII). Здесь мы ограничимся случаем  $a > 0$ .

Итак, найденное нами выражение для  $f$  несправедливо при углах, близких к  $\pi$ . Однако ввиду того, что особенность является логарифмической, она сказывается лишь в непосредственной близости особой точки. А так как в интересующие нас величины входят лишь интегралы от  $f$  с регулярными функциями, то логарифмическая особенность функции  $f$  не существенна.

Подставляя формулу (5.14) в (2.12), находим значение эффективной массы

$$\frac{m}{m^*} = 1 - \frac{8}{15}(7 \ln 2 - 1) a^2 \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}. \quad (5.17)$$

Аналогичным образом из выражения (2.19) для скорости звука получаем:

$$u^2 = \frac{\pi^{4/3}}{3^{1/3}} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \frac{1}{m^2} + 2 \frac{\pi a}{m^2} \frac{N}{V} \left[ 1 + \frac{4}{15} a \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3} (11 - 2 \ln 2) \right]. \quad (5.18)$$

Из этой формулы нетрудно получить энергию основного состояния ферми-жидкости. Для этого воспользуемся соотношением (2.16)  $u^2 = \frac{N}{m} \frac{\partial \mu}{\partial N}$  и, дважды проинтегрировав (5.18), получим:

$$E = \int \mu dN = E^{(0)} + \frac{\pi a}{m} \frac{N^2}{V} \left[ 1 + \frac{6}{35} a \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3} (11 - 2 \ln 2) \right]. \quad (5.19)$$

Результаты (5.17) и (5.19) можно получить и непосредственно, путем интегрирования в формулах (5.9) и (5.11). Это демонстрирует справедливость основных положений теории ферми-жидкости для данной модели. Общий вывод этих положений будет дан в гл. IV.

В заключение представляет интерес, так же как и для бозе-газа, найти импульсное распределение частиц. Для этого необходимо вычислить матричный элемент

$$\bar{N}_{p, \frac{1}{2}} = \bar{N}_{p, -\frac{1}{2}} = \langle \Psi^* a_{p, \frac{1}{2}}^\dagger a_{p, \frac{1}{2}} \Psi \rangle, \quad (5.20)$$

где  $\Psi$  — истинная волновая функция взаимодействующих частиц. Подставим сюда функцию  $\Psi$ , вычисленную по теории возмущений с точностью до членов второго порядка (см. [15], стр. 161—162):

$$\begin{aligned} \Psi_n = & \Psi_n^{(0)} + \sum_m' \frac{(H_{int})_{mn} \Psi_m^{(0)}}{E_n - E_m} + \sum_m' \sum_k' \frac{(H_{int})_{mk} (H_{int})_{kn} \Psi_m^{(0)}}{(E_n - E_k) (E_n - E_m)} - \\ & - (H_{int})_{nn} \sum_m' \frac{(H_{int})_{mn} \Psi_m^{(0)}}{(E_n - E_m)^2} - \frac{\Psi_n^{(0)}}{2} \sum_m' \frac{|(H_{int})_{mn}|^2}{(E_n - E_m)^2}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Принимая во внимание, что в представлении, осуществляемом функциями  $\Psi_n^{(0)}$ , оператор  $a_{p \frac{1}{2}}^+ a_{p \frac{1}{2}}$  диагонален, получаем:

$$\bar{N}_{p \frac{1}{2}} - n_{p \frac{1}{2}} = \sum_m' \frac{|(H_{int})_{m0}|^2 \left( n_{p \frac{1}{2}}^{(m)} - n_{p \frac{1}{2}} \right)}{(E_0 - E_m)^2}, \quad (5.22)$$

где  $n_{p \frac{1}{2}}^{(m)}$  — число частиц с импульсом  $p$  и проекцией спина  $1/2$  в состоянии  $\Psi_m^{(0)}$  невзаимодействующей системы,  $n_{p \frac{1}{2}}$  — в основном состоянии. Распределение невзаимодействующих частиц  $n_{p \frac{1}{2}}$ , как уже отмечалось, совпадает с распределением возбуждений при  $T=0$ .

Подставляя сюда  $H_{int}$  из (5.1), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{N}_{p \frac{1}{2}} - n_{p \frac{1}{2}} = & \begin{cases} -\frac{16\pi^2 a^2}{(2\pi)^6 m^2} \int_{|p_1| < p_0} dp_1 \int_{|p_2| > p_0} dp_2 \int_{|p_3| > p_0} dp_3 \frac{\delta(p + p_1 - p_2 - p_3)}{[(p^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)/2m]^2}, \\ \quad \text{при } |p| < p_0, \\ \\ \frac{16\pi^2 a^2}{(2\pi)^6 m^2} \int_{|p_1| > p_0} dp_1 \int_{|p_2| < p_0} dp_2 \int_{|p_3| < p_0} dp_3 \frac{\delta(p + p_1 - p_2 - p_3)}{[(p^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)/2m]^2}, \\ \quad \text{при } |p| > p_0. \end{cases} \quad (5.23) \end{aligned}$$

Таким образом, оказывается, что импульсное распределение частиц отличается от распределения квазичастиц  $n_{p \frac{1}{2}}$  только во втором порядке по  $a$ . Интеграл выражения (5.23) по всем  $p$ , очевидно, равен нулю, что соответствует равенству числа частиц жидкости и числа квазичастиц. Интересно отметить, что при  $|p| = p_0$  функция  $\bar{N}_{p \frac{1}{2}}$  имеет скачок.

В гл. III будет показано, что это есть общее свойство ферми-жидкостей.

Вычисление интегралов (5.23)<sup>1)</sup> приводит к довольно громоздким выражениям, которые мы не будем полностью здесь выписывать. Приведем только некоторые предельные значения:

$$\begin{aligned}
 N_{0, \frac{1}{2}} &= 1 - 2a^2 \left( \frac{3}{\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right), \\
 N_{p_0-0, \frac{1}{2}} &= 1 - 2a^2 \left( \frac{3}{\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( \frac{1}{3} + \ln 2 \right), \\
 N_{p_0+0, \frac{1}{2}} &= 2a^2 \left( \frac{3}{\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( \ln 2 - \frac{1}{3} \right), \\
 N_{p_0-0, \frac{1}{2}} - N_{p_0+0, \frac{1}{2}} &= 1 - 4a^2 \left( \frac{3}{\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \ln 2, \\
 N_{p \gg p_0, \frac{1}{2}} &= \frac{16a^2}{9} \left( \frac{3}{\pi} \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( \frac{p_0}{p} \right)^4.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Таким образом, при  $p < p_0$  функция  $N_p$  близка к 1, причем слегка убывает при увеличении  $p$  от 0 до  $p_0$ . Затем  $N_p$  скачком уменьшается до значения порядка  $a^2 \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}$  и при  $p \gg p_0$  убывает пропорционально  $a^2 \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \left( \frac{p_0}{p} \right)^4$ .

---

<sup>1)</sup> Эти вычисления проделаны В. А. Беляковым [23].

## ГЛАВА II

# МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ПРИ $T=0$

### § 6. Представление взаимодействия

Метод вторичного квантования в той форме, в которой он изложен в предыдущей главе, непригоден для решения большого круга задач. Фактически его можно применять только в случае слабого взаимодействия между частицами. При этом либо применима теория возмущений, либо гамильтониан настолько упрощается, что его легко диагонализировать. Однако часто приходится сталкиваться с таким положением, когда нельзя ограничиться несколькими первыми членами ряда теории возмущений. В этих случаях необходим метод, который давал бы сравнительно простые и наглядные правила написания любого члена ряда теории возмущений.

Довольно часто в силу тех или иных физических условий из совокупности всех членов ряда теории возмущений удается выделить последовательность (как правило, бесконечную) так называемых «главных» членов, превосходящих остальные по порядку величин. Задача тем самым сводится к суммированию этой последовательности.

В общем же случае, когда все члены ряда теории возмущений оказываются одного порядка, задача теории состоит в получении различных общих соотношений (например, формулы (2.1), связывающей граничный импульс Ферми  $p_0$  и число частиц жидкости; эта формула лежит в основе теории ферми-жидкости Ландау). Для этих целей наиболее удобна развиваемая в этой главе диаграммная техника, заимствованная из квантовой теории поля <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> См., например, [24].

Изложение методов квантовой теории поля мы начнем с того, что представим аппарат вторичного квантования в несколько иной форме. Введем операторы «поля частиц»:

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \sum_i \varphi_i(\xi) a_i, \\ \psi^+(\xi) &= \sum_i \varphi_i^*(\xi) a_i^+, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где  $a_i$ ,  $a_i^+$  — знакомые нам по предыдущей главе операторы вторичного квантования,  $\varphi_i(\xi)$  — волновая функция частицы в состоянии  $i$ . Операторы  $\psi(\xi)$  и  $\psi^+(\xi)$  можно интерпретировать как операторы уничтожения или, соответственно, возникновения частицы в данной точке  $\xi$ -пространства. Из § 3 следуют соотношения коммутации для этих операторов:

$$\begin{aligned}\psi(\xi)\psi^+(\xi') \mp \psi^+(\xi')\psi(\xi) &= \delta(\xi - \xi'), \\ \psi(\xi)\psi(\xi') \mp \psi(\xi')\psi(\xi) &= 0, \\ \psi^+(\xi)\psi^+(\xi') \mp \psi^+(\xi')\psi^+(\xi) &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где верхний знак соответствует статистике Бозе, а нижний — статистике Ферми. Одночастичный оператор  $F^{(1)}$  запишется в новом представлении в виде

$$F^{(1)} = \int \psi^+(\xi) f^{(1)} \psi(\xi) d\xi. \quad (6.3)$$

Аналогичным образом записываются двухчастичные и более сложные операторы.

Нетрудно записать гамильтониан через операторы  $\psi$  и  $\psi^+$ . Например, для системы частиц со спином  $1/2$  в отсутствие магнитного поля гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned}H &= \int \left[ \frac{1}{2m} \nabla \psi_\alpha^+(r) \nabla \psi_\alpha(r) + U(r) \psi_\alpha^+(r) \psi_\alpha(r) \right] dr + \\ &+ \frac{1}{2} \int \int \psi_\alpha^+(r) \psi_\beta^+(r') U^{(2)}(r, r') \psi_\beta(r') \psi_\alpha(r) dr dr' + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь предполагается, что взаимодействие между частицами не зависит от их спина. Индексы  $\alpha$  и  $\beta$  означают проекцию спина, причем подразумевается суммирование по парам оди-

наковых индексов. Для системы бозе-частиц со спином нуль гамильтониан отличается только отсутствием индексов у операторов  $\psi$ . Обобщение на более сложные случаи не представляет труда.

Внешний вид формулы (6.4) совпадает с выражением для средней энергии системы  $N$  частиц, находящихся в одинаковых состояниях  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ , нормированных соотношением  $\int |\psi_\alpha|^2 d\mathbf{r} = N$ . Основываясь на этом сходстве, можно всегда легко найти гамильтониан в представлении вторичного квантования.

Кроме гамильтониана, существенное значение имеет оператор плотности числа частиц в данной точке. Поскольку в обычном представлении он имеет вид  $n(\mathbf{r}) = \sum_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$ , то здесь мы получаем:

$$n(\mathbf{r}) = \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}_a) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \psi_\alpha(\mathbf{r}_a) d\mathbf{r}_a = \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}). \quad (6.5)$$

Оператор числа частиц, соответственно, имеет вид

$$N = \int n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Предположим теперь, что мы имеем некоторую систему частиц с гамильтонианом  $H$ . Определим, как происходит изменение состояния этой системы со временем. Для этого необходимо решить уравнение Шредингера:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = H\Phi \quad (6.6)$$

( $\Phi$  — волновая функция системы). Решение уравнения (6.6) может быть записано в символической форме<sup>1)</sup>:

$$\Phi(t) = e^{-iHt} \Phi_H, \quad (6.7)$$

где  $\Phi_H$  — функция, не зависящая от времени.

Изменение со временем матричного элемента какого-либо оператора  $F$  можно найти с помощью формулы (6.7):

$$F_{nm}(t) = \langle \Phi_n^*(t) F \Phi_m(t) \rangle = \langle \Phi_{Hn}^* e^{iHt} F e^{-iHt} \Phi_{Hm} \rangle. \quad (6.8)$$

<sup>1)</sup> Оператор  $e^{-iHt}$  представляет собой символическую запись ряда  $1 - iHt + \dots + \frac{1}{n!} (-iHt)^n + \dots$



Последнее выражение можно интерпретировать как матричный элемент по функциям  $\Phi_H$  от оператора

$$\tilde{F}(t) = e^{iHt} F e^{-iHt}. \quad (6.9)$$

Это означает переход к новому представлению, которое называется гайзенберговским. Рассмотренное ранее представление, в котором операторы  $F$  не зависят от времени (например,  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\psi^+(\mathbf{r})$ ), называется шредингеровским. Наиболее существенным свойством гайзенберговского представления является то, что волновые функции  $\Phi_H$  не зависят от времени. Временная зависимость переносится на операторы; из (6.9) находим

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t} = i(H\tilde{F} - \tilde{F}H) \equiv i[H, \tilde{F}]. \quad (6.10)$$

В шредингеровском представлении дело обстоит как раз наоборот. Операторы не зависят от времени (если речь не идет о переменном внешнем поле), а волновая функция зависит от времени. Для самого гамильтониана, как видно из (6.9), оба представления совпадают.

Если мы рассматриваем стационарное состояние системы, то волновая функция  $\Phi_{Hn}$  удовлетворяет уравнению

$$H\Phi_{Hn} = E_n \Phi_{Hn}. \quad (6.11)$$

Из формулы (6.8) в этом случае имеем:

$$F_{nm}(t) = \langle \Phi_{Hn}^* F \Phi_{Hm} \rangle e^{i(E_n - E_m)t}. \quad (6.12)$$

Рассмотрим, например, систему невзаимодействующих частиц без спина. В качестве  $\varphi_i(\xi)$  выберем функции свободных частиц  $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$  ( $V$  — объем). Оператор  $\psi$  в шредингеровском представлении будет иметь вид

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (6.13)$$

С помощью формулы (6.4) находим, что гамильтониан в шредингеровском представлении имеет вид (3.13), т. е.  $H = \sum_{\mathbf{p}} \varepsilon_0(\mathbf{p}) n_{\mathbf{p}}$ , где  $\varepsilon_0(\mathbf{p})$  — энергия свободных частиц.

Поэтому, согласно формуле (6.9), оператор  $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$  в гайзенберговском представлении оказывается равным

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p e^{i \sum_{p'} \varepsilon_0(p') n_{p'} t} a_p e^{-i \sum_{p''} \varepsilon_0(p'') n_{p''} t} e^{i p r} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p a_p e^{i [p r - \varepsilon_0(p) t]}. \quad (6.14)\end{aligned}$$

Следует заметить, что гайзенберговские операторы  $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$ , вообще говоря, не удовлетворяют правилам коммутации (6.2) для соответствующих шредингеровских операторов. Однако в случае, когда операторы  $\tilde{\psi}$  берутся в один момент времени, из формул (6.9) и (6.2) следует, что правила коммутации этих операторов совпадают с правилами для шредингеровских операторов  $\psi(\mathbf{r})$ .

Кроме рассмотренных двух представлений, имеется еще одно, очень важное для дальнейшего, представление промежуточного типа, называемое представлением взаимодействия. Свойства этого представления лежат в основе методов квантовой теории поля.

Выделим из гамильтониана часть  $H_{int}$ , соответствующую взаимодействию частиц:

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (6.15)$$

и произведем следующее преобразование шредингеровской волновой функции системы:

$$\Phi_i = e^{i H_0 t} \Phi. \quad (6.16)$$

Если продифференцировать по времени функцию  $\Phi_i$ , то мы получим:

$$i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} = -H_0 \Phi_i + e^{i H_0 t} (H_0 + H_{int}) \Phi = e^{i H_0 t} H_{int} e^{-i H_0 t} \Phi_i. \quad (6.17)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}i \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} &= H_{int}(t) \Phi_i, \\ H_{int}(t) &= e^{i H_0 t} H_{int} e^{-i H_0 t}.\end{aligned} \quad (6.18)$$

Функции  $\Phi_i$  осуществляют представление взаимодействия. Любой оператор в этом представлении получается из шре-

дингеровского по той же формуле (6.18), что и  $H_{int}(t)$ . Отсюда следует, что всякий оператор  $F(t)$  в этом представлении удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F(t)}{\partial t} = i [H_0, F(t)], \quad (6.19)$$

т. е. тому же уравнению, что и гайзенберговский оператор для системы невзаимодействующих частиц. Таким образом, мы приходим к выводу, что в представлении взаимодействия все операторы имеют тот же вид, что и гайзенберговские операторы для соответствующей невзаимодействующей системы, а волновая функция удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом  $H_{int}(t)$ . Возможность использования «свободных» операторов является большим преимуществом этого представления.

Определим теперь зависимость функции в представлении взаимодействия  $\Phi_i(t)$  от времени. При этом, поскольку операторы  $H_{int}(t)$  в разные моменты времени не коммутируют друг с другом, мы не можем записать решение уравнения (6.17) просто в виде

$$\Phi_i(t) = \text{const } e^{-i \int^t H_{int}(t') dt'}.$$

Поэтому поступим следующим образом. Пусть нам известно значение  $\Phi_i$  в некоторый момент  $t_0$ . Перейдем от дифференциального уравнения (6.17) к интегральному, для чего проинтегрируем обе части (6.17) по времени в пределах от  $t_0$  до  $t$  ( $t > t_0$ ). Имеем:

$$\Phi_i(t) = \Phi_i(t_0) - i \int_{t_0}^t H_{int}(t') \Phi_i(t') dt'.$$

Решение этого уравнения мы будем писать в виде ряда величине  $H_{int}$ :

$$\Phi_i(t) = \Phi_i^{(0)}(t) + \Phi_i^{(1)}(t) + \dots$$

В нулевом приближении  $\Phi_i^{(0)}(t) = \Phi_i(t_0)$ . В первом приближении

$$\Phi_i^{(1)}(t) = -i \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1 \Phi_i(t_0);$$

во втором приближении

$$\Phi_i^{(2)}(t) = - \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} H_{int}(t_2) dt_2 \Phi_i(t_0);$$

в  $n$ -м приближении

$$\begin{aligned} \Phi_i^{(n)}(t) = & (-i)^n \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1 \int_{t_1}^{t_1} H_{int}(t_2) dt_2 \dots \\ & \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H_{int}(t_n) dt_n \Phi_i(t_0). \end{aligned}$$

Из структуры ряда для  $\Phi_i(t)$  следует, что весь результат можно представить в виде

$$\Phi_i(t) = S(t, t_0) \Phi_i(t_0), \quad (6.20)$$

где матрица  $S(t, t_0)$  определяется рядом

$$\begin{aligned} S(t, t_0) = & 1 - i \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1 + \dots \\ & \dots + (-i)^n \int_{t_0}^t H_{int}(t_1) dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} H_{int}(t_n) dt_n + \dots \quad (6.21) \end{aligned}$$

Для ряда (6.21) характерно, что в нем операторы  $H_{int}$ , взятые в более поздние моменты времени, всегда стоят слева от операторов, взятых в более ранние моменты, поскольку всегда

$$t > t_1 > t_2 > \dots > t_n > t_0.$$

Выражение (6.21) можно сделать более симметричным. Рассмотрим  $n$ -й член ряда

$$(-i)^n \int_{t > t_1 \dots > t_0} \dots \int H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \dots H_{int}(t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

и переобозначим в нем произвольным образом переменные интегрирования  $t_1, \dots, t_n \rightarrow t_{p_1}, t_{p_2}, \dots, t_{p_n}$ , отчего, разумеется, это выражение не изменится. Прodelав все возможные перестановки переменных  $t_1, \dots, t_n$ , сложив все выра-

жения и разделив на число перестановок  $(n!)$ , мы распространим область интегрирования по каждой переменной на весь интервал от  $t_0$  до  $t$ . Существенно при этом, однако, что операторы  $H_{int}$  под знаком интеграла всегда должны быть расположены слева направо в порядке убывания времен. Обозначив операцию такого упорядочения символом  $T$ , запишем выражение для  $n$ -го члена ряда в виде

$$S^{(n)}(t, t_0) = \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t \dots \int_{t_1}^t T \{ H_{int}(t_1) \dots H_{int}(t_n) \} dt_1 \dots dt_n. \quad (6.22)$$

Теперь нетрудно проверить, что выражение (6.21) может быть записано как

$$S(t, t_0) = T \exp \left\{ -i \int_{t_0}^t H_{int}(t') dt' \right\}, \quad (6.23)$$

в чем легко убедиться, разложив экспоненту в ряд и воспользовавшись определением операции упорядочения  $T$ . Оператор  $S(t, t_0)$  обладает очевидным свойством

$$S(t_2, t_1) S(t_1, t_0) = S(t_2, t_0) \quad t_2 > t_1 > t_0. \quad (6.24)$$

Формулы (6.16) и (6.18) устанавливают связь между шредингеровским представлением и представлением взаимодействия. Соотношение (6.20) дает возможность найти связь между представлением взаимодействия и гайзенберговским представлением. Предположим, что преобразование волновых функций выражается соотношением

$$\Phi_i(t) = Q(t) \Phi_H,$$

где  $Q$  — унитарный оператор. Из формулы (6.20) находим:

$$Q(t) = S(t, t_0) Q(t_0),$$

откуда, согласно (6.24), следует:

$$Q(t) = S(t, \alpha) P,$$

где  $\alpha$  — некоторый момент времени, а  $P$  — оператор, не зависящий от времени. Для его определения подставим в соотношение  $\Phi_i(t) = Q(t) \Phi_H$  формулы (6.16) и (6.7), выражаю-

щие  $\Phi_i$  и  $\Phi_H$  через шредингеровскую функцию  $\Phi$ . При этом получаем:

$$e^{iH_0 t} = S(t, \alpha) P e^{iH t}.$$

Учитывая, что  $S(\alpha, \alpha) = 1$ , находим:

$$P = e^{iH_0 \alpha} e^{-iH \alpha}.$$

На этом этапе удобно ввести предположение о так называемом «адиабатическом включении взаимодействия»<sup>1)</sup>. Положим, что в момент времени  $t = -\infty$  взаимодействие между частицами отсутствовало, а затем было бесконечно медленно «включено». Если теперь устремить  $\alpha$  к  $-\infty$ , то  $P \rightarrow 1$  и, следовательно,

$$\Phi_i(t) = S(t) \Phi_H, \quad (6.25)$$

где

$$S(t) = S(t, -\infty). \quad (6.26)$$

Пользуясь свойством (6.24), находим:

$$S(t_2, t_1) = S(t_2) S^{-1}(t_1). \quad (6.27)$$

Соотношение между операторами в представлении взаимодействия и гайзенберговскими операторами на основании формулы (6.25) имеет вид

$$\tilde{F}(t) = S^{-1}(t) F(t) S(t). \quad (6.28)$$

В дальнейшем нам часто будут встречаться хронологизированные произведения от нескольких гайзенберговских операторов, усредненные по основному состоянию системы  $\Phi_H^0$ :

$$\langle \Phi_H^{0*} T[\tilde{A}(t) \tilde{B}(t') \tilde{C}(t'') \dots] \Phi_H^0 \rangle. \quad (6.29)$$

При этом для фермиевских операторов мы несколько обобщим определение  $T$ -упорядочения по сравнению с данным при выводе формулы (6.23); для бозе-операторов мы сохраним старое определение. Под  $T$ -произведением фермиевских операторов  $A(t_1) B(t_2) C(t_3) \dots$  мы будем теперь понимать

<sup>1)</sup> Следует сразу же подчеркнуть, что использованное здесь «адиабатическое включение взаимодействия» есть чисто формальный прием. Он дает возможность наиболее коротким путем получить правильный результат, но вовсе не является необходимым (см., например, [25]).

их произведение слева направо в порядке убывания времен, умноженное на  $(-1)^P$ , где  $P$  — число перестановок фермиевских операторов друг с другом, в результате которых из  $A(t_1)B(t_2)C(t_3) \dots$  получается хронологизированное произведение. Так, если  $F_1(t_1)$ ,  $F_2(t_2)$  — фермиевские, а  $B_1(t_3)$ ,  $B_2(t_4)$  — бозевские операторы, то

$$\begin{aligned} T\{F_1(t_1)F_2(t_2)\} &= \begin{cases} F_1(t_1)F_2(t_2), & t_1 > t_2, \\ -F_2(t_2)F_1(t_1), & t_1 < t_2, \end{cases} \\ T\{B_1(t_3)F_1(t_1)\} &= \begin{cases} B_1(t_3)F_1(t_1), & t_3 > t_1, \\ F_1(t_1)B_1(t_3), & t_3 < t_1, \end{cases} \\ T\{B_1(t_3)B_2(t_4)\} &= \begin{cases} B_1(t_3)B_2(t_4), & t_3 > t_4, \\ B_2(t_4)B_1(t_3), & t_3 < t_4. \end{cases} \end{aligned}$$

Новое определение  $T$ -упорядочения в применении к операторам  $H_{int}(t)$  совпадает со старым, поскольку в  $H_{int}$  фермиевские операторы всегда входят парами. Разумеется, все предписания относительно операции  $T$ -упорядочения одинаковы для операторов гайзенберговского представления и представления взаимодействия.

Пусть в (6.29) порядок времен таков, что

$$t > t' > t'' > \dots$$

Перейдем к операторам в представлении взаимодействия по формуле (6.28). При этом получим:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_H^{0*} S^{-1}(t) A(t) S(t) S^{-1}(t') B(t') S(t') \dots \Phi_H^0 \rangle &= \\ = \langle \Phi_H^{0*} S^{-1}(\infty) S(\infty, t) A(t) S(t, t') B(t') \dots \Phi_H^0 \rangle &= \\ = \langle \Phi_H^{0*} S^{-1}(\infty) T[A(t) B(t') C(t'') \dots S(\infty)] \Phi_H^0 \rangle. & \end{aligned} \quad (6.30)$$

Очевидно, что преобразование (6.29) к виду (6.30) не зависит от порядка времен  $t, t', t''$ , т. е. справедливо в любом случае.

Теперь нам остается определить величину  $\Phi_H^{0*} S^{-1}(\infty) = [S(\infty) \Phi_H^0]^*$ , т. е. результат действия оператора  $S(\infty)$  на функцию основного состояния. Из (6.20) и (6.25) следует:

$$\Phi_H^0 = \Phi_i(-\infty), \quad S(\infty) \Phi_H^0 = \Phi_i(\infty).$$

Таким образом,  $S(\infty) \Phi_H^0$  представляет собой функцию  $\Phi_i(\infty)$ , которая получилась из функции основного состояния  $\Phi_i(-\infty)$

в результате адиабатического включения взаимодействия между частицами. Как известно, основное состояние системы, т. е. состояние, в котором энергия минимальна, обязательно невырождено. Но, согласно общим принципам квантовой механики (см. [15], стр. 173), система, находящаяся в некотором невырожденном стационарном состоянии, не может перейти в другое состояние под влиянием бесконечно медленного возмущения. Следовательно, мы приходим к выводу, что функция  $\Phi_i(\infty) = S(\infty) \Phi_H^0$  может отличаться от  $\Phi_H^0$  только фазовым множителем

$$S(\infty) \Phi_H^0 = e^{iL} \Phi_H^0. \quad (6.31)$$

Отсюда следует окончательное соотношение

$$\begin{aligned} \langle \Phi_H^{0*} T[\tilde{A}(t) \tilde{B}(t') \tilde{C}(t'') \dots] \Phi_H^0 \rangle &= \\ &= \frac{\langle \Phi_H^{0*} T[A(t) B(t') C(t'') \dots S(\infty)] \Phi_H^0 \rangle}{\langle \Phi_H^{0*} S(\infty) \Phi_H^0 \rangle}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Подчеркнем, что это заключение справедливо только для усреднения по основному состоянию системы, так как любой другой уровень энергии системы многократно вырожден, и в результате столкновений между частицами система переходит, вообще говоря, в другое состояние. Таким образом, при усреднении по возбужденному состоянию справедлива формула (6.30), но не (6.32).

В этой главе мы будем рассматривать системы при  $T=0$ , т. е. в основном состоянии. Для простоты мы будем обозначать соответствующие средние просто как  $\langle \dots \rangle$  и операторы в представлении взаимодействия писать обычным шрифтом. Там, где будут нужны шредингеровские операторы, мы будем подчеркивать их зависимость только от координат (например,  $\psi(\mathbf{r})$ ) и особо оговорим эти случаи.

## § 7. Гриновская функция<sup>1)</sup>

**1. Определение.** Гриновские функции свободных частиц. Одной из наиболее существенных величин, характеризующих в технике квантовой теории поля микроскопические свойства системы, является одночастичная функция

<sup>1)</sup> Этот параграф в значительной части написан по материалам работы В. М. Галицкого и А. Б. Мигдала [26].



Грина<sup>1)</sup>. Она определяется как

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = -i \langle T(\tilde{\psi}_{\alpha}(x) \tilde{\psi}_{\beta}^{\dagger}(x')) \rangle. \quad (7.1)$$

Под  $x$  (или  $x'$ ) понимается совокупность четырех переменных — координаты  $r$  и времени  $t$ ;  $\alpha$  и  $\beta$  — спинные индексы.

Знание гриновской функции дает возможность вычислить среднее значение по основному состоянию для любого одночастичного оператора типа (3.2). Действительно, согласно формуле (6.3), имеем:

$$\overline{F^{(1)}} = \pm i \int \left[ \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ r' \rightarrow r}} f_{\alpha\beta}^{(1)}(x) G_{\alpha\beta}(x, x') \right] dr$$

(знак плюс для статистики Бозе, минус — для статистики Ферми). Например, плотность числа частиц и плотность потока частиц равны, соответственно,

$$n(x) = \pm i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ r' \rightarrow r}} G_{\alpha\alpha}(x, x'),$$

$$j(x) = \pm \frac{1}{m} \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ r' \rightarrow r}} (\nabla_r - \nabla_{r'}) G_{\alpha\alpha}(x, x').$$

Ниже мы покажем, что с помощью гриновской функции можно найти энергию как функцию объема, а следовательно, и уравнение состояния системы (зависимость давления от плотности) при  $T=0$ . Кроме того, будет показано, что полюсы амплитуды Фурье гриновской функции (7.1) определяют спектр возбуждений. Это дает возможность найти термодинамические функции системы при температурах, отличных от нуля (но, конечно, достаточно низких).

---

<sup>1)</sup> Термин «функция Грина» имеет в теории поля не тот смысл, что в теории линейных уравнений. Хотя гриновская функция удовлетворяет уравнению, в правой части которого стоит  $\delta$ -функция, но уравнение это в общем случае нелинейное (см. § 10). Исключения представляют гриновские функции свободных частиц, которые действительно являются функциями Грина линейных уравнений для гайзенберговских операторов поля  $\tilde{\psi}(r, t)$ . Термин «гриновская функция», первоначально применявшийся только в этом случае, был впоследствии перенесен на выражение (7.1) для любой взаимодействующей системы.

Очень большое значение имеет и то обстоятельство, что гриновскую функцию можно вычислять с помощью так называемой диаграммной техники (см. § 8 и 9), которая обладает значительными преимуществами перед теорией возмущений в обычной форме.

В этом параграфе мы займемся анализом общих свойств гриновской функции. При этом мы для простоты обозначений будем опускать индексы  $\alpha, \beta$ . Это не приводит к ошибкам, так как при отсутствии ферромагнетизма и внешнего магнитного поля  $G_{\alpha\beta}$  должна иметь вид  $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$ . Мы ограничимся здесь только этим случаем.

В данной главе мы рассмотрим свойства систем ферми-частиц, поскольку, как известно, бозе-система при абсолютном нуле обладает рядом существенных особенностей, связанных с наличием конденсата (бозе-системы будут рассмотрены в гл. V). Исключение составляют фононы — кванты колебаний твердого тела. Ввиду того, что число их не задано, конденсация в фононном газе не наступает и его свойства можно рассматривать обычными методами.

Гриновские функции однородных и бесконечных в пространстве систем при отсутствии внешних полей зависят лишь от разностей координат  $r - r'$  и  $t - t'$ . Разложим  $G$  в интеграл Фурье

$$G(x - x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G(p, \omega) e^{i[p(r - r') - \omega(t - t')]} \quad (7.2)$$

$$(d^4 p = d\mathbf{p} d\omega).$$

Функцию  $G(\mathbf{p}, \omega)$  очень просто найти для системы не взаимодействующих частиц. В случае системы ферми-частиц, подставляя в (7.1) выражение (6.14) для гайзенберговских операторов свободного поля и учитывая, что все уровни с  $|\mathbf{p}| < p_0$  заполнены, а с  $|\mathbf{p}| > p_0$  пусты, имеем:

$$G^{(0)}(x) = -\frac{i}{V} \sum_p e^{i[p\mathbf{r} - \varepsilon_0(\mathbf{p})t]} \begin{cases} 1 - n_p, & t > 0, \\ -n_p, & t < 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

где

$$n = a_p^+ a_p = \begin{cases} 1, & |\mathbf{p}| < p_0, \\ 0, & |\mathbf{p}| > p_0. \end{cases}$$

Перейдем к импульсному представлению. Согласно (7.3) имеем:

$$G^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = -i \left\{ \theta(|\mathbf{p}| - p_0) \int_0^{\infty} e^{i[\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p})]t} dt - \right. \\ \left. - \theta(p_0 - |\mathbf{p}|) \int_0^{\infty} e^{-i[\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p})]t} dt \right\}, \quad (7)$$

где

$$\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

Выражение для  $G(\mathbf{p}, \omega)$  содержит два интеграла типа

$$\int_0^{\infty} e^{ist} dt.$$

Определим интеграл такого типа как предел

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{ist - \delta t} dt = i \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{s + i\delta}. \quad (7.5)$$

Величина  $i\delta$  в знаменателе характеризует способ обхода полюса  $s=0$  при интегрировании этой функции, а именно:

$$\int F(s) \frac{ds}{s + i\delta} = \oint \frac{F(s)}{s} ds - i\pi F(0),$$

где  $\oint$  означает главное значение интеграла. Таким образом можно условно написать:

$$\frac{1}{s + i\delta} = \frac{1}{s} - i\pi\delta(s).$$

Иногда для обозначения величины  $\frac{1}{\pi} \frac{i}{s + i\delta}$  употребляют символ  $\delta_+(s)$

$$\delta_+(s) = \delta(s) - \frac{1}{i\pi s}. \quad (7.6)$$

С помощью формул (7.4) и (7.5) получаем:

$$G^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{\theta(|\mathbf{p}| - p_0)}{\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + i\delta} + \frac{\theta(p_0 - |\mathbf{p}|)}{\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) - i\delta}.$$

Замечая, что все отличие формулы для  $G$  при  $|\mathbf{p}| < p_0$  от формулы при  $|\mathbf{p}| > p_0$  заключается только в изменении знака перед  $\delta$ , мы можем написать окончательно:

$$G^{(0)}(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + i\delta \operatorname{sign}(|\mathbf{p}| - p_0)}. \quad (7.7)$$

Теперь рассмотрим систему фононов. Мы ограничимся простейшим случаем — продольными колебаниями в сплошной изотропной среде.

Прежде всего, определим, что мы будем подразумевать под операторами фононного поля.

Обозначим смещение точек среды посредством  $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$ . Импульс единицы объема будет равен  $\rho \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\rho$  — плотность. Согласно квантовой механике, величины  $\mathbf{q}$  и  $\dot{\mathbf{q}}$  заменяются операторами с правилами коммутации

$$\rho [\dot{q}_i(\mathbf{r}, t), q_k(\mathbf{r}', t)] = -i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{ik}. \quad (7.8)$$

Интеграл от формулы (7.8) по малому объему  $d\mathbf{r}$  дает обычное правило коммутации координаты и импульса.

Разложим оператор  $\mathbf{q}$  по плоским волнам. В данном случае задание волнового вектора  $\mathbf{k}$  однозначно определяет частоту, которую мы обозначим через  $\omega_0(\mathbf{k})$ . Таким образом, имеем:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \{q_{\mathbf{k}} e^{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_0(\mathbf{k})t]} + q_{\mathbf{k}}^+ e^{-i[\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_0(\mathbf{k})t]}\}. \quad (7.9)$$

Мы рассматриваем продольные волны, а потому фурье-компоненты вектора  $\mathbf{q}$  будут направлены вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Ввиду этого мы в дальнейшем будем пользоваться проекцией  $q_{\mathbf{k}}$  на направление  $\mathbf{k}$ , которую обозначим посредством  $q_k$ .

Введем теперь операторы  $b_k$ , связанные с  $q_k$  соотношением

$$q_k = \frac{b_k}{\sqrt{2\rho\omega_0(k)}}. \quad (7.10)$$

Тогда из (7.8) следует, что операторы  $b_k$  удовлетворяют обычным соотношениям коммутации для бозевских операторов возникновения и уничтожения.

Оператор кинетической энергии колебаний равен

$$K = \frac{\rho}{2} \int [\dot{q}(r, t)]^2 dr. \quad (7.11)$$

Воспользовавшись тем, что при колебаниях средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии, можно получить формулу

$$\bar{H} = 2\bar{K} = \sum_k \omega_0(k) \left( n_k + \frac{1}{2} \right), \quad (7.12)$$

где  $n_k = b_k^+ b_k$ .

В качестве операторов свободного фононного поля можно было бы принять операторы смещений  $q$ . Однако, более удобно определить их несколько иначе, имея в виду изучение взаимодействия фононов с электронами в металле (см. § 8), а именно:

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_k \sqrt{\frac{\omega_0(k)}{2}} \{ b_k e^{i[kr - \omega_0(k)t]} + b_k^+ e^{-i[kr - \omega_0(k)t]} \}. \quad (7.13)$$

Эта формула относится к продольным фононам в модели Дебая (см. § 1), если ограничить суммирование по  $k$  условием  $|k| < k_D$ .

Подчеркнем еще раз, что операторы фононного поля действительны, поскольку они соответствуют действительным смещениям атомов решетки. Это свойство, очевидно, сохраняется и при учете взаимодействия фононов между собой и с другими частицами.

Гриновская функция фононов обозначается обычно буквой  $D$ . Определение этой функции аналогично формуле (7.1)

$$D(x, x') = -i \langle T(\tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(x')) \rangle. \quad (7.14)$$

Подставляя сюда в качестве операторов  $\tilde{\varphi}(x)$  — свободные операторы (7.13) и учитывая, что в основном состоянии фононы отсутствуют, получаем:

$$D^{(0)}(x) = -\frac{i}{V} \sum_k \frac{\omega_0(k)}{2} \begin{cases} e^{i[kr - \omega_0(k)t]}, & t \geq 0, \\ e^{-i[kr - \omega_0(k)t]}, & t < 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

Взяв фурье-компоненту этого выражения по  $r$  и  $t$ , получаем:

$$\begin{aligned} D^{(0)}(k, \omega) &= \frac{\omega_0(k)}{2} \left[ \frac{1}{\omega - \omega_0(k) + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_0(k) - i\delta} \right] = \\ &= \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 - \omega_0^2(k) + i\delta}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

**2. Аналитические свойства.** Рассмотрим теперь общие свойства гриновских функций систем взаимодействующих частиц. Начнем с ферми-системы. Переходя к шредингеровским операторам, получаем:

$$\begin{aligned} G(r - r', t - t') &= -i \langle e^{iHt} \psi(r) e^{-iH(t-t')} \psi^+(r') e^{-iHt'} \rangle = \\ &= -i \sum_s \langle \Phi_H^{0*} e^{iHt} \psi(r) e^{-iHt} \Phi_s \rangle \langle \Phi_s^* e^{iHt'} \psi(r') e^{-iHt'} \Phi_H^0 \rangle = \\ &= -i \sum_s \psi_{0s}(r) \psi_{s0}^+(r') e^{-i(E_s - E_0)(t-t')}, \quad t \geq t', \end{aligned}$$

$$G(r - r', t - t') = i \sum_{s'} \psi_{0s'}^+(r') \psi_{s'0}(r) e^{i(E_{s'} - E_0)(t-t')}, \quad t < t'.$$

Координатная зависимость матричных элементов  $\psi_{nm}(r)$  и  $\psi_{nm}^+(r)$  для однородной системы имеет вид

$$\psi_{nm}(r) = \psi_{nm}(0) e^{-ip_{nm}r}, \quad \psi_{nm}^+(r) = \psi_{nm}^+(0) e^{ip_{nm}r},$$

где  $p_{nm} = p_n - p_m$ , а  $p_n$  и  $p_m$  — импульсы системы в состоя-

ниях  $n$  и  $m$ <sup>1)</sup>. Считая  $p_0 = 0$ , имеем:

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -i \sum_s |\psi_{0s}(0)|^2 e^{i\mathbf{p}_s(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{-i(E_s - E_0)(t - t')},$$

$$t > t',$$

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = i \sum_{s'} |\psi_{s'0}(0)|^2 e^{-i\mathbf{p}_{s'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} e^{i(E_{s'} - E_0)(t - t')}.$$
(7.17)

Оператор  $\psi^+(\mathbf{r})$  увеличивает число частиц на единицу. Ввиду этого суммирование по  $s$  при  $t > t'$  происходит по состояниям с числом частиц  $N + 1$ . Наоборот, суммирование по  $s'$  при  $t < t'$  происходит по состояниям с числом частиц  $N - 1$ . Введем обозначения

$$E_s - E_0(N) = \varepsilon_s + \mu, \quad (7.18)$$

где

$$\varepsilon_s = E_s - E_0(N + 1) \quad (7.19)$$

— энергия возбуждения системы, которая по определению положительна, а  $\mu = E_0(N + 1) - E_0(N)$  — химический потенциал при  $T = 0$ . Аналогичным образом

$$E_{s'} - E_0(N) = E_{s'} - E_0(N - 1) -$$

$$- [E_0(N) - E_0(N - 1)] = \varepsilon_{s'} - \mu'. \quad (7.18')$$

Величины  $\varepsilon_{s'}$  и  $\mu'$  в последней формуле относятся к системе из  $N - 1$  частиц. Можно, однако, считать, что  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s'}$ ,  $\mu = \mu'$ . Это вносит погрешность лишь порядка  $1/N$ .

Далее, введем функции

$$A(\mathbf{p}, E) dE = (2\pi)^3 \sum_s |\psi_{0s}(0)|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_s), \quad E < \varepsilon_s < E + dE,$$

$$B(\mathbf{p}, E) dE = (2\pi)^3 \sum_{s'} |\psi_{s'0}(0)|^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_{s'}), \quad E < \varepsilon_{s'} < E + dE.$$
(7.20)

---

<sup>1)</sup> Это следует из того, что согласно квантовой механике (см. [15], стр. 58), оператор пространственного переноса равен  $e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}}$  ( $\hat{\mathbf{p}}$  — оператор импульса). Следовательно,  $\psi(\mathbf{r}) = e^{-i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}} \psi(0) e^{i\hat{\mathbf{p}}\mathbf{r}}$ . Отметим кстати, что если выразить  $\psi(\mathbf{r})$  в виде  $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum a_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$ , то, очевидно, получится  $\psi_{nm}(0) = \frac{1}{\sqrt{V}} (a_{-\mathbf{p}_{nm}})_{nm}$ .

Разложим теперь функцию  $G$  в интеграл Фурье<sup>1)</sup>:

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \int_0^{\infty} dE \left\{ \frac{A(\mathbf{p}, E)}{\omega - E - \mu + i\delta} + \frac{B(\mathbf{p}, E)}{\omega + E - \mu - i\delta} \right\}. \quad (7.21)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в этой формуле действительны и положительны. С помощью представления (7.21) можно исследовать аналитические свойства функции  $G(\mathbf{p}, \omega)$ .

Выделяя действительную и мнимую части функции  $G$ , находим:

$$\operatorname{Re} G(\mathbf{p}, \omega) = \int_0^{\infty} dE \left\{ \frac{A(\mathbf{p}, E)}{\omega - E - \mu} + \frac{B(\mathbf{p}, E)}{\omega + E - \mu} \right\}, \quad (7.22)$$

$$\operatorname{Im} G(\mathbf{p}, \omega) = \begin{cases} -\pi A(\mathbf{p}, \omega - \mu), & \omega > \mu, \\ \pi B(\mathbf{p}, \mu - \omega), & \omega < \mu \end{cases} \quad (7.23)$$

( $\oint$  означает главное значение интеграла). Таким образом, мнимая часть гриновской функции меняет знак при  $\omega = \mu$ . Сравнивая (7.23) и (7.22), можно найти следующее соотношение, связывающее между собой действительную и мнимую части:

$$\operatorname{Re} G(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} G(\mathbf{p}, \omega') \operatorname{sgn}(\omega' - \mu)}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (7.24)$$

Из формул (7.21) и (7.20) можно получить асимптотическую формулу для  $G$  при  $\omega \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} G(\mathbf{p}, \omega) &\rightarrow \frac{1}{\omega} \int_0^{\infty} dE [A(\mathbf{p}, E) + B(\mathbf{p}, E)] = \\ &= \frac{1}{\omega} \left\{ (2\pi)^3 \sum_s |\psi_{0s}(0)|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_s) + \right. \\ &\quad \left. + (2\pi)^3 \sum_{s'} |\psi_{s'0}(0)|^2 \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_{s'}) \right\}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Формула такого типа была впервые получена Леманом [27] в квантовой теории поля.



Нетрудно увидеть, что коэффициент при  $1/\omega$  равен фурье-компоненте от антикоммутатора

$$\psi(r)\psi^+(r') + \psi^+(r')\psi(r) = \delta(r - r'),$$

т. е. единице. Для этого достаточно усреднить антикоммутатор по основному состоянию (отчего его значение не изменится), преобразовать полученное среднее аналогично формуле (7.17) и взять фурье-компоненту по  $r - r'$ . Таким образом, получаем:

$$G(p, \omega) \rightarrow \frac{1}{\omega} \text{ при } \omega \rightarrow \infty. \quad (7.21')$$

Выясним свойства  $G$  как функции комплексной переменной  $\omega$ . Из формулы (7.24) следует, что функция  $G(p, \omega)$  не является аналитической. У функции, аналитичной в верхней полуплоскости, связь между действительной и мнимой частями выражается соотношением, отличающимся от (7.24) заменой  $\text{sign}(\omega' - \mu)$  на единицу. У функции, аналитичной в нижней полуплоскости, вместо  $\text{sign}(\omega' - \mu)$  стоит  $-1$ .

Рассмотрим наряду с  $G$  две функции  $G_R$  и  $G_A$ , аналитичные, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях, определив их соотношениями (при вещественных  $\omega$ )

$$\begin{aligned} \text{Re } G &= \text{Re } G_R = \text{Re } G_A, \\ \text{Im } G_R &= \text{Im } G \text{ sign}(\omega - \mu), \\ \text{Im } G_A &= -\text{Im } G \text{ sign}(\omega - \mu). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Из (7.25) следует, что на действительной полуоси  $\omega - \mu < 0$   $G_R$  совпадает с  $G^*$ ; соответственно,  $G_A$  совпадает с  $G^*$  при  $\omega - \mu > 0$ . Таким образом, мы можем написать:

$$\begin{aligned} G_R(p, \omega) &= \begin{cases} G(p, \omega), & \omega > \mu, \\ G^*(p, \omega), & \omega < \mu, \end{cases} \\ G_A(p, \omega) &= \begin{cases} G^*(p, \omega), & \omega > \mu, \\ G(p, \omega), & \omega < \mu. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.25')$$

Из (7.25') следует, что  $G_R$  является аналитическим продолжением  $G$  с полуоси  $\omega > \mu$ , а  $G_A$  — продолжением  $G$  с полуоси  $\omega < \mu$ .

В координатном представлении функции  $G_R$  и  $G_A$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} G_R(x-x') &= \begin{cases} -i \langle \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}^+(x') + \tilde{\psi}^+(x') \tilde{\psi}(x) \rangle & \text{при } t > t', \\ 0 & \text{при } t < t', \end{cases} \\ G_A(x-x') &= \begin{cases} 0 & \text{при } t > t', \\ i \langle \tilde{\psi}^+(x') \tilde{\psi}(x) + \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}^+(x') \rangle & \text{при } t < t'. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Действительно, проделывая те же операции, какие применялись при выводе (7.21), получаем:

$$G_R(\mathbf{p}, \omega) = \int_0^\infty dE \left\{ \frac{A(\mathbf{p}, E)}{\omega - E - \mu + i\delta} + \frac{B(\mathbf{p}, E)}{\omega + E - \mu + i\delta} \right\}, \quad (7.27)$$

$$G_A(\mathbf{p}, \omega) = G_R^*(\mathbf{p}, \omega).$$

Сравнивая действительную и мнимую части  $G_R$  и  $G_A$  с формулами (7.22) и (7.23), легко увидеть, что эти функции удовлетворяют соотношениям (7.25). Функции  $G_R$  и  $G_A$  называют запаздывающей и опережающей гринаовскими функциями.

Теперь перейдем к фононам. Оператор поля фононов действителен, т. е.  $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\chi}(x) + \tilde{\chi}^+(x)$ . Кроме того, надо учесть, что химический потенциал  $\mu = 0$  (см. § 1) и в основном состоянии частицы отсутствуют. Аналогично предыдущему находим:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') &= \\ &= \begin{cases} -i \sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 e^{-i(E_s-E_0)(t-t')} e^{i\mathbf{k}_s(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} & t > t', \\ -i \sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 e^{i(E_s-E_0)(t-t')} e^{-i\mathbf{k}_s(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} & t < t'. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Введем функцию

$$\begin{aligned} P(\mathbf{k}, E) dE &= (2\pi)^3 \sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s) = \\ &= (2\pi)^3 \sum_s |\chi_{0s}(0)|^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_s), \end{aligned}$$

где суммирование по  $s$  относится к таким состояниям, энергия которых  $E_s$  находится в пределах  $E < E_s - E_0 < E + dE$ .

Разлагая (7.28) в интеграл Фурье, получаем:

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \int_0^{\infty} P(\mathbf{k}, E) \left\{ \frac{1}{\omega - E + i\delta} - \frac{1}{\omega + E - i\delta} \right\} dE. \quad (7.29)$$

Мнимая часть этой функции всегда отрицательна

$$\text{Im } D(\mathbf{k}, \omega) = -\pi P(\mathbf{k}, |\omega|). \quad (7.30)$$

Связь действительной и мнимой частей выражается тем же соотношением, что и у функции  $G(\mathbf{p}, \varepsilon)$ . Отсюда следует, что аналитические свойства фононной гриновской функции такие же, как и у гриновской функции системы ферми-частиц с  $\mu = 0$ .

Поэтому можно построить две аналитические функции  $D_R$  и  $D_A$ , удовлетворяющие условиям (7.25) с  $\mu = 0$ . В координатном представлении эти функции имеют вид

$$\begin{aligned} D_R(x - x') &= \begin{cases} -i \langle \tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(x') - \tilde{\varphi}(x') \tilde{\varphi}(x) \rangle, & t > t', \\ 0, & t < t', \end{cases} \\ D_A(x - x') &= \begin{cases} 0, & t > t', \\ -i \langle \tilde{\varphi}(x') \tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(x') \rangle, & t < t'. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.31)$$

**3. Физический смысл полюсов.** Как уже было отмечено, знание функции Грина дает возможность найти целый ряд физических характеристик системы. В частности, из нее можно определить спектр элементарных возбуждений.

Рассмотрим ферми-систему, которая в начальный момент времени  $t'$  описывается волновой функцией

$$\Psi_0(t') = \psi_p^+(t') \Phi_i(t'), \quad (7.32)$$

где  $\psi_p^+(t')$  — оператор рождения частицы с импульсом  $\mathbf{p}$  в представлении взаимодействия, т. е.  $a_p^+ e^{i\varepsilon_0(\mathbf{p})t'}$ , а  $\Phi_i(t')$  — волновая функция основного состояния системы частиц в представлении взаимодействия. В момент  $t > t'$  волновая функция системы будет иметь вид

$$\Psi(t) = S(t, t') \psi_p^+(t') \Phi_i(t').$$

Найдем амплитуду вероятности состояния  $\Psi_0(t)$ . Она равна

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0^*(t) \Psi(t) \rangle &= \langle \Phi_i^*(t) \psi_p(t) S(t, t') \psi_p^+(t') \Phi_i(t') \rangle = \\ &= \langle \Phi_H^{0*} S^{-1}(t) \psi_p(t) S(t, t') \psi_p^+(t') S(t') \Phi_H^0 \rangle = \\ &= \langle \tilde{\psi}_p(t) \tilde{\psi}_p^+(t') \rangle = iG(p, t - t'), \quad t - t' \geq 0. \end{aligned} \quad (7.33)$$

Здесь был произведен переход от представления взаимодействия к гайзенберговскому представлению.

Для получения функции  $G(p, t)$  необходимо вычислить интеграл

$$G(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G(p, \omega) e^{-i\omega t}. \quad (7.34)$$

Ввиду того, что функция  $G(p, \omega)$  не является аналитической, мы разобьем этот интеграл на две части: от  $-\infty$

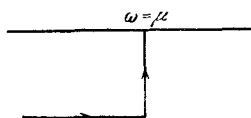


Рис. 2.

до  $\mu$  и от  $\mu$  до  $\infty$ . В первом интеграле  $G$  совпадает с аналитической функцией  $G_A$ , а во втором интеграле — с  $G_R$ . Как уже было отмечено выше, функция  $G_A$  не имеет особенностей в нижней полуплоскости. Поэтому в первом интеграле можно деформировать контур интегрирования (рис. 2). Если горизонтальный участок этого контура сдвинуть достаточно далеко в нижнюю полуплоскость, то вследствие множителя  $e^{-i\omega t}$  в (7.34) интеграл по этому участку

будет очень мал и, таким образом,

останется лишь  $\int_{\mu-i\infty}^{\mu} \frac{d\omega}{2\pi} G_A e^{-i\omega t}$ . Пе-

рейдем теперь ко второму инте-

гралу. Функция  $G_R$ , вообще го-

воря, имеет особенности в нижней полуплоскости. Предположим, что в четвертом квадранте комплексной переменной  $\omega$  —  $\mu$  особенностью, ближайшей к действительной оси, является простой полюс в точке  $\omega = \varepsilon(p) - i\gamma$ , причем  $\gamma \ll \varepsilon(p) - \mu$ . Деформируем контур интегрирования так, как показано на рис. 3. Горизонтальный участок этого контура, конечно, должен лежать выше следующей особенности

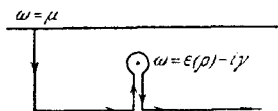


Рис. 3.

и не может быть сдвинут в  $-i\infty$ . Однако, взяв достаточно большое время  $t$ , мы можем сделать этот интеграл малым. Таким образом, остается интеграл по вертикальному участку и обход вокруг полюса:

$$\int_{\mu}^{\mu-i\infty} \frac{d\omega}{2\pi} G_R e^{-i\omega t} - i a e^{-i\varepsilon(p)t - \gamma t},$$

где  $a$  — вычет  $G_R$  в точке полюса. Ниже мы покажем, что при  $t \gg [\varepsilon(p) - \mu]^{-1}$  оба интеграла по вертикальным участкам контуров на рис. 2 и 3 дают малый вклад. Таким образом, в пределе больших времен  $t$  мы получаем:

$$iG(p, t) \approx a e^{-i\varepsilon(p)t - \gamma t}. \quad (7.35)$$

Если бы в начальном состоянии мы имели одну свободную частицу с импульсом  $p$  и энергией  $\varepsilon(p)$ , то величина, аналогичная (7.33), была бы равна  $e^{-i\varepsilon_0(p)(t-t')}$ . Отсюда следует, что в состоянии (7.32) имеется волновой пакет, который ведет себя, как квазичастица с энергией  $\varepsilon(p)$ , и затухает со временем по закону  $e^{-\gamma(t-t')}$ . Таким образом, энергия и затухание квазичастиц определяются вещественной и мнимой частями полюса функции  $G_R$  в нижней полуплоскости. Амплитуда волнового пакета связана с вычетом функции  $G_R$  в точке полюса.

Теперь покажем, что отброшенные нами части интегралов можно считать малыми в области импульсов, где  $\varepsilon(p) \approx \mu$ . Вспоминая, что  $G_A = G_R^*$ , находим сумму интегралов по вертикальным участкам контуров на рис. 2 и 3:

$$\int_{\mu}^{\mu-i\infty} (G_R - G_R^*) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = 2i \int_{\mu}^{\mu-i\infty} \text{Im } G_R e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Согласно феноменологическим соображениям, изложенным в § 2, условие  $\gamma \ll \varepsilon(p) - \mu$  имеет место только в окрестности  $\varepsilon(p) \approx \mu$ <sup>1)</sup>. Поэтому, считая  $t \gg \frac{1}{\varepsilon(p) - \mu}$ , можно

<sup>1)</sup> Справедливость предположения о том, что  $\gamma \ll \varepsilon(p) - \mu$  при  $\varepsilon(p) - \mu \rightarrow 0$ , строго доказана для многих конкретных примеров (см., например, § 21 и 22).

заменить  $G_R$  на  $\frac{a}{\omega - \varepsilon(\mathbf{p}) + i\gamma}$ . Вводя новую переменную  $t(\omega - \mu) = u$ , получаем:

$$-\frac{2\gamma a e^{-i\mu t}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{du e^{-ut}}{\gamma^2 + [\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu + iu]^2}.$$

Поскольку  $t \gg [\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu]^{-1}$ , то этот интеграл оказывается равным

$$-\frac{\gamma a e^{-i\mu t}}{\pi t [\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu]^2}.$$

Если считать  $t$  не слишком большим по сравнению с  $1/\gamma$ , то эта величина значительно меньше, чем результат обхода полюса на рис. 3.

Аналогичные соображения могут быть развиты и для состояния с волновой функцией

$$\Psi'_0(t) = \psi_p(t) \Phi_i(t). \quad (7.36)$$

Рассматривая это состояние в более поздний момент времени  $t'$ , мы получаем:

$$\langle \Psi'^*_0(t') \Psi'(t') \rangle = -iG(\mathbf{p}, t - t') \text{ при } t - t' < 0.$$

При вычислении  $G(\mathbf{p}, t)$  по формуле (7.34) здесь существенны полюсы функции  $G_A(\mathbf{p}, \omega)$  в верхней полуплоскости, так как  $t < 0$ . При  $|t| \gg |\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu|^{-1}$  аналогично предыдущему находим:

$$-iG(\mathbf{p}, t) \approx a e^{-i\varepsilon(\mathbf{p})t - \gamma t},$$

где  $\varepsilon(\mathbf{p}) < \mu$ ,  $\gamma < 0$ . Мы получаем волновой пакет, соответствующий дырке с  $\varepsilon(\mathbf{p}) < \mu$ . Следовательно, энергия и затухание дырок даются полюсами функции  $G_A(\mathbf{p}, \omega)$  в верхней полуплоскости. Отметим, что знаки  $\gamma$  для «частиц» и для «дырок» противоположны.

Те же результаты справедливы и по отношению к фоонам. Из формулы (7.29) нетрудно увидеть, что в этом случае каждому полюсу функции  $D_R(\mathbf{k}, \omega)$  в нижней полуплоскости будет соответствовать расположенный симметрично относительно точки  $\omega = 0$  полюс функции  $D_A(\omega, \mathbf{k})$  в верхней полуплоскости. Таким образом, оба способа определения спектра возбуждений дадут один и тот же результат.

Помимо энергетического спектра, с помощью гриновской функции можно найти связь между химическим потенциалом и числом частиц в единице объема, энергию основного состояния и распределение частиц по импульсам (конечно, при нашем ограничении все это относится только к ферми-системам).

Из самого определения гриновской функции (7.1) следует:

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \langle \tilde{\psi}_\alpha^+(x) \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle = \\ &= -i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r}}} G_{\alpha\alpha}(x - x') = -2i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' = \mathbf{r}}} G(x - x'), \end{aligned}$$

где  $G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G$ .

Переходя к импульсному представлению для  $G$ , получаем:

$$\frac{N}{V} = -2i \lim_{t \rightarrow +0} \int \frac{d\mathbf{p} d\omega}{(2\pi)^4} G(\mathbf{p}, \omega) e^{i\omega t}. \quad (7.37)$$

Поскольку интеграл в (7.37) зависит только от  $\mu$ , мы получаем, таким образом, зависимость  $N(\mu)$ . Выражая обратно  $\mu(N)$  и воспользовавшись формулой  $\mu = \left( \frac{\partial E_0}{\partial N} \right)_V$ , можно найти отсюда энергию основного состояния. Правда, на практике этот способ действий не является наиболее удобным. Мы вернемся к вопросу об энергии основного состояния в § 9.

Для нахождения импульсного распределения частиц достаточно вычислить выражение

$$N_{\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) = N_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) = \langle \Phi_0^* a_{\mathbf{p} \frac{1}{2}}^+ a_{\mathbf{p} \frac{1}{2}} \Phi_0 \rangle = \langle a_{\mathbf{p} \frac{1}{2}}^+ a_{\mathbf{p} \frac{1}{2}} \rangle,$$

где  $\Phi_0 = e^{-iE_0 t} \Phi_H^0$  — шредингеровская волновая функция основного состояния системы. Сравнивая это выражение с (7.17) (см. также примечание на стр. 81), находим:

$$N_{\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) = N_{-\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) = -2i \lim_{t \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{p}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (7.38)$$

Из формулы (7.38) можно получить одно интересное свойство импульсного распределения (А. Б. Мигдал [28]). Определим граничный импульс Ферми для возбуждений  $p_0$  с помощью уравнения  $\epsilon(p_0) = \mu$ . Рассмотрим  $N(\mathbf{p})$  вблизи

$|p| = p_0$ . Согласно предположениям § 2, возбуждения ферми-жидкости — это «частицы» и «дырки» с импульсами вблизи  $p_0$ . Затухание таких квазичастиц мало по сравнению с  $|\varepsilon(p) - \mu|$ . Эти сведения могут быть использованы для установления полюсов функций  $G_A$  и  $G_R$ . При  $|p| < p_0$  функция  $G_A$  имеет полюс в верхней полуплоскости вблизи действительной оси, а при  $|p| > p_0$  этот полюс исчезает, но зато появляется полюс у  $G_R$  в нижней полуплоскости. Представим теперь интеграл (7.38) в виде двух контурных интегралов от  $G_A$  и  $G_R$ , как это было сделано с интегралом (7.34). Горизонтальные участки контуров на рис. 2 и 3 мы сдвинем в нижнюю полуплоскость на расстояние, значительно большее, чем  $\varepsilon(p) - \mu$ , от действительной оси. Тогда интегралы по этим участкам будут нечувствительны к малым изменениям импульса  $p$ . Что касается интегралов по вертикальным участкам контуров, то их можно объединить в интеграл

$$2 \int_{\mu}^{\mu - iL} \text{Im } G_R(p, \omega) \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Этот интеграл можно разделить на часть, взятую по области удаленной от точки  $\varepsilon = \mu$  на расстояние, большее  $\varepsilon(p) - \mu$ , и интеграл по близкой области. Интеграл по далекой области мало зависит от изменений  $|p|$ , а в интеграле по близкой области можно подставить  $G_R \approx \frac{a}{\omega - \varepsilon(p) + i\gamma}$  и убедиться в том, что он пренебрежимо мал  $\left( \sim \frac{\gamma}{\varepsilon(p) - \mu} \right)$ . Отсюда следует, что вся разница между выражениями  $N(p)$  (7.38) при  $|p| < p_0$  и при  $|p| > p_0$  заключается в том, что в первом случае на рис. 3 отсутствует обход полюса, а во втором случае он появляется. Отсюда следует:

$$N_{\frac{1}{2}}(p_0 - 0) - N_{\frac{1}{2}}(p_0 + 0) = a. \quad (7.39)$$

Согласно (7.21), константа  $a$  обязательно положительна. Таким образом, мы приходим к выводу, что импульсное распределение частиц имеет скачок в той же точке  $|p| = p_0$ , где и распределение возбуждений. Согласно основному предположению теории ферми-жидкости, граничный импульс Ферми  $p_0$  возбуждений связан с плотностью числа частиц



соотношением (2.1) (справедливость этого предположения будет доказана в гл. VI). Таким образом, скачок импульсного распределения взаимодействующих частиц происходит в той же точке, что и у не взаимодействующих частиц. Из того, что  $0 \leq N_{\frac{1}{2}}(\mathbf{p}) \leq 1$ , находим для величины скачка:

$$0 \leq a \leq 1. \quad (7.40)$$

Примером является импульсное распределение частиц в разреженном ферми-газе, найденное в § 5.

**4. Гриновская функция системы во внешнем поле.** Перейдем теперь к системам во внешнем поле, не зависящем от времени. В этом случае функция Грина будет зависеть от переменных  $t-t'$ ,  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$ . Вместо формулы (7.17) мы теперь получим:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') = -i \sum_s (\psi(\mathbf{r})_{0s} \psi_{0s}^*(\mathbf{r}')) e^{-i(E_s - E_0)(t-t')}, \quad t > t', \quad (7.41)$$

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') = i \sum_s (\psi^*(\mathbf{r}')_{s0} \psi_{s0}(\mathbf{r})) e^{i(E_s - E_0)(t-t')}, \quad t < t'.$$

где  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\psi(\mathbf{r}')$  — шредингеровские операторы. Если продолжать действовать дальше, как в случае отсутствия внешнего поля, то мы получим формулу типа (7.21) с какими-то комплексными функциями  $A$  и  $B$ . Это неудобство можно обойти, если взять симметризованную комбинацию

$$\frac{1}{2} [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') + G(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t-t')]. \quad (7.42)$$

В смысле зависимости от  $\omega$  фурье-компонента этой функции обладает всеми свойствами функции  $G$  при отсутствии внешнего поля. Для нее будут справедливы все формулы (7.21) — (7.27) с той лишь разницей, что вместо параметра  $\mathbf{p}$  все величины будут зависеть от параметров  $\mathbf{r}, \mathbf{r}'$ .

Если мы рассматриваем не взаимодействующие друг с другом ферми-частицы во внешнем поле, то операторы  $\psi(\mathbf{r})$  удобно выбрать в виде  $\psi(\mathbf{r}) = \sum_s a_s \varphi_s(\mathbf{r})$ , где  $\varphi_s(\mathbf{r})$  — собственные

функции частицы в поле. В этом случае находим вместо (7.17)

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t-t') = -i \sum_s \varphi_s^*(\mathbf{r}') \varphi_s(\mathbf{r}) e^{-i\varepsilon_s(t-t')} \begin{cases} 1-n_s, & t > 0, \\ -n_s, & t < 0, \end{cases}$$

где

$$n_s = \begin{cases} 1, & \varepsilon_s < \mu, \\ 0, & \varepsilon_s > \mu, \end{cases} \quad (7.43)$$

а  $\varepsilon_s$  означает энергию частицы в состоянии  $\varphi_s$ . Взяв временную фурье-компоненту, получаем:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_{\varepsilon_s > \mu} \frac{\varphi_s^*(\mathbf{r}') \varphi_s(\mathbf{r})}{\omega - \varepsilon_s + i\delta} + \sum_{\varepsilon_s < \mu} \frac{\varphi_s^*(\mathbf{r}') \varphi_s(\mathbf{r})}{\omega - \varepsilon_s - i\delta}. \quad (7.44)$$

Введем теперь величину, аналогичную  $A$  и  $B$  в (7.20),

$$A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) dE = \sum_s \varphi_s^*(\mathbf{r}') \varphi_s(\mathbf{r}), \quad E < \varepsilon_s < E + dE.$$

Положим  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  и проинтегрируем это соотношение по  $dV$ . При этом ввиду условия нормировки функции  $\varphi_s(\mathbf{r})$  в правой стороне мы получим просто число уровней  $dN$  в интервале  $dE$ . Таким образом,

$$\int d\mathbf{r} A(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E) = \frac{dN(E)}{dE}.$$

Формула (7.44) через функцию  $A$  записывается в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \int dE \frac{A(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E)}{\omega - E + i\delta \operatorname{sign}(E - \mu)}.$$

Отсюда следует, что мнимая часть  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega)$  (при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$   $A$  — действительная и положительная величина) равна

$$\operatorname{Im} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega) = \begin{cases} -\pi A(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), & \omega > \mu, \\ \pi A(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), & \omega < \mu. \end{cases}$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{dN(E)}{dE} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{sign}(E - \mu) \int \operatorname{Im} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}, E) d\mathbf{r}. \quad (7.45)$$

## § 8. Основные принципы диаграммной техники

1. Переход от переменной  $N$  к переменной  $\mu$ . Прежде чем заняться вычислением гриновской функции, мы перейдем к новым переменным. До сих пор мы рассматривали систему с заданным числом частиц. В дальнейшем нам будет удобно считать это число переменным и задавать химический потенциал. По сути дела, такие переменные уже применялись нами выше для фононов, где было  $\mu = 0$  и число частиц в системе не было задано. Однако в случае ферми-системы у нас было задано именно число частиц, а химический потенциал  $\mu$ , входящий в формулу, следовало рассматривать как некоторую функцию этого числа. При практических расчетах более удобно считать  $\mu$  независимой переменной, а затем уже в окончательном результате переходить к заданному числу частиц.

Переход от одной независимой переменной к другой может быть произведен следующим образом. Как известно, волновые функции и энергетические уровни системы могут быть получены из вариационного принципа

$$\langle \Psi^* \hat{H} \Psi \rangle = \min \quad (8.1)$$

при условии

$$\langle \Psi^* \hat{N} \Psi \rangle = \text{const}, \quad (8.2)$$

где  $\hat{H}$  и  $\hat{N}$  — гамильтониан и оператор числа частиц. Вместо этого можно воспользоваться методом неопределенных множителей Лагранжа и находить абсолютный минимум выражения

$$\langle \Psi^* (\hat{H} - \mu \hat{N}) \Psi \rangle,$$

где  $\mu$  — константа, определяемая потом с помощью условия (8.2). Таким образом, переход от заданного  $N$  к заданному  $\mu$  сводится к замене гамильтониана оператором  $\hat{H} - \mu \hat{N}$ . Ввиду того, что оператор  $\hat{N}$  коммутирует с гамильтонианом, легко найти формулы преобразования операторов  $\tilde{\psi}(x)$ :

$$\tilde{\psi}_\mu(x) = e^{-i\mu \hat{N}t} \tilde{\psi}_N(x) e^{i\mu \hat{N}t} = e^{i\mu t} \tilde{\psi}_N(x), \quad (8.3)$$

поскольку оператор  $\tilde{\psi}_N$  уменьшает число частиц на единицу. Аналогичным образом для оператора  $\tilde{\psi}_\mu^+(x)$  имеем:

$$\tilde{\psi}_\mu^+(x) = e^{-i\mu t} \tilde{\psi}_N^+(x). \quad (8.4)$$

Гриновская функция определяется как

$$G_\mu(x, x') = G_N(x, x') e^{i\mu(t-t')}. \quad (8.5)$$

Отсюда следует, что все выводы предыдущего параграфа остаются справедливыми по отношению к  $G_\mu$ , если только произвести замену

$$\omega_{(N)} \rightarrow \omega_{(\mu)} + \mu. \quad (8.6)$$

Поскольку для вычисления числа частиц и их импульсного распределения всегда требуются только значения  $G$  при  $t=t'$ , то соответствующие формулы (7.37) и (7.38), очевидно, не изменяются. Полюсы новой гриновской функции дают энергию возбуждений, отсчитанную от уровня химического потенциала.

Как уже сказано, пользоваться функциями  $G_\mu$  более удобно для практических расчетов. Поэтому в дальнейшем мы, как правило, будем иметь в виду именно такое определение гриновской функции и будем обозначать ее просто буквой  $G$ . В тех случаях, когда для анализа общих свойств функции  $G$  будет считаться заданным число частиц (как в предыдущем параграфе), это будет специально оговорено.

**2. Теорема Вика.** Теперь перейдем к вычислению гриновской функции. Полученная в § 6 формула (6.32) для перехода к представлению взаимодействия дает возможность представить ряд теории возмущений в простой и компактной форме. Применительно к гриновской функции формула (6.32) имеет вид

$$G(x, x') = \frac{-i \langle T \psi(x) \psi^+(x') S(\infty) \rangle}{\langle S(\infty) \rangle}, \quad (8.7)$$

где

$$S(\infty) = T \left( e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} H_{int} dt} \right). \quad (8.8)$$

Подчеркнем еще раз, что операторы  $\psi$ , входящие в (8.7) (в том числе и в  $H_{int}$ ), подчиняются уравнениям для невзаимодействующих частиц.

Разложим  $S(\infty)$  в числителе формулы (8.7) по степеням  $H_{int}$ . При этом получим:

$$\begin{aligned}
 S(\infty) &= 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} H_{int} dt + \\
 &+ \frac{(-i)^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T[H_{int}(t_1) H_{int}(t_2)] dt_1 dt_2 + \dots, \\
 G(x, x') &= - \frac{i}{\langle S(\infty) \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_n \times \\
 &\times \langle T[\psi(x) \psi^+(x') H_{int}(t_1) \dots H_{int}(t_n)] \rangle. \quad (8.9)
 \end{aligned}$$

Величину  $\langle S(\infty) \rangle$  в знаменателе мы пока разлагать не будем. Гамильтониан взаимодействия  $H_{int}$ , как правило, представляет собой интеграл по пространственным, а иногда и по временным переменным от произведения некоторого числа операторов  $\psi$  (конкретные примеры будут рассмотрены ниже). Таким образом, каждый член ряда (8.9) содержит среднее от хронологизированного произведения нескольких операторов поля частиц в представлении взаимодействия.

Ввиду этого нам следует, прежде всего, рассмотреть выражение типа

$$\langle T(ABCD \dots XYZ) \rangle,$$

где  $A, B, \dots, X, Y, Z$  — операторы поля в представлении взаимодействия (напомним, что эти операторы совпадают с соответствующими операторами для невзаимодействующих частиц).

Каждый из операторов поля можно разбить на два слагаемых. Одно из них, действуя на функцию основного состояния, дает нуль. Эту часть можно назвать «оператором уничтожения». В фоновом операторе (7.13) это — сумма с  $b_k$ , а в фермионном операторе (6.14) это — часть суммы с  $|\mathbf{p}| > p_0$ . Другая часть, которую можно назвать «оператором рождения», обладает тем свойством, что эрмитовски сопряженный с ней оператор дает нуль, действуя на основное

состояние. Назовем нормальным произведением нескольких операторов

$$N(AB \dots XYZ)$$

произведение, в котором все «операторы рождения» поставлены слева от «операторов уничтожения», а знак соответствует четности перестановки фермиевских операторов. Далее, назовем «связью» двух операторов разность

$$A^c B^c = T(AB) - N(AB).$$

Теперь покажем, что  $T$ -произведение всегда можно выразить через всевозможные  $N$ -произведения со всеми возможными связями, а именно:

$$\begin{aligned} T(ABCD \dots XYZ) = & N(ABCD \dots XYZ) + \\ & + N(A^c B^c CD \dots XYZ) + N(A^c B C^c D \dots XYZ) + \dots \\ & \dots + N(A^c B^a C^a \dots X^c Y^b Z^b). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Это соотношение называется теоремой Вика (см. [24]).

Прежде всего, отметим, что одновременная перестановка операторов в обеих сторонах равенства (8.10) не нарушает этого соотношения. Следовательно, без ограничения общности мы можем считать, что порядок времен операторов соответствует их расположению в (8.10). Для того чтобы получить из  $T$ -произведения  $N$ -произведение, надо взять все операторы рождения и последовательно переставлять со всеми операторами уничтожения, стоящими левее их. При этом мы получим сумму  $N$ -произведений того типа, который написан в (8.10). Однако в нее будут входить связи только тех операторов, у которых порядок в  $T$ -произведении отличается от порядка в  $N$ -произведении. Но так как связи операторов, для которых оба порядка эквивалентны, равны нулю, мы можем считать, что в правую часть (8.10) входят нормальные произведения со всеми возможными связями. Таким образом, соотношение (8.10) доказано.

С помощью формул (6.14) и (7.13) нетрудно убедиться в том, что связи фермиевских операторов  $\psi^+(x')$  и  $\psi(x)$ , а также двух фононных операторов  $\varphi(x)$  и  $\varphi(x')$  представляют собой просто числа, а все остальные равны нулю.

Например,

$$\begin{aligned}\psi^{+c}(x')\psi^c(x) &= \frac{1}{V} \sum_{p, p'} \left\{ a_p^+ a_p - \underset{|p| > p_0}{a_p^+ a_p} + \underset{|p| < p_0}{a_p a_p^+} \right\} \times \\ &\quad \times e^{i[pr - p'r' - \varepsilon_0(p)t + \varepsilon_0(p')t']} = \\ &= \frac{1}{V} \sum_{|p| < p_0} e^{ip(r-r') - i\varepsilon_0(p)(t-t')} \quad \text{при } t' > t, \\ \psi^{+c}(x')\psi^c(x) &= \frac{1}{V} \sum_{p, p'} \left\{ -a_p a_p^+ - \underset{|p| > p_0}{a_p^+ a_p} + \underset{|p| < p_0}{a_p a_p^+} \right\} \times \\ &\quad \times e^{i[pr - p'r' - \varepsilon_0(p)t + \varepsilon_0(p')t']} = \\ &= -\frac{1}{V} \sum_{|p| > p_0} e^{ip(r-r') - i\varepsilon_0(p)(t-t')} \quad \text{при } t' < t.\end{aligned}$$

В силу определения нормального произведения его среднее по основному состоянию равно нулю. Следовательно,

$$A^c B^c = \langle T(AB) \rangle.$$

После этого, взяв среднее по основному состоянию от (8.10), получаем:

$$\begin{aligned}\langle T(ABCD \dots XYZ) \rangle &= \langle T(AB) \rangle \langle T(CD) \rangle \dots \langle T(YZ) \rangle \pm \\ &\quad \pm \langle T(AC) \rangle \langle T(BD) \rangle \dots \langle T(YZ) \rangle \pm \dots \quad (8.11)\end{aligned}$$

Таким образом, наше среднее разбивается на сумму всех возможных произведений средних по основному состоянию от отдельных пар операторов. Знак перед каждым членом, как всегда, соответствует четности перестановки фермиевских операторов. Из формулы (8.11), в частности, следует, что среди операторов  $A, B, C, \dots$  обязательно должно быть четное число операторов каждого поля. Если принять во внимание определение гриновской функции (7.1), то мы приходим к выводу, что среднее от  $T$ -произведения любого числа операторов поля выражается как сумма произведений свободных гриновских функций.

**3. Диаграммы Файнмана.** Теперь вернемся к исходному выражению (8.9). Поскольку  $H_{int}$  есть интеграл от произведения операторов  $\psi$ , то каждый член суммы в (8.9) может быть преобразован согласно формуле (8.11). Полученный результат можно представить в очень наглядной форме при

помощи так называемых диаграмм Файнмана. Лучше всего это проиллюстрировать на конкретном примере. Предположим, что рассматриваемая система состоит из одинаковых ферми-частиц с парными силами взаимодействия, не зависящими от спина. Согласно § 6,  $H_{int}$  имеет вид

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int \psi_{\alpha}^{+}(r_1) \psi_{\beta}^{+}(r_2) U(r_1 - r_2) \psi_{\beta}(r_2) \psi_{\alpha}(r_1) dr_1 dr_2. \quad (8.12)$$

Если ввести  $V(x_1 - x_2) = U(r_1 - r_2) \delta(t_1 - t_2)$ , то оператор  $\int H_{int} dt$  будет содержать два четырехмерных интеграла.

Рассмотрим теперь члены суммы (8.9). Первый член этой суммы есть гриновская функция невзаимодействующих частиц. Следующий член имеет вид

$$\delta G^{(1)} = - \frac{1}{2 \langle S(\infty) \rangle} \int d^4 x_1 d^4 x_2 \times \\ \times \langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{+}(x') \psi_{\gamma}^{+}(x_1) \psi_{\delta}^{+}(x_2) \psi_{\delta}(x_2) \psi_{\gamma}(x_1)) \rangle V(x_1 - x_2).$$

Согласно формуле (8.11), матричный элемент под интегралом равен

$$\langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\gamma}^{+}(x_1)) \rangle \langle \psi_{\delta}^{+}(x_2) \psi_{\delta}(x_2) \rangle \langle T(\psi_{\gamma}(x_1) \psi_{\beta}^{+}(x')) \rangle - \\ - \langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\gamma}^{+}(x_1)) \rangle \langle \psi_{\delta}^{+}(x_2) \psi_{\gamma}(x_1) \rangle \langle T(\psi_{\delta}(x_2) \psi_{\beta}^{+}(x')) \rangle + \\ + \langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\delta}^{+}(x_2)) \rangle \langle \psi_{\gamma}^{+}(x_1) \psi_{\gamma}(x_1) \rangle \langle T(\psi_{\delta}(x_2) \psi_{\beta}^{+}(x')) \rangle - \\ - \langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\delta}^{+}(x_2)) \rangle \langle \psi_{\gamma}^{+}(x_1) \psi_{\delta}(x_2) \rangle \langle T(\psi_{\gamma}(x_1) \psi_{\beta}^{+}(x')) \rangle + \\ + \langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{+}(x')) \rangle \langle \psi_{\gamma}^{+}(x_1) \psi_{\gamma}(x_1) \rangle \langle \psi_{\delta}^{+}(x_2) \psi_{\delta}(x_2) \rangle - \\ - \langle T(\psi_{\alpha}(x) \psi_{\beta}^{+}(x')) \rangle \langle \psi_{\gamma}^{+}(x_1) \psi_{\delta}(x_2) \rangle \langle \psi_{\delta}^{+}(x_2) \psi_{\gamma}(x_1) \rangle.$$

В соответствии с определением гриновской функции (7.1) это выражение может быть записано в виде

$$iG_{\alpha\gamma}^{(0)}(x, x_1) G_{\delta\delta}^{(0)}(x_2, x_2) G_{\gamma\beta}^{(0)}(x_1, x') - \\ - iG_{\alpha\gamma}^{(0)}(x, x_1) G_{\gamma\delta}^{(0)}(x_1, x_2) G_{\delta\beta}^{(0)}(x_2, x') + \\ + iG_{\alpha\delta}^{(0)}(x, x_2) G_{\gamma\gamma}^{(0)}(x_1, x_1) G_{\delta\beta}^{(0)}(x_2, x') - \\ - iG_{\alpha\delta}^{(0)}(x, x_2) G_{\delta\gamma}^{(0)}(x_2, x_1) G_{\gamma\beta}^{(0)}(x_1, x') - \\ - iG_{\alpha\beta}^{(0)}(x, x') G_{\gamma\gamma}^{(0)}(x_1, x_1) G_{\delta\delta}^{(0)}(x_2, x_2) + \\ + iG_{\alpha\beta}^{(0)}(x, x') G_{\delta\gamma}^{(0)}(x_2, x_1) G_{\gamma\delta}^{(0)}(x_1, x_2). \quad (8.13)$$



Таким образом, рассматриваемое выражение разбивается на сумму членов, каждый из которых содержит три гриновские функции невзаимодействующих частиц.

Файнман указал на то, что каждому такому члену можно сопоставить определенный рисунок, который строится по следующему принципу. Изобразим точками на плоскости совокупность пространственно-временных координат и проекции спина, от которых зависят операторы  $\psi$ , входящие в наше выражение. Затем соединим сплошными линиями те точки, которые входят в качестве аргументов в одну функцию  $G^{(0)}$ , а волнистой линией — точки  $x_1$  и  $x_2$ , входящие в функцию  $V(x_1 - x_2)$ . Тогда величине  $\delta G^{(1)}$  будут соответствовать шесть таких рисунков, изображенных на рис. 4<sup>1)</sup>. Каждый из этих

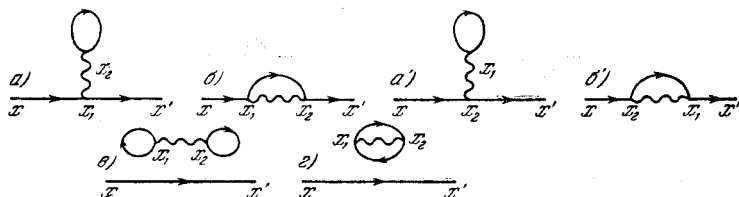


Рис. 4.

рисунков имеет две внешние координаты  $x$  и  $x'$ . По координатам внутренних точек производится интегрирование, а кроме того, берется сумма по внутренним спиновым переменным. Аналогичное соответствие между формулами и рисунками имеет место и в высших порядках теории возмущений, а также при других формах гамильтониана взаимодействия. Такие рисунки называются диаграммами Файнмана.

Каждой диаграмме Файнмана соответствует определенное аналитическое выражение. Вычисление ряда теории возмущений сводится к изображению всех возможных диаграмм Файнмана и вычислению соответствующих интегралов. Правила, по которым составляются диаграммы и соответствующие формулы, зависят от конкретного вида взаимодействия. Однако, независимо от этого, во всех случаях соблюдается одна общая закономерность, которая значительно упрощает вычисления.

<sup>1)</sup> Для простоты мы не пишем на рисунке спиновых переменных.

Все диаграммы Файнмана для функции  $G$  могут быть разделены на две группы — связанных и несвязанных диаграмм. Связанными диаграммами мы будем называть такие, у которых все точки связаны посредством тех или иных линий с внешними концами  $x$  и  $x'$ . Например, на рис. 4 связанными являются диаграммы  $a$ ,  $b$ ,  $a'$  и  $b'$ , а несвязанными — диаграммы  $b$  и  $z$ . В общем случае, когда мы имеем какой-то член ряда теории возмущений (8.9), связанными диаграммами будут те, в которых  $\psi(x)$  спаривается с  $\psi^+$  из  $H_{int}(t_{p_1})$ ,  $\psi$  из  $H_{int}(t_{p_1})$  с  $\psi^+$  из  $H_{int}(t_{p_2})$  и т. д., причем, в конце концов, мы приходим таким образом к  $\psi^+(x')$ , не пропустив ни одного из  $H_{int}$  (рис. 5,  $a$ ). Остальные

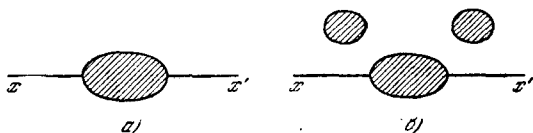


Рис. 5.

диаграммы, в которых один или несколько операторов  $H_{int}$  не связаны никакими спариваниями с  $\psi(x)$  и  $\psi^+(x')$ , называются несвязанными (рис. 5, б).

Рассмотрим поправку к гриновской функции, которой соответствует какая-то несвязанная диаграмма. Она, очевидно, состоит из двух множителей. Первый из них включает все  $H_{int}$ , связанные с  $\psi(x)$  и  $\psi^+(x')$ ; иначе говоря, он включает выражение, соответствующее связанному блоку на рис. 5, б, который содержит внешние концы. Второй множитель описывает оставшуюся часть диаграммы. Таким образом, выражение для рассматриваемой поправки равно

$$\begin{aligned}
 & -i \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int dt_1 \dots \\
 & \dots dt_m \langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1) \dots H_{int}(t_m)) \rangle_c \times \\
 & \times \int \dots \int dt_{m+1} \dots dt_n \langle T(H_{int}(t_{m+1}) \dots H_{int}(t_n)) \rangle.
 \end{aligned}$$

Здесь под  $\langle \dots \rangle_c$  и  $\langle \dots \rangle$  подразумевается некоторый вполне определенный способ разбиения на пары операторов  $\psi$ ,  $\psi^+$ , согласно теореме Вика. Символ  $\langle \dots \rangle_c$  подчеркивает тот

факт, что в этом выражении спаривание приводит к связанной диаграмме.

Нетрудно видеть, что среди диаграмм имеются такие, которые дают в точности одинаковый вклад. Действительно, если мы изменим спаривание так, что дело сведется просто к перераспределению различных  $H_{int}$  между скобками  $\langle \dots \rangle_c$  и  $\langle \dots \rangle$ , то это будет соответствовать просто переобозначению переменных интегрирования и не изменит величины поправки к  $G$ . Число таких диаграмм равно, очевидно, числу разбиений  $n$  операторов  $H_{int}$  на группы из  $m$  и  $n - m$  операторов, т. е.  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

Полный вклад всех этих диаграмм будет равен

$$(-i) \frac{(-i)^m}{m!} \int \dots \int dt_1 \dots \\ \dots dt_m \langle T(\psi(x) \psi^+(x') H_{int}(t_1) \dots H_{int}(t_m)) \rangle_c \times \\ \times \frac{(-i)^{n-m}}{(n-m)!} \int \dots \int dt_{m+1} \dots dt_n \langle T(H_{int}(t_{m+1}) \dots H(t_n)) \rangle.$$

Просуммируем вклады от всех диаграмм, любых порядков, содержащих определенную связанную часть и любые несвязанные части. Очевидно, при этом получим:

$$(-i) \frac{(-i)^m}{m!} \int \dots \int dt_1 \dots \\ \dots dt_m \langle T(\psi(x) \psi^+(x') H_{int}(t_1) \dots H_{int}(t_m)) \rangle_c \times \\ \times \left\{ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt_{m+1} \langle H_{int}(t_{m+1}) \rangle - \right. \\ - \frac{1}{2} \int \int dt_{m+1} dt_{m+2} \langle T(H_{int}(t_1) H_{int}(t_{m+2})) \rangle + \dots \\ \dots + \frac{(-i)^k}{k!} \int \dots \int dt_{m+1} \dots dt_{m+k} \times \\ \left. \times \langle T(H_{int}(t_{m+1}) \dots H_{int}(t_{m+k})) \rangle + \dots \right\}.$$

Вернемся к исходной формуле (8.7). Если разложить стоящую в знаменателе величину  $\langle S(\infty) \rangle$  в ряд по степе-

ням  $H_{int}$ , получится в точности то же самое выражение, которое заключено в фигурные скобки последней формулы. Таким образом,

$$\langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty)) \rangle = \langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty)) \rangle_c \langle S(\infty) \rangle$$

и, согласно (8.7),

$$G(x, x') = -i \langle T(\psi(x)\psi^+(x')S(\infty)) \rangle_c. \quad (8.14)$$

Полученное правило справедливо не только по отношению к гриновской функции. Оно сохраняется при вычислении любого выражения типа (6.32) с произвольным количеством операторов поля. Это заключение будет важно для дальнейшего. На практике установленное правило дает возможность опустить множитель  $\langle S(\infty) \rangle$  в знаменателе формулы (8.9) и в то же время не учитывать вклад несвязанных диаграмм.

Дальнейшее упрощение возникает вследствие того, что все типы спариваний в выражении

$$-i \frac{(-i)^m}{m!} \int \dots \int dt_1 \dots \dots dt_m \langle T(\psi(x)\psi^+(x')H_{int}(t_1) \dots H_{int}(t_m)) \rangle_c,$$

отличающиеся только перестановкой  $H_{int}$ , дают одинаковый вклад. Благодаря этому мы можем опустить множитель  $1/m!$  и учитывать только такие спаривания, которые приводят к топологически неэквивалентным диаграммам, т. е. таким, которые нельзя получить друг из друга перестановкой операторов  $H_{int}$ . Вклад от каждой такой диаграммы уже не содержит множителя, существенно зависящего от порядка диаграммы  $m$ . Благодаря этому каждая диаграмма может быть разбита на элементы, которые можно рассматривать отдельно как поправку к той или иной гриновской функции. К числу несущественных зависимостей от  $m$  относится, очевидно, множитель  $\lambda^m$ , где  $\lambda$  — константа. Такой множитель не мешает разбиению диаграммы на элементы. Наоборот, появление множителя типа  $1/m$  уже препятствовало бы такому разбиению и суммированию частей диаграммы по отдельности.

## § 9. Правила построения диаграмм для различных типов взаимодействия

**1. Диаграммная техника в координатном пространстве. Примеры.** Теперь перейдем к детальному изложению правил построения фейнмановских диаграмм в различных случаях. Основой всякой диаграммы является линия, изображающая гриновскую функцию ферми-частицы или фонона. Первую мы будем изображать сплошной, а вторую — пунктирной линией. На линии мы будем ставить стрелку

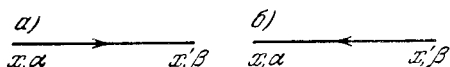


Рис. 6.

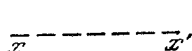


Рис. 7.

обозначающую ее направление: линия выходит из точки с координатами  $x$  и проекцией спина  $\alpha$  и приходит в точку с координатами  $x'$  и проекцией спина  $\beta$ . Так линия на рис. 6, а означает гриновскую функцию

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(x, x') \equiv G_{\alpha\beta}^{(0)}(x - x'),$$

а на рис. 6, б — гриновскую функцию

$$G_{\beta\alpha}^{(0)}(x', x) \equiv G_{\beta\alpha}^{(0)}(x' - x).$$

На фононной линии стрелку можно не ставить (рис. 7), поскольку, как мы видели в § 7,  $D^{(0)}$  является четной функцией относительно  $x - x'$ . По координатам точек соединения линий проводится интегрирование (по всему пространству и по времени от  $-\infty$  до  $\infty$ ). Кроме того, проводится суммирование по спиновым переменным таких вершин.

Ниже дан анализ конкретных случаев.

**А. Двухчастичное взаимодействие.** Наиболее простые диаграммы Фейнмана при таком взаимодействии уже были рассмотрены нами выше (рис. 4) с целью объяснения соответствия между формулами и диаграммами. Как уже выяснено, несвязанные диаграммы следует отбросить вместе с множителем  $\langle S(\infty) \rangle^{-1}$ . Таким образом, в первом порядке остаются только диаграммы 4, а, 4, б, 4, а' и 4, б'. Однако

ввиду того, что по координатам  $x_1$  и  $x_2$  производится интегрирование (а по соответствующим спинным переменным — суммирование), оказывается, что диаграмма  $a'$  равна диаграмме  $a$ , а диаграмма  $b'$  равна диаграмме  $b$ . Это приводит к компенсации множителя  $1/2$  в  $H_{int}$ . Аналогичное положение имеет место и в высших приближениях. Таким образом, рецепт заключается в том, чтобы не писать этого множителя и рассматривать только топологически неэквивалентные диаграммы (например,  $a$  и  $b$ ).

Кроме того, необходимо еще обратить внимание на следующие обстоятельства. Как уже отмечалось выше, знак, с которым входит каждая диаграмма, является следствием четности перестановки фермиевских операторов  $\psi$ . Нетрудно увидеть, что изменение знака связано с образованием замкнутой петли на диаграмме. Поэтому знак диаграммы определяется множителем  $(-1)^F$ , где  $F$  — количество замкнутых петель.

Другое обстоятельство, заслуживающее внимания, — это случай, когда времена в обоих аргументах одной из функций  $G^{(0)}$  совпадают. Это происходит только тогда, когда спариваются два оператора из одного гамильтониана  $H_{int}$ . Ввиду того, что порядок операторов в  $H_{int}$  задан (все  $\psi^+$  стоят слева от всех  $\psi$ ), такие  $G^{(0)}$  надо понимать как предел  $\lim_{\delta \rightarrow +0} G(t, t + \delta) \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} G(-\delta) = i \langle \psi^+(r_1) \psi(r_2) \rangle$ . Сформулируем теперь правила, по которым производится вычисление поправок произвольного порядка.

1) Изображаются все топологически неэквивалентные диаграммы с  $2n$  вершинами и двумя внешними концами. В каждой вершине соединяются две сплошные и одна волнистая линии.

2) Каждой сплошной линии сопоставляется гриновская функция  $G_{\alpha\beta}^{(0)}(x, x')$  ( $x, \alpha$  — координаты начала линии,  $x', \beta$  — координаты конца).

3) Каждой волнистой линии сопоставляется потенциал  $V(x - x') = U(r - r') \delta(t - t')$ .

4) Производится интегрирование по координатам всех вершин ( $d^4x = dr dt$ ), суммирование — по всем внутренним спинным переменным  $\alpha$ .

5) Полученное выражение умножается на  $i^n (-1)^F$ , где  $F$  — количество замкнутых петель.

6) Если в выражении встречаются функции  $G^{(0)}$  от нулевого временного аргумента, то их надо понимать как предел  $G^{(0)}(-0)$ .

Рассмотрим, например, поправку второго порядка. Соответствующие топологически неэквивалентные связанные диаграммы изображены на рис. 8.

Согласно сформулированным правилам, соответствующие аналитические выражения имеют вид

$$- \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) \times \\ \times G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(x_2 - x') G_{\gamma_3\gamma_3}^{(0)}(0) G_{\gamma_1\gamma_4}^{(0)}(0) V(x_1 - x_3) V(x_2 - x_4), \quad \text{а)}$$

$$- \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_3 - x_4) G_{\gamma_4\beta}^{(0)}(x_4 - x') V(x_1 - x_2) V(x_3 - x_4), \quad \text{б)}$$

$$+ \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\beta}^{(0)}(x_3 - x') G_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) V(x_1 - x_4) V(x_2 - x_3), \quad \text{в)}$$

$$+ \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\beta}^{(0)}(x_3 - x') G_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) V(x_1 - x_2) V(x_3 - x_4), \quad \text{г)}$$

$$- \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\beta}^{(0)}(x_1 - x') G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_2}^{(0)}(x_3 - x_2) G_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) V(x_1 - x_2) V(x_3 - x_4), \quad \text{д)}$$

$$+ \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\beta}^{(0)}(x_1 - x') G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_3 - x_4) G_{\gamma_4\gamma_2}^{(0)}(x_4 - x_2) V(x_1 - x_2) V(x_3 - x_4), \quad \text{е)}$$

$$+ \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\beta}^{(0)}(x_3 - x') G_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) V(x_1 - x_3) V(x_2 - x_4), \quad \text{ж)}$$

$$- \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_3 - x_4) G_{\gamma_4\beta}^{(0)}(x_4 - x') V(x_1 - x_4) V(x_2 - x_3), \quad \text{з)}$$

$$- \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(x_2 - x_3) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_3 - x_4) G_{\gamma_4\beta}^{(0)}(x_4 - x') V(x_1 - x_3) V(x_2 - x_4), \quad \text{и)}$$

$$+ \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(x_2 - \beta) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_3 - x_4) G_{\gamma_4\gamma_3}^{(0)}(x_4 - x_3) V(x_1 - x_3) V(x_2 - x_4). \quad \text{к)}$$

Для случая двухчастичного взаимодействия теорию возмущений можно представить в несколько другой, более симметричной форме. Она оказывается удобнее, когда взаимодействие зависит от спинов. Гамильтониан такого взаимодействия имеет вид

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int \psi_{\alpha}^{+}(r_1) \psi_{\beta}^{+}(r_2) U_{\alpha\beta\gamma\delta}(r_1 - r_2) \psi_{\delta}(r_2) \psi_{\gamma}(r_1) dr_1 dr_2. \quad (9.1)$$

Интеграл  $\int H_{int} dt$ , входящий в оператор  $S$ , мы представим в виде, симметричном по всем переменным,

$$\begin{aligned} \int H_{int} dt = \\ = \frac{1}{4} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_4 \psi_{\gamma_1}^{+}(x_1) \psi_{\gamma_2}^{+}(x_2) \Gamma_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2, x_3 x_4) \times \\ \times \psi_{\gamma_4}(x_4) \psi_{\gamma_3}(x_3). \end{aligned} \quad (9.2)$$

Ввиду антикоммутативности  $\psi$ -операторов  $\Gamma^{(0)}$  можно считать антисимметричной функцией относительно перестановок

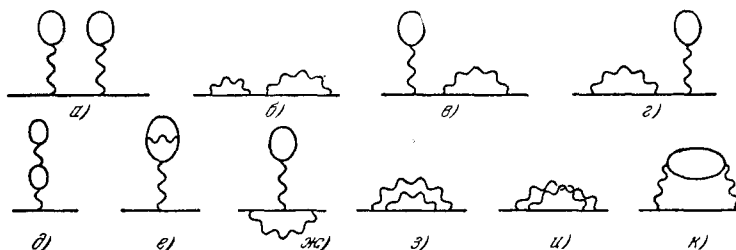


Рис. 8.

$x_1\gamma_1 \leftrightarrow x_2\gamma_2$  или  $x_3\gamma_3 \leftrightarrow x_4\gamma_4$ . Функция  $\Gamma^{(0)}$  может быть получена из величины

$$U_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}(r_1 - r_2) \delta(t_1 - t_2) \delta(x_1 - x_3) \delta(x_2 - x_4)$$

вычитанием аналогичного выражения с переставленными аргументами 3 и 4<sup>1)</sup>. Вычислим поправку первого порядка

<sup>1)</sup> При такой записи, со знаком «плюс» берется член, соответствующий «переходу»  $x_1\gamma_1 \rightarrow x_3\gamma_3$ ,  $x_2\gamma_2 \rightarrow x_4\gamma_4$  (ср. с (9.1)). Это необходимо помнить при определении знака диаграмм (см. ниже).



в гриновской функции:

$$\delta G^{(1)} = -\frac{1}{4} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 \Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2, x_3 x_4) \times \\ \times \langle T(\psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x') \psi_{\gamma_1}^+(x_1) \psi_{\gamma_2}^+(x_2) \psi_{\gamma_3}(x_4) \psi_{\gamma_4}(x_3)) \rangle$$

(в символе усреднения  $\langle \dots \rangle$  мы везде будем опускать индекс связности). Ввиду антисимметрии  $\Gamma^{(0)}$  относительно своих аргументов мы получаем отсюда один член

$$i \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 G_{\alpha \gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_2 \gamma_3}^{(0)}(x_3 - x_2) \times \\ \times G_{\gamma_4 \beta}^{(0)}(x_4 - x') \Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2; x_3 x_4).$$

Величину  $\Gamma^{(0)}$  будем обозначать на диаграммах светлым квадратом. Таким образом, диаграмма первого порядка имеет вид, изображенный на рис. 9.

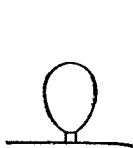


Рис. 9.

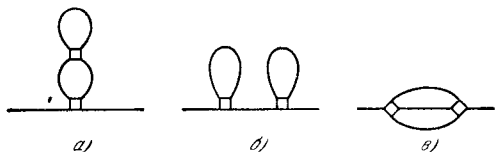


Рис. 10.

Во втором приближении имеется всего три связанные и топологически различные диаграммы (рис. 10). Соответствующие выражения равны

$$-\int d^4 x_1 \dots d^4 x_8 G_{\alpha \gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_2 \gamma_3}^{(0)}(x_3 - x') G_{\gamma_4 \gamma_5}^{(0)}(x_4 - x_5) \times \\ \times G_{\gamma_6 \gamma_7}^{(0)}(x_7 - x_2) G_{\gamma_8 \gamma_6}^{(0)}(x_8 - x_6) \Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2, x_3 x_4) \times \\ \times \Gamma_{\gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8}^{(0)}(x_5 x_6, x_7 x_8), \quad \text{a)}$$

$$-\int d^4 x_1 \dots d^4 x_8 G_{\alpha \gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_2 \gamma_3}^{(0)}(x_3 - x_5) G_{\gamma_4 \gamma_5}^{(0)}(x_7 - x') \times \\ \times G_{\gamma_6 \gamma_7}^{(0)}(x_4 - x_2) G_{\gamma_8 \gamma_6}^{(0)}(x_8 - x_6) \Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2, x_3 x_4) \times \\ \times \Gamma_{\gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8}^{(0)}(x_5 x_6, x_7 x_8) \quad \text{б)}$$

$$-\frac{1}{2} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_8 G_{\alpha \gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_2 \gamma_3}^{(0)}(x_3 - x_5) \times \\ \times G_{\gamma_6 \gamma_7}^{(0)}(x_7 - x_2) G_{\gamma_8 \gamma_6}^{(0)}(x_8 - x') G_{\gamma_4 \gamma_5}^{(0)}(x_4 - x_6) \times \\ \times \Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2, x_3 x_4) \Gamma_{\gamma_5 \gamma_6 \gamma_7 \gamma_8}^{(0)}(x_5 x_6, x_7 x_8).$$

Отметим, что последнее слагаемое содержит множитель  $1/2$ .

Вычисление поправок  $n$ -го порядка производится так:

1) Изображаются все топологически неэквивалентные диаграммы (в данном случае все диаграммы, получающиеся перестановкой вершин четырехугольника, топологически эквивалентны).

2) Каждой линии сопоставляется гриновская функция  $G_{\alpha\beta}^{(0)}(x - x')$ .

3) Каждому четырехугольнику сопоставляется функция  $\Gamma_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_1x_2, x_3x_4)$ .

4) Производятся интегрирование по координатам всех вершин четырехугольников и суммирование по спиновым переменным.

5) Каждая диаграмма множится на  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{m}{2}}(i)^n$ . Число  $m$  равно количеству различных диаграмм, которые соответствуют данной диаграмме в несимметризованной технике. Знак диаграммы тоже определяется из сопоставления с несимметризованной техникой.

Последнее положение можно проиллюстрировать следующим образом. Рассмотрим, например, диаграмму 10, а. В несимметризованной технике ей соответствуют диаграммы 8, д, е, ж, з. Следовательно,  $m=4$ . Что же касается диаграммы 10, в, то ей соответствуют только две диаграммы 8, и и 8, к, следовательно,  $m=2$  и соответствующее выражение входит с коэффициентом  $1/2^1$ .

Выбор знака перед диаграммой мы опять проиллюстрируем на примере диаграммы 10, а. Величина  $\Gamma^{(0)}$  получена антисимметризацией выражения, у которого точка 3 совпадает с 1, а 2 — с 4. Если теперь в выражении, соответствующем рис. 10, а, считать эти координаты совпадающими, мы немедленно получим диаграмму на рис. 8, д, которая содержит две петли и входит с коэффициентом  $(i)^2$ . При практических расчетах проще всего сначала написать аргументы во всех  $\Gamma^{(0)}$ , а уже затем расставлять аргументы в  $G^{(0)}$ , имея при этом в виду соответствие с какой-либо диаграммой на рис. 8.

<sup>1)</sup> В сложных диаграммах такая программа может оказаться трудно выполнимой. В этом случае проще прямо получать аналитическое выражение по формуле (8.14), используя диаграммы лишь как указатели различных способов спаривания.

Согласно изложенным правилам, диаграмме третьего порядка на рис. 11 соответствует выражение

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(i)^3}{2} \int d^4x_1 \dots d^4x_{12} G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-x_1) G_{\gamma_3\gamma_5}^{(0)}(x_3-x_5) \times \\
 & \times G_{\gamma_7\gamma_9}^{(0)}(x_7-x_9) G_{\gamma_{11}\beta}^{(0)}(x_{11}-x') G_{\gamma_4\gamma_{10}}^{(0)}(x_4-x_{10}) \times \\
 & \times G_{\gamma_{12}\gamma_6}^{(0)}(x_{12}-x_6) G_{\gamma_8\gamma_2}^{(0)}(x_8-x_2) \Gamma_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_1x_2, x_3x_4) \times \\
 & \times \Gamma_{\gamma_5\gamma_6, \gamma_7\gamma_8}^{(0)}(x_5x_6, x_7x_8) \Gamma_{\gamma_9\gamma_{10}, \gamma_{11}\gamma_{12}}^{(0)}(x_9x_{10}, x_{11}x_{12}).
 \end{aligned}$$

Очевидно, если вместо  $\Gamma^{(0)}$  подставить его выражение через потенциал  $U_{\alpha\beta, \gamma\delta}(r_1-r_2)$ , то все рассмотренные выражения перейдут в соответствующие формулы несимметризованной теории.

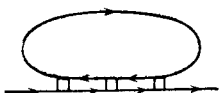
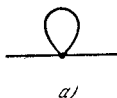
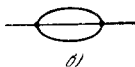


Рис. 11.



a)



б)



в)

Рис. 12.

Особенно простой вид приобретают эти выражения, когда мы имеем дело с точечным взаимодействием, не зависящим от спинов, т. е. с потенциалом

$$U_{\alpha\beta, \gamma\delta}(r_1-r_2) = \lambda \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta(r_1-r_2).$$

В этом случае  $\Gamma^{(0)}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}^{(0)} &= \lambda (\delta_{\gamma_1\gamma_3} \delta_{\gamma_2\gamma_4} - \delta_{\gamma_1\gamma_4} \delta_{\gamma_2\gamma_3}) \times \\
 &\times \delta(x_1-x_2) \delta(x_1-x_3) \delta(x_1-x_4) = \lambda L_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4} \times \\
 &\times \delta(x_1-x_2) \delta(x_1-x_3) \delta(x_1-x_4). \quad (9.3)
 \end{aligned}$$

Из четырех интегрирований по вершинам заштрихованных четырехугольников на рис. 9 и 10 остается только одно. Поэтому эти четырехугольники можно заменить точками. Например, диаграммы на рис. 9, 10, в и 11 будут иметь вид, изображенный на рис. 12, а соответствующие

выражения будут равны

$$i\lambda L_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4} G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(0) \int d^4x_1 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-x_1) G_{\gamma_4\beta}^{(0)}(x_1-x'), \quad \text{а)}$$

$$-\frac{\lambda^2}{2} L_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4} L_{\gamma_5\gamma_6, \gamma_7\gamma_8} \int d^4x_1 d^4x_2 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-x_1) G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_1-x_2) \times \\ \times G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_2-x_1) G_{\gamma_5\gamma_6}^{(0)}(x_2-x') G_{\gamma_7\gamma_8}^{(0)}(x_1-x_2), \quad \text{б)}$$

$$-\frac{i\lambda^3}{2} L_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4} L_{\gamma_5\gamma_6, \gamma_7\gamma_8} L_{\gamma_9\gamma_{10}, \gamma_{11}\gamma_{12}} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-x_1) \times \\ \times G_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x_1-x_2) G_{\gamma_5\gamma_6}^{(0)}(x_2-x_3) G_{\gamma_7\gamma_8}^{(0)}(x_3-x') G_{\gamma_9\gamma_{10}}^{(0)}(x_1-x_3) \times \\ \times G_{\gamma_{11}\gamma_{12}}^{(0)}(x_3-x_2) G_{\gamma_6\gamma_2}^{(0)}(x_2-x_1). \quad \text{в)}$$

Б. Взаимодействие ферми-частиц с фононами. Ввиду дальнейших применений мы будем считать, что речь идет об изотропной модели металла, в которой электроны взаимодействуют с фононами. Механизм взаимодействия состоит в том, что колебания среды приводят к появлению поляризации. В результате энергия электронов меняется на величину

$$-e \int n(\mathbf{r}) K(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \operatorname{div} \mathbf{P}(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (9.4)$$

где  $n(\mathbf{r})$  — плотность электронов в точке  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{P}$  — вектор поляризации, а  $K(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  — функция взаимодействия. При  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ , меньших постоянной решетки,  $K(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \approx \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ .

На больших расстояниях  $K(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  быстро спадает до нуля благодаря экранировке поляризационного заряда электронами. Это дает возможность заменить  $K(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$  на  $a^{2\delta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ , где  $a$  — постоянная порядка периода решетки. Вектор поляризации  $\mathbf{P}$  пропорционален смещению среды

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = C\mathbf{q}(\mathbf{r}),$$

где  $C$  — константа, имеющая порядок  $Ze \frac{N}{V} \left( \frac{N}{V} \right)$  — число ионов в единице объема, а  $Ze$  — их заряд).

Так как в энергию взаимодействия электронов с колебаниями решетки входит  $\operatorname{div} \mathbf{P} = C \operatorname{div} \mathbf{q}$ , то отсюда следует, что электроны взаимодействуют только с продоль-

ными колебаниями. Оператор энергии взаимодействия, согласно (9.4), можно написать в виде

$$ea^2C \int \psi^+(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \operatorname{div} \mathbf{q}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Поскольку сами операторы  $q_k$  выражаются через операторы возникновения и уничтожения с некоторым коэффициентом пропорциональности, мы можем включить в определение операторов поля добавочный множитель так, чтобы сделать более удобным вид оператора  $H_{int}$ . Нетрудно увидеть, что при нашем выборе операторов  $\varphi(x)$  (7.13) гамильтониан электрон-фононного взаимодействия запишется в виде

$$H_{int} = g \int \psi_a^+(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (9.5)$$

где константа взаимодействия  $g$  равна

$$g = \frac{ea^2C}{u_0 \sqrt{\rho}}$$

( $u_0 = \frac{\omega_0(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|}$  — скорость звука). Если подставить сюда порядки величин всех констант, выраженные через электронные параметры, то мы получим:

$$g^2 = \frac{2\pi^2\zeta}{p_0 m}, \quad (9.6)$$

где  $m$  — масса электрона. При таком определении константа  $\zeta$  безразмерна и при сравнении с опытными данными для металлов оказывается порядка единицы.

При нахождении гриновских функций необходимо учитывать только четные члены разложения  $S(\infty)$  по  $H_{int}$ . Поскольку усреднение электронных и фононных операторов происходит независимо, диаграммы для электронной функции Грина оказываются теми же, что и в случае двухчастичного взаимодействия фермионов между собой. Единственное, что надо сделать, — это заменить везде волнистые линии на пунктирные, соответствующие гриновской функции фононов, а в соответствующих выражениях произвести замену

$$V(x_1 - x_2) \rightarrow g^2 D^{(0)}(x_1 - x_2).$$

Теперь рассмотрим гриновскую функцию фононов. Первые не исчезающие поправки в этой функции получаются во втором порядке по  $H_{int}$  и изображаются диаграммами на рис. 13. Соответствующие выражения равны

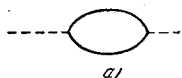
$$-g^2 t \int d^4 x_1 d^4 x_2 D^{(0)}(x - x_1) D^{(0)}(x_2 - x') \times \\ \times G_{\alpha\beta}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\beta\alpha}^{(0)}(x_2 - x_1), \quad a)$$

$$+g^2 t \int d^4 x_1 d^4 x_2 D^{(0)}(x - x_1) D^{(0)}(x_2 - x') \times \\ \times G_{\alpha\alpha}^{(0)}(0) G_{\beta\beta}^{(0)}(0). \quad б)$$

Покажем, что второй член в этой формуле должен быть положен равным нулю. Действительно, согласно определению функции  $D^{(0)}$ , в нее входят величины  $\varphi$ , пропорциональные  $\text{div } \mathbf{q}$ , где  $\mathbf{q}$  — вектор смещения. Отсюда следует, что функция  $D^{(0)}(x - x_1)$  пропорциональна

$$\langle T(\varphi(x), \text{div } \mathbf{q}(x_1)) \rangle = \text{div}_{r_1} \langle T(\varphi(x) \mathbf{q}(x_1)) \rangle.$$

Поскольку в выражении для диаграммы 13, б координата  $r_1$  входит только в  $D^{(0)}(x - x_1)$ , а эта функция имеет вид дивергенции, интеграл по  $d\mathbf{r}_1$



a)



б)

Рис. 13.

преобразуется в поверхностный и обращается в нуль, независимо от того, считается ли смещение на границе равным нулю или подчиняется периодическим граничным условиям. По тем же причинам обращаются в нуль вообще все диаграммы для  $D$ -функции, в которых внешние концы оказываются разъединенными.

Общие правила для вычисления поправок к гриновским функциям электронов и фононов можно сформулировать следующим образом. Для вычисления поправки порядка  $2n$  необходимо:

1) составить все топологически неэквивалентные связанные (здесь это подразумевает также отсутствие диаграмм типа 13, б) диаграммы с  $2n$  вершинами;

2) каждой сплошной линии сопоставляется функция  $G_{\alpha\beta}^{(0)}(x - x')$ , а пунктирной — функция  $D^{(0)}(x - x')$ ;

3) производятся интегрирование по координатам всех вершин и суммирование по спинам;

4) полученное выражение умножается на  $g^{2n}(-1)^F(t)^n$ , где  $F$  — количество замкнутых петель, образованных фермиевскими  $G^{(0)}$ -линиями.

В качестве примера приведем выражение для диаграммы на рис. 14:

$$g^4 \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 D^{(0)}(x - x_1) D^{(0)}(x_2 - x_3) D^{(0)}(x_4 - x') \times \\ \times G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2 \gamma_4}^{(0)}(x_2 - x_1) G_{\gamma_4 \gamma_3}^{(0)}(x_4 - x_3) G_{\gamma_3 \gamma_1}^{(0)}(x_3 - x_1).$$

В. Внешнее поле. Последний пример, который мы рассмотрим, — это взаимодействие частиц с внешним полем. Гамильтониан взаимодействия, согласно § 6, имеет вид

$$H_{int} = \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) V_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \psi_\beta(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (9.7)$$



Рис. 14.

Индексы  $\alpha\beta$  у потенциала  $V$  относятся к тому случаю, когда рассматривается влияние внешнего магнитного поля на спин частиц. В этом случае  $V_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \sigma_{\alpha\beta} H(\mathbf{r}, t)$ , где  $\mu_0$  — магнитный момент частицы,  $\sigma$  — матрицы Паули.

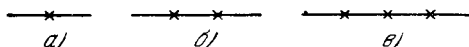


Рис. 15.

Нетрудно видеть, что все диаграммы в рассматриваемом примере имеют элементарный вид, изображенный на рис. 15. Крестик на диаграмме соответствует потенциалу  $V_{\alpha\beta}(x)$ . Например, выражение для диаграммы 15, б равно

$$\int d^4 x_1 d^4 x_2 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_2 \gamma_3}^{(0)}(x_1 - x_2) \times \\ \times G_{\gamma_4 \beta}^{(0)}(x_2 - x') V_{\gamma_1 \gamma_2}(x_1) V_{\gamma_3 \gamma_4}(x_2).$$

Правила составления диаграмм и соответствующих выражений тривиальны. Диаграммы всех порядков имеют одинаковый коэффициент 1. Единственное, что следует отметить, — это нарушение однородности пространства и времени,

В результате гриновская функция уже будет зависеть по отдельности от  $x$  и  $x'$ , а не только от разности  $x - x'$ .

## 2. Диаграммная техника в импульсном пространстве.

**Примеры.** Изложенная выше техника позволяет без труда написать любой член ряда теории возмущений в интегральной форме. Однако вычисление интегралов весьма затруднительно ввиду того, что  $G^{(0)}$  и  $D^{(0)}$  являются разрывными функциями временного аргумента. Для вычисления поправок к гриновским функциям таким способом пришлось бы делить интегрирование по времени на множество областей, число которых росло бы катастрофически быстро с ростом порядка приближения. Выходом из этого положения является разложение всех величин в интегралы Фурье.

Начнем, прежде всего, с двухчастичного взаимодействия.

**А. Двухчастичное взаимодействие ферми-частиц.** Рассмотрим выражение, соответствующее диаграмме на рис. 4, б

$$i \int G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(x_1 - x_2) G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(x_2 - x') \times \\ \times V(x_1 - x_2) d^4x_1 d^4x_2.$$

Произведем разложение всех величин в интегралы Фурье по формулам

$$G_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} G_{\alpha\gamma}^{(0)}(p) e^{ip(x_1 - x_2)},$$

$$V(x_1 - x_2) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} V(q) e^{iq(x_1 - x_2)},$$

где  $p$  и  $q$  — четырехмерные векторы  $p = (\mathbf{p}, \omega)$ ,  $q = (\mathbf{q}, \omega)$ , а произведение  $p(x_1 - x_2)$  равно  $\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)$ . Выражение для свободной фермиевской функции  $G_{\alpha\gamma}^{(0)}(p)$  уже было найдено в § 7 (формула (7.7) с заменой  $\omega \rightarrow \omega + \mu$ ). Если подставить эти разложения в написанную выше поправку для гриновской функции, последняя становится равной

$$i(2\pi)^{-16} \int G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(p_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(p_2) G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(p_3) V(q) e^{ip_1(x - x_1) + ip_2(x_1 - x_2)} \times \\ \times e^{ip_3(x_2 - x') + iq(x_1 - x_2)} d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4q d^4x_1 d^4x_2.$$



Проинтегрируем по  $d^4x_1$  и  $d^4x_2$ . При этом получим:

$$i(2\pi)^{-8} \int G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(p_1) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(p_2) G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(p_3) V(q) \delta(p_1 - p_2 - q) \times \\ \times \delta(p_2 + q - p_3) e^{ip_1x - ip_3x'} d^4p_1 d^4p_2 d^4p_3 d^4q.$$

Возьмем теперь фурье-компоненты от этого интеграла по  $x$  и по  $x'$ . В результате получаем:

$$\delta G_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p') = i \int G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(p) G_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(p_2) G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(p') V(q) \times \\ \times \delta(p - p_2 - q) \delta(p_2 + q - p') d^4p_2 d^4q.$$

Сравнивая это выражение с диаграммой 4, б, мы видим, что каждой сплошной линии теперь соответствует  $G^{(0)}(p)$ , волнистой линии —  $V(q)$ , каждой вершине соответствует  $\delta$ -функция  $\delta(\Sigma p) = \delta(\Sigma p) \delta(\Sigma \omega)$ , выражающая законы сохранения энергии и импульса, причем по импульсам внутренних линий берется интеграл. Выполняя интегрирование по  $d^4p_2$  и учитывая, что  $G_{\alpha\beta}^{(0)}(p) = G^{(0)}(p) \delta_{\alpha\beta}$ , получаем:

$$\delta G_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p') = \delta G^{(1)}(p) \delta(p - p') (2\pi)^4 \delta_{\alpha\beta},$$

$$\delta G^{(1)}(p) = i G^{(0)}(p) \int G^{(0)}(p - q) V(q) \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p).$$

Полученное выражение  $\delta G^{(1)}(p)$ , представляющее собой поправку к фурье-компоненте функции  $G(x - x')$  по переменной  $x - x'$ , позволяет очень наглядно интерпретировать диаграммы. Мы можем представить себе частицу с импульсом  $p$ , которая в процессе своего движения спускает «квант взаимодействия» с импульсом  $q$  и сама приобретает импульс  $p - q$ . Через некоторое время частица поглощает этот квант и остается с импульсом  $p$ .

Аналогичные преобразования можно произвести и в других диаграммах. Например, поправка  $\delta G^{(1')}(p)$ , соответствующая диаграмме 4, а, имеет вид

$$\delta G^{(1')} = -2i G^{(0)}(p) V(0) \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p_1) e^{i\omega t} G^{(0)}(p),$$

где  $t \rightarrow +0$ . Множитель  $e^{i\omega t}$  под интегралом введен потому, что в координатном представлении здесь стоит  $G$ -функция

с совпадающими аргументами, которая, как уже отмечено, определяется как предел  $G^{(0)}(-0)$ . Коэффициент 2 появляется при взятии следа по спинам. Диаграммы  $\delta G^{(1)}$  и  $\delta G^{(1')}$  в импульсном представлении изображены на рис. 16.

Рассмотрим теперь диаграмму произвольного порядка  $n$ , содержащую  $2n$  вершин,  $2n+1$  сплошных линий и  $n$  волнистых линий. Если мы подставим формулы фурье-преобразования для  $G^{(0)}$  и  $V$  и проинтегрируем по  $2n$  координатам вершин, мы получим  $2n$  множителей типа  $\delta(\Sigma p)$ , выражающих законы сохранения. Один из этих законов приводит к равенству внешних импульсов, в результате чего все члены разложения  $G(x, x')$  в ряд теории возмущений будут зависеть только от разности  $x - x'$ , что является

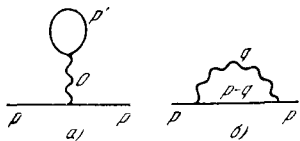


Рис. 16.

очевидным следствием однородности пространства. Остающиеся  $2n-1$   $\delta$ -функций приводят к тому, что из  $3n-1$  интегрирований по 4-импульсам внутренних линий (как сплошных, так и волнистых) остаются только  $n$  интегрирований.

Теперь изложим общие правила, по которым можно написать выражения, отвечающие определенным диаграммам.

1) Всем линиям приписываются определенные 4-импульсы. При этом две внешние линии имеют внешний импульс, а импульсы внутренних линий должны удовлетворять законам сохранения в каждой вершине.

2) Каждой сплошной линии сопоставляется

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(p) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\omega - \xi(p) + i\delta \operatorname{sign} \xi(p)},$$

где

$$\xi(p) = \varepsilon_0(p) - \mu = \frac{p^2}{2m} - \mu, \quad \delta \rightarrow +0.$$

3) Каждой волнистой линии сопоставляется

$$V(q) \equiv U(q).$$

4) Проводится интегрирование по  $n$  независимым 4-импульсам.

5) Перед получившимся выражением ставится коэффициент  $(i)^n (2\pi)^{-4n} (-1)^F$ , где  $F$  — число замкнутых петель.

По этим правилам нетрудно написать любую поправку к гриновской функции. Например, поправка на рис. 17 равна

$$\begin{aligned}
 & -i\delta_{\alpha\beta} G^{(0)^2}(p) (2\pi)^{-20} \int d^4 q_1 \dots d^4 q_4 U(q_1) U(q_2) U(q_3) \times \\
 & \times U(q_1 + q_2 + q_3) U(q_4) G^{(0)}(p - q_1) G^{(0)}(p - q_1 - q_2) \times \\
 & \times G^{(0)}(p - q_1 - q_2 - q_4) G^{(0)}(p - q_1 - q_2 - q_3 - q_4) \times \\
 & \times G^{(0)}(p - q_4) \int d^4 p_1 G^{(0)}(p_1) G^{(0)}(p_1 + q_3) G^{(0)}(p_1 + q_2 + q_3) \times \\
 & \times G^{(0)}(p_1 + q_1 + q_2 + q_3).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь другой, симметризованный вариант диаграммной техники для двухчастичного взаимодействия.

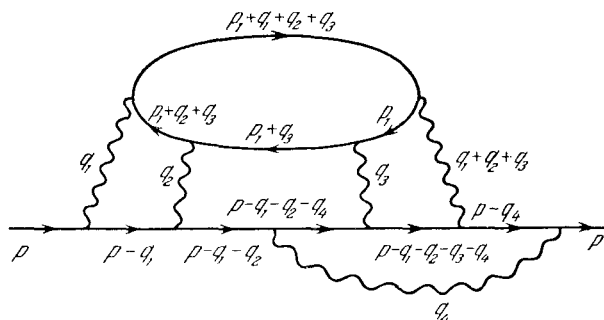


Рис. 17.

Раньше была введена симметризованная величина  $\Gamma_{\gamma_1 \gamma_2, \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(x_1 x_2; x_3 x_4)$ . Величина  $\Gamma^{(0)}$  по своему определению зависит только от разностей координат. Поэтому фурье-компоненты  $\Gamma^{(0)}$  будут содержать  $\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$ . Ввиду этого нам будет удобно сразу определить фурье-компоненту  $\Gamma^{(0)}$  как

$$\begin{aligned}
 (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3) = \\
 = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 \Gamma^{(0)}(x_1 x_2, x_3 x_4) e^{-i p_1 x_1 - i p_2 x_2 + i p_3 x_3 + i p_4 x_4}.
 \end{aligned}$$

Преобразование Фурье поправки первого порядка, соответ-

ствующей диаграмме на рис. 9, имеет вид

$$-iG^{(0)2}(p) \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \Gamma_{\alpha\gamma, \beta\gamma}(pp_1; pp_1) G^{(0)}(p_1).$$

Диаграмма в импульсном пространстве изображена на рис. 18. Общие правила построения диаграмм ничем не отличаются от предыдущего. В частности, коэффициент при диаграмме  $n$ -го порядка отличается от коэффициента в координатном представлении только множителем  $(2\pi)^{-4n}$ .

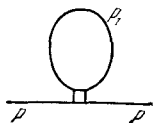


Рис. 18.

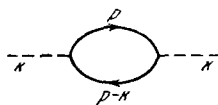


Рис. 19.

Б. Взаимодействие электронов с фонами. Общие правила расшифровки диаграммы порядка  $2n$  для гриновской функции электрона или фона, сводятся к следующему:

1) каждой сплошной линии сопоставляется

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{\omega - \xi(p) + i\delta \operatorname{sign} \xi(p)},$$

где  $\delta \rightarrow +0$ ;

2) каждой фоновой (пунктирной) линии сопоставляется (см. (7.16))

$$D_0(k) = \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 - \omega_0^2(k) + i\delta},$$

где  $\delta \rightarrow +0$ ;

3) по  $n$  независимым импульсам производится интегрирование;

4) результат интегрирования множится на

$$g^{2n} (2\pi)^{-4n} (i)^n (-1)^F,$$

где  $F$  — число замкнутых петель.

Например, диаграмме второго порядка на рис. 19 соответствует выражение

$$-2 [D^{(0)}(k)]^2 g^2 i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p) G^{(0)}(p-k).$$

В. Внешнее поле. Как уже было отмечено, в случае внешнего поля пространство становится неоднородным и  $G(x, x')$  перестает быть функцией только разности  $x - x'$ . Ввиду этого мы будем рассматривать функцию  $G_{\alpha\beta}(p, p')$ , являющуюся фурье-преобразованием от  $G_{\alpha\beta}(x, x')$ , по обоим переменным:

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \int G_{\alpha\beta}(p, p') e^{ipx - ip'x'} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4}.$$

Преобразуя по Фурье выражение, соответствующее диаграмме 15, а,

$$\int dx_1 G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - x_1) G_{\gamma_2\beta}^{(0)}(x_1 - x') V_{\gamma_1\gamma_2}(x_1),$$

получаем:

$$G^{(0)}(p) V_{\alpha\beta}(p - p') G^{(0)}(p'),$$

где  $V_{\alpha\beta}(p)$  — фурье-компонента  $V_{\alpha\beta}(x)$ :

$$V_{\alpha\beta}(x) = \int V_{\alpha\beta}(p) e^{ipx} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Соответствующая диаграмма в импульсном пространстве изображена на рис. 20, а. Диаграмме следующего порядка, изображенной на рис. 20, б, соответствует выражение

$$G^{(0)}(p) \int V_{\alpha\gamma}(p - p_1) G^{(0)}(p_1) V_{\gamma\beta}(p_1 - p') \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} G^{(0)}(p').$$

Таким образом, в диаграмме порядка  $n$  для  $G(p, p')$ :

1) левому внешнему концу сопоставляется  $G^{(0)}(p)$ , а правому —  $G^{(0)}(p')$ ;

2) крестик означает фурье-компоненту внешнего потенциала с импульсом, равным разности импульсов  $G^{(10)}$ -

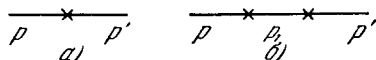


Рис. 20.

линий, стоящих слева и справа от этого крестика;

3) по всем импульсам  $G^{(0)}$ -линий, кроме двух внешних, производится интегрирование, а по спиновым переменным, от которых зависят  $V$  (кроме внешних), — суммирование;

4) после интегрирования и суммирования выражение умножается на коэффициент  $(2\pi)^{-1(n-1)}$ ;

## § 10. Уравнение Дайсона. Вершинная часть. Многочастичные функции Грина

**1. Суммирование диаграмм. Уравнение Дайсона.** В большинстве задач квантовой статистики, как правило, нельзя ограничиться учетом нескольких первых членов ряда теории возмущений. Вместо этого приходится суммировать различные бесконечные последовательности членов, соответствующих так называемым «главным» диаграммам, вклад которых оказывается, в силу условий задачи, одинаковым по порядку величины. Замечательным свойством изложенной выше диаграммной техники для гриновских функций является тот факт, что суммированию какой-нибудь бесконечной (или конечной) совокупности членов ряда теории возмущений можно сопоставить своеобразное «графическое суммирование» диаграмм. Диаграмма, изображающая такую сумму, составляется из элементов, каждый из которых в свою очередь является результатом суммирования. Например, линии такой диаграммы могут изображать сумму какой-нибудь бесконечной последовательности членов теории возмущений для гриновской функции («сумму» диаграмм). Сопоставление диаграмме определенных выражений производится по тем же правилам, по каким вычислялись выражения по теории возмущений: каждой линии диаграммы сопоставляется соответствующая ей сумма диаграмм и т. д.

Возможность графического суммирования опирается на изложенные выше правила вычисления поправки к гриновской функции по соответствующей диаграмме. Уже беглый взгляд показывает, что это выражение строится как бы из отдельных кирпичей — гриновских функций и вершинных операторов, причем связывающим элементом («цементом») служит интегрирование по координатам (или импульсам). Это позволяет строить диаграмму не из простейших элементов — нулевых гриновских функций  $G^{(0)}$  и элементарных вершин, а сразу из целых блоков, составленных из большого числа простейших элементов.

Рассмотрим, например, диаграмму рис. 21, *а*. Мы можем, прежде всего, записать соответствующее ей выражение, пользуясь правилами диаграммной техники. Поступим теперь следующим образом. Вычислим сначала вклад диаграммы, представляющей собой часть исходной, обведенную на ри-

сунке пунктиром, а затем запишем выражения, отвечающие диаграмме 21, б, но при этом перечеркнутой линии сопоставим не  $G^{(0)}$ , а усложненную линию. Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что оба способа дадут одинаковый результат.

Этот вывод обладает полной общностью. Мы можем всегда выделить из диаграммы для  $G$  часть, не содержащую внешних линий и соединенную с остатком двумя  $G^{(0)}$ -линиями, вычислить ее вклад, а выражение для всей диаграммы записать, пользуясь «сокращенной» диаграммой, где теперь уже вместо соответствующей линии следует подставить вклад выделенной части.

Любую часть диаграммы, соединенную с остатком двумя  $G^{(0)}$ -(или  $D^{(0)}$ -) линиями, мы будем называть собственно энер-

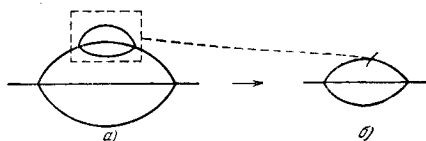


Рис. 21.

гетической частью. Неприводимой собственно энергетической частью мы назовем такую, которая не может быть разделена на две части, соединенные только одной  $G^{(0)}$ -линией. Например, собственно энергетические части на рис. 9, 10, а и 10, в являются неприводимыми, а часть на рис. 10, б является приводимой. Всякая диаграмма для функции  $G$  и  $D$  представляет собой основную линию с нанизанными на нее неприводимыми собственно энергетическими частями, которые могут повторяться бесконечное количество раз и стоять в произвольной последовательности.

Просуммировать все диаграммы для гриновских функций в общем случае невозможно. Можно, однако, произвести частичное суммирование, так чтобы после этого осталась сумма только по разным неприводимым собственно энергетическим частям.

Рассмотрим любую диаграмму для  $G$ -функции. Она начинается с линии  $G^{(0)}$ . Затем стоит любая неприводимая собственно энергетическая часть. Если отсечь эти два элемента от диаграммы, то остаток будет опять начинаться с  $G^{(0)}$  и может содержать любое количество любых собственно энергетических частей. Таким образом, остаток опять представляет

собой полную  $G$ -функцию. Отсюда получаем следующее уравнение для  $G$ :

$$G = G^{(0)} + G^{(0)} \Sigma G$$

или, что то же самое,

$$G^{-1} = G^{(0)-1} - \Sigma, \quad (10.1)$$

где

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \dots \quad (10.2)$$

представляет собой сумму различных неприводимых собственно энергетических частей. Величину  $\Sigma$  мы будем называть полной неприводимой собственно энергетической частью или массовым оператором.

Вычисление  $\Sigma$  может быть осуществлено с помощью диаграмм, отличающихся от диаграмм для  $G$  отсутствием двух концевых  $G^{(0)}$ -линий. Однако в тех случаях, когда нельзя ограничиться вычислением первых диаграмм и необходимо просуммировать бесконечный ряд, как правило, оказывается удобным выразить  $\Sigma$  через другую совокупность диаграмм, которую мы назовем вершинной частью. Эта процедура зависит от конкретного вида взаимодействия и будет продемонстрирована на примере взаимодействий, рассмотренных в § 9.

А. Двухчастичное взаимодействие. В этом случае удобнее всего воспользоваться симметризованной формой теории. Член первого порядка в  $\Sigma$  соответствует диаграмме на рис. 9, без краевых  $G^{(0)}$ -линий. Из членов следующих порядков выделим, прежде всего, все диаграммы, в которых собственно энергетическая часть связывается с основной  $G$ -линией посредством одного заштрихованного квадрата  $\Gamma^{(0)}$ . Примером может служить рис. 10, а. Совершенно очевидно, что совокупность всех таких диаграмм для  $\Sigma$  может быть получена из диаграммы первого порядка добавлением всевозможных собственно энергетических частей к внутренней  $G^{(0)}$ -линии. При этом последняя преобразуется в полную линию  $G$ . Таким образом, совокупность всех диаграмм для  $\Sigma$ , связанных с основной  $G$ -линией одним квадратом  $\Gamma^{(0)}$ , равна

$$\Sigma_{\alpha\beta}^{(1)}(p) = i \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \Gamma_{\alpha\gamma; \delta\beta}^{(0)}(p, p_1; p_1, p) G_{\delta\gamma}(p_1). \quad (10.3)$$



Условимся изображать полную  $G$ -функцию в виде жирной линии. Тогда величина  $\Sigma^{(1)}$  может быть изображена в виде диаграммы на рис. 22.

Самой простой диаграммой, не входящей в эту последовательность, является собственно энергетическая часть на рис. 10, в. Некоторые из более сложных диаграмм могут быть получены включением собственно энергетических частей во внутренние  $G^{(0)}$ -линии. Однако таким способом нельзя получить диаграмму на рис. 11. Тем не менее ее тоже можно рассматривать как некоторое усложнение диаграммы рис. 10, в. Если мы отсечем три внутренние  $G^{(0)}$ -линии, исходящие из левого квадрата  $\Gamma^{(0)}$ , от остальной части диаграммы, мы увидим, что диаграмма 11 получается из диаграммы 10, в путем замены правого квадрата другой диаграммой, изображенной на рис. 23.



Рис. 22.

Нетрудно видеть, что вообще все диаграммы для  $\Sigma$ , не входящие в (10.3), могут быть получены из 10, в<sup>1)</sup> с помощью вставки собственно энер-

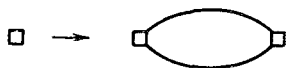


Рис. 23.

гетических частей во внутренних  $G^{(0)}$ -линии и замены правого квадрата совокупностью всех диаграмм с четырьмя концами, не распадающихся на несвязанные части. Эту совокупность мы назовем вершинной частью, будем обозначать ее посредством  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  и изображать ее на диаграммах в виде заштрихованного квадрата. Отметим, что, так же как и в  $\Gamma^{(0)}$ , 4-импульсы, стоящие в  $\Gamma$ , должны удовлетворять законам сохранения:  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ .

Таким образом, вторая часть  $\Sigma$  изображается диаграммой на рис. 24 и равна

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = & -\frac{1}{2} \int \Gamma_{\alpha\xi, \eta\delta}^{(0)}(p, p_1; p_2, p + p_1 - p_2) G_{\eta\mu}(p_2) G_{\nu\xi}(p_1) \times \\ & \times G_{\delta\gamma}(p + p_1 - p_2) \Gamma_{\mu\gamma, \nu\beta}(p_2, p + p_1 - p_2; p_1, p) \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

<sup>1)</sup> Диаграммы 9 и 10, в, являющиеся основой для получения более сложных диаграмм, иногда называют скелетными.

Подставляя  $\Sigma = \Sigma^{(1)} + \Sigma^{(2)}$  в уравнение (10.1), получаем:

$$\begin{aligned} [\omega - \xi(p)] G_{\alpha\beta}(p) - i \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\eta}^{(0)}(pp_1; p_1 p) G_{\gamma\xi}(p_1) G_{\eta\beta}(p) + \\ + \frac{1}{2} \int \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\delta}^{(0)}(p, p_1; p_2, p_1 + p - p_2) G_{\gamma\mu}(p_2) G_{\nu\xi}(p_1) \times \\ \times G_{\delta\gamma}(p + p_1 - p_2) \times \\ \times \Gamma_{\mu\gamma, \nu\rho}(p_2, p + p_1 - p_2; p_1, p) \frac{d^4 p_1 d^4 p_2}{(2\pi)^8} G_{\rho\beta}(p) = \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Это уравнение, связывающее  $G$ -функцию с вершинной частью, называется уравнением Дайсона. Здесь мы получили это уравнение путем суммирования диаграмм. Ниже будет произведен аналитический вывод уравнения Дайсона и более подробное рассмотрение вершинной части.



Рис. 24.

Б. Электрон-фононное взаимодействие. Наиболее простая диаграмма для  $\Sigma$  в гриновской функции электрона соответствует рис. 25, а. Совершенно аналогично предыдущему нетрудно убедиться в том, что эта диаграмма является единственной скелетной диаграммой, т. е. все более сложные диаграммы могут быть получены с помощью добавления собственно энергетических частей к внутренним  $G^{(0)}$ - и  $D^{(0)}$ -линиям и заменой правой вершины на совокупность всех диаграмм с одним фононным и двумя электронными концами. Эту величину мы будем называть вершинной частью  $\Gamma(p, p - k; k)$  и изображать ее на диаграмме заштрихованным треугольником.



Рис. 25.

Таким образом, в случае электрон-фононного взаимодействия полная неприводимая собственно энергетическая часть для электрона  $\Sigma$  изображается диаграммой на рис. 25, б и равна

$$\Sigma = ig \int G(p - k) D(k) \Gamma(p - k, p; k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \quad (10.6)$$

(здесь положено  $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$ ).

Подстановка этого выражения в (10.1) дает уравнение Дайсона:

$$[\omega - \xi(p)] G(p) - ig \int G(p-k) D(k) \times \\ \times \Gamma(p-k, p; k) \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G(p) = 1. \quad (10.7)$$

Аналогичным образом собственно энергетическая часть для фононов, которую мы обозначим символом  $\Pi$ , может быть получена из скелетной диаграммы на рис. 26, а заменой электронных  $G^{(0)}$ -линий полными  $G$ -линиями и одной из констант  $g$  — вершинной частью. При этом диаграмма 26, а переходит в 26, б, равную

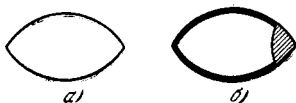


Рис. 26.

$$\Pi(k) = -2ig \int G(p) G(p-k) \Gamma(p, p-k; k) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (10.8)$$

Уравнение Дайсона в этом случае имеет вид

$$[\omega_0^2(k)]^{-1} [\omega^2 - \omega_0^2(k)] D(k) + \\ + 2ig \int G(p) G(p-k) \Gamma(p, p-k; k) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} D(k) = 1. \quad (10.9)$$

В. Внешнее поле. Для системы ферми-частиц во внешнем поле тоже может быть написано уравнение типа уравнений Дайсона. Принимая во внимание, что все диаграммы для  $G$  имеют вид цепочек, подобных рис. 15, мы приходим к выводу, что роль  $\Sigma$  играет фурье-компонента потенциала  $V_{\alpha\beta}$ . Уравнение Дайсона в этом случае имеет вид

$$[\omega - \xi(p)] G_{\alpha\beta}(p, p') - \int V_{\alpha\gamma}(p - p_1) G_{\gamma\beta}(p_1, p') \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (10.10)$$

## 2. Вершинные части. Многочастичные функции Грина.

Уравнения Дайсона можно получить и непосредственно из уравнений движения для гайзенберговских операторов

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha}{\partial t} = [\tilde{\psi}_\alpha(x), \hat{H} - \hat{N}_\mu], \\ \hat{H} = - \int \psi_\alpha^+(r) \frac{\Delta}{2m} \psi_\alpha(r) dr + H_{int}.$$

Операторы  $\hat{H}$  и  $\hat{N}$  мы можем представлять себе выраженными как через шредингеровские операторы  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ , так и через гайзенберговские операторы  $\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , поскольку  $\hat{H}$  и  $\hat{N}$  одинаковы в обоих представлениях.

Выделяя  $H_{int}$  из  $\hat{H} = \mu \hat{N}$  и используя правила коммутации для операторов  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\psi}^+$ , взятых в один момент времени, получим:

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha}{\partial t} = \left( -\frac{\Delta}{2m} - \mu \right) \tilde{\psi}_\alpha(x) + [\tilde{\psi}_\alpha(x), H_{int}].$$

Продифференцируем  $G$ -функцию по первому временному аргументу:

$$i \frac{\partial}{\partial t} G_{\alpha\beta}(x, x') = \frac{\partial}{\partial t} \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle.$$

Представим  $T(\dots)$  в виде

$$\theta(t - t') \tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x') - \theta(t' - t) \tilde{\psi}_\beta^+(x') \tilde{\psi}_\alpha(x),$$

где  $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} G_{\alpha\beta}(x, x') &= \\ &= \theta(t - t') \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t} \tilde{\psi}_\beta^+(x') - \theta(t' - t) \tilde{\psi}_\beta^+(x') \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t} + \\ &+ \delta(t - t') (\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t) \tilde{\psi}_\beta(\mathbf{r}', t) + \tilde{\psi}_\beta^+(\mathbf{r}', t) \tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, t)) = \\ &= \langle T \left( \frac{\partial \tilde{\psi}_\alpha(x)}{\partial t} \tilde{\psi}_\beta^+(x') \right) \rangle + \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали правила коммутации. Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) G_{\alpha\beta}(x, x') &= \\ &= \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta} - i \langle T([\tilde{\psi}_\alpha(x) H_{int}], \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle. \quad (10.11) \end{aligned}$$

Вид правой части зависит от конкретного взаимодействия, поэтому мы перейдем к рассмотрению отдельных частных случаев.

А. Двухчастичное взаимодействие. Оператор  $H_{int}$  определяется формулой (9.2). Производя вычисления и приведя результат к симметричной форме (подобно тому как это было сделано при выводе (9.3)), получим выражение для последнего члена в (10.11):

$$-\frac{i}{2} \int d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \Gamma_{\alpha\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)} (x x_2; x_3 x_4) \times \\ \times \langle T(\tilde{\psi}_{\gamma_2}^+(x_2) \tilde{\psi}_{\gamma_4}(x_4) \tilde{\psi}_{\gamma_3}(x_3) \tilde{\psi}_{\beta}^+(x')) \rangle.$$

Таким образом, задача сводится к нахождению среднего от хронологизированного произведения четырех  $\psi$ -операторов. Эту величину мы будем называть двухчастичной функцией Грина:

$$G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\Pi}(x_1 x_2; x_3 x_4) = \langle T(\tilde{\psi}_{\alpha}(x_1) \tilde{\psi}_{\beta}(x_2) \tilde{\psi}_{\gamma}^+(x_3) \tilde{\psi}_{\delta}^+(x_4)) \rangle. \quad (10.12)$$

Согласно формуле (6.32), величина  $G^{\Pi}$  может быть выражена через операторы  $\psi$  в представлении взаимодействия:

$$G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\Pi}(x_1 x_2; x_3 x_4) = \frac{\langle T(\psi_{\alpha}(x_1) \psi_{\beta}(x_2) \psi_{\gamma}^+(x_3) \psi_{\delta}^+(x_4)) S(\infty) \rangle}{\langle S(\infty) \rangle}. \quad (10.13)$$

Вычисление этого выражения может быть произведено в полной аналогии с вычислением гриновской функции. Оператор  $S(\infty)$  в числителе разлагается в ряд по степеням  $H_{int}$ . Применяя затем теорему Вика, можно представить каждый член этого ряда в виде суммы членов, содержащих произведения функций  $G^{(0)}$ . Каждому из таких членов может быть сопоставлена диаграмма Файнмана. В отличие от диаграмм для гриновской функции все эти диаграммы будут обладать четырьмя внешними точками. Нетрудно увидеть, что, так же как и раньше, достаточно учитывать только связанные диаграммы, т. е. такие, в которых нет частей, не связанных ни с одним из внешних концов; в то же время следует отбросить множитель  $\langle S(\infty) \rangle$  в знаменателе (10.13). Остается справедливым и другое правило, а именно, все выражения зависят от порядка диаграммы только посредством множителей  $\lambda^n$ . Это дает возможность оперировать с частями диаграммы и производить частичные суммирования.

Все связанные диаграммы для  $G^{II}$  делятся на две группы. К одной из них принадлежат такие диаграммы, в которых точка  $x_1$  последовательными спариваниями связывается с точкой  $x_3$ , а точка  $x_2$  — с точкой  $x_4$ , но, например, точки  $x_1$  и  $x_4$  оказываются изолированными друг от друга. Такие диаграммы распадаются на две отдельные части, не связанные друг с другом никакими линиями. К этой же группе мы

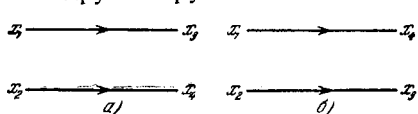


Рис. 27.

отнесем диаграммы, в которых  $x_1$  связано с  $x_4$ , а  $x_2$  — с  $x_3$ , но нет связей между  $x_1$  и  $x_3$ .

Простейшие диаграммы такого рода получаются в нулевом порядке по  $H_{int}$  и изображены на рис. 27. Им соответствуют выражения

$$G_{\alpha\gamma}^{(0)}(x_1 - x_3) G_{\beta\delta}^{(0)}(x_2 - x_4), \quad \text{а)}$$

$$- G_{\alpha\delta}^{(0)}(x_1 - x_4) G_{\beta\gamma}^{(0)}(x_2 - x_3). \quad \text{б)}$$

Нетрудно видеть, что все более сложные диаграммы этой группы получаются путем добавления собственно энергетических частей к  $G^{(0)}$ -линиям, т. е. путем замены тонких  $G^{(0)}$ -линий на жирные  $G$ -линии.

Другая группа представляет собой совокупность всех диаграмм, не распадающихся на отдельные части. Простейшая диаграмма такого типа получается в первом порядке по  $H_{int}$  и имеет вид, изображенный на рис. 28, а. Ей соответствует выражение

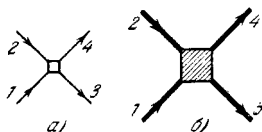


Рис. 28.

$$i \int G_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x_1 - x'_1) G_{\beta\gamma_2}^{(0)}(x_2 - x'_2) G_{\gamma_3\gamma}^{(0)}(x'_3 - x_3) G_{\gamma_4\delta}^{(0)}(x'_4 - x_4) \times \\ \times \Gamma_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x'_1 x'_2; x'_3 x'_4) d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x'_3 d^4 x'_4.$$

Более сложные диаграммы получаются из 28, а путем усложнения концевых  $G^{(0)}$ -линий и замены квадрата более сложными образованиями с четырьмя вершинами, как, например, на рис. 23. При этом в приведенной выше формуле  $G^{(0)}$  заменяются на  $G$ , а вместо  $\Gamma^{(0)}$  появляется величина  $\Gamma$ , отвечающая совокупности всех возможных диаграмм с четырьмя

внешними концами, иначе говоря, рис. 28, *а* переходит в рис. 28, *б*.

Из приведенных рассуждений следует, что величину  $G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\text{II}}(x_1 x_2; x_3 x_4)$  удобно представить в виде

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\text{II}}(x_1 x_2; x_3 x_4) = & G_{\alpha\gamma}(x_1 - x_3) G_{\beta\delta}(x_2 - x_4) - \\ & - G_{\alpha\delta}(x_1 - x_4) G_{\beta\gamma}(x_2 - x_3) + \\ & + i \int d^4 x'_1 \dots d^4 x'_4 G_{\alpha\gamma_1}(x_1 - x'_1) G_{\beta\gamma_2}(x_2 - x'_2) \times \\ & \times G_{\gamma_3\gamma}(x'_3 - x_3) G_{\gamma_4\delta}(x'_4 - x_4) \Gamma_{\gamma_1\gamma_2, \gamma_3\gamma_4}(x'_1 x'_2; x'_3 x'_4), \quad (10.14) \end{aligned}$$

причем величина  $\Gamma$  соответствует введенной ранее вершинной части.

Последний член в уравнении (10.11) равен

$$\frac{i}{2} \int d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \Gamma_{\alpha\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x x_2; x_3 x_4) G_{\gamma_3\gamma_4; \gamma_2\beta}^{\text{II}}(x_3 x_4; x_2 x').$$

Раскрывая  $G_{\gamma_3\gamma_4; \gamma_2\beta}$  согласно формуле (10.14) и учитывая антисимметрию  $\Gamma^{(0)}$  по аргументам с индексами 3 и 4, получаем из уравнения (10.11):

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_0 + \mu\right) G_{\alpha\beta}(x - x') - i \int d^4 x_2 d^4 x_3 d^4 x_4 \times \\ \times \Gamma_{\alpha\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x x_2; x_3 x_4) G_{\gamma_3\gamma_2}(x_3 - x_2) G_{\gamma_4\beta}(x_4 - x') + \\ + \frac{1}{2} \int d^4 x_2 \dots d^4 x_8 \Gamma_{\alpha\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(x x_2; x_3 x_4) \times \\ \times G_{\gamma_4\gamma_6}(x_4 - x_6) G_{\gamma_3\gamma_5}(x_3 - x_5) G_{\gamma_7\gamma_2}(x_7 - x_2) G_{\gamma_8\beta}(x_8 - x') \times \\ \times \Gamma_{\gamma_5\gamma_6; \gamma_7\gamma_8}(x_5 x_6; x_7 x_8) = \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta}. \quad (10.15) \end{aligned}$$

Ввиду однородности пространства величины  $\Gamma$  и  $G^{\text{II}}$  зависят только от трех разностей координат. Поэтому фурье-компоненты этих величин удобно определить так же, как и в случае  $\Gamma^{(0)}$ . Например,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \\ = \int \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(x_1 x_2; x_3 x_4) e^{-ip_1 x_1 - ip_2 x_2 + ip_3 x_3 + ip_4 x_4} d^4 x_1 \dots d^4 x_4. \quad (10.16) \end{aligned}$$

Связь фурье-компонент  $G^{\Pi}$  и  $\Gamma$ , согласно (10.14), определяется уравнением

$$G_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\Pi}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3) = G_{\alpha\gamma}(p_1) G_{\beta\delta}(p_2) \times \\ \times \delta(p_1 - p_3)(2\pi)^4 - G_{\alpha\delta}(p_1) G_{\beta\gamma}(p_2) \delta(p_2 - p_3)(2\pi)^4 + \\ + iG_{\alpha\gamma_1}(p_1) G_{\beta\gamma_2}(p_2) G_{\gamma_3\gamma}(p_3) G_{\gamma_4\delta}(p_1 + p_2 - p_3) \times \\ \times \Gamma_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}(p_1, p_2; p_3, p_1 + p_2 - p_3). \quad (10.17)$$

Производя фурье-преобразование уравнения (10.15), мы получаем уравнение (10.5). Таким образом, уравнение Дайсона выведено аналитическим путем, причем входящая в него величина  $\Gamma$  определяется соотношениями (10.12), (10.17) и (10.16).

Вычисление  $\Gamma$  может быть осуществлено путем суммирования диаграмм. Примеры таких диаграмм приведены на рис. 23, а также на рис. 29, а, б, в. Уже из того, что диаграммы для  $\Gamma$  можно рассматривать как некоторую часть диаграмм для  $G$ -функции, сле-

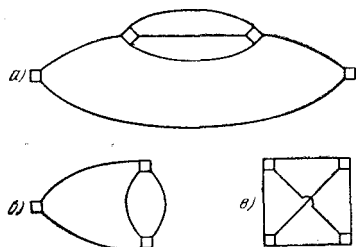


Рис. 29.

дует, что правила сопоставления каждой диаграмме соответствующих выражений остаются теми же, что и при вычислении  $G$ . В этом нетрудно убедиться и непосредственным образом, если воспользоваться аналитическим определением  $\Gamma$  и действовать дальше в полной аналогии с методами предыдущего параграфа.

Обычно при вычислении  $\Gamma$  бывает удобно предварительно произвести частичное суммирование отдельных частей. Для этой цели мы введем понятие компактной диаграммы. Так мы будем называть диаграмму, не содержащую собственно энергетических частей. Например, диаграммы на рис. 23 и 29, б и в — компактные, а диаграмма на рис. 29, а — некомпактная. Все диаграммы для  $\Gamma$  могут быть получены из компактных путем добавления собственно энергетических частей к внутренним  $G^{(0)}$ -линиям, т. е. путем замены  $G^{(0)}$ -линий на полные  $G$ -линии. Таким образом, для вычисления  $\Gamma$  достаточно ограничиться изображением компактных диаграмм и



каждой сплошной линии на диаграмме сопоставлять полные  $G$ -функции.

Б. Взаимодействие электронов с фононами. Взяв  $H_{int}$  в виде (9.5), находим последний член в уравнении (10.11):

$$-ig \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x') \tilde{\varphi}(x)) \rangle.$$

Величине

$$P_{\alpha\beta}(x_1 x_2; x_3) =$$

$$= \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1) \tilde{\psi}_\beta^+(x_2) \tilde{\varphi}(x_3)) \rangle \quad (10.18)$$

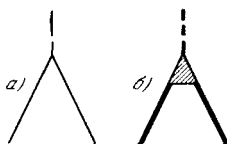


Рис. 30.

тоже может быть поставлена в соответствие совокупность диаграмм Файнмана с одним фононным и двумя электронными концами. Простейшая из этих диаграмм получается в первом порядке теории возмущений (рис. 30, а) и равна

$$-g\delta_{\alpha\beta} \int d^4 y G^{(0)}(x_1 - y) G^{(0)}(y - x_2) D^{(0)}(y - x).$$

Рассуждая так же, как и раньше, мы можем сопоставить величине  $P_{\alpha\beta}$  диаграмму 30, б), равную

$$P_{\alpha\beta}(x_1 x_2; x_3) = \delta_{\alpha\beta} P(x_1 x_2; x_3) =$$

$$= -\delta_{\alpha\beta} \int d^4 x'_1 d^4 x'_2 d^4 x'_3 G(x_1 - x'_1) G(x'_2 - x_2) D(x'_3 - x_3) \times \\ \times \Gamma(x'_1 x'_2; x'_3). \quad (10.19)$$

Функция  $\Gamma$  соответствует совокупности всех диаграмм с тремя внешними концами (одним фононным и двумя электронными). Таким образом,  $\Gamma$  представляет собой вершинную часть для электрон-фононного взаимодействия. Ввиду однородности пространства величины  $\Gamma$  и  $P$  зависят только от двух разностей координат. Поэтому, например, преобразование  $\Gamma$  в интеграл Фурье можно представить в форме

$$\Gamma(p, p - k; k) (2\pi)^4 \delta(p - p' - k) = \\ = \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 \Gamma(x_1 x_2; x_3) e^{-ipx_1 + ip'x_2 + ikx_3}. \quad (10.20)$$

Соотношение между фурье-компонентами  $\Gamma$  и  $P$  имеет вид

$$P(p, p - k; k) = -G(p) G(p - k) D(k) \Gamma(p, p - k; k). \quad (10.21)$$

Выражая последний член уравнения (10.11) для электрон-фононного взаимодействия с помощью формул (10.18) и (10.19), мы находим уравнение для  $G$  в координатном пространстве. Производя фурье-преобразование этого уравнения с помощью формулы (10.20), мы получаем уравнение Дайсона (10.7).

Все изложенное о вычислении вершинной части для двух-частичного взаимодействия остается справедливым и в данном случае. Для вычисления  $\Gamma$  надо изобразить все компактные диаграммы и сопоставить им аналитические формулы по тем же правилам, что и при вычислении  $G$ . При этом каждая сплошная линия будет означать полную  $G$ -функцию, каждая пунктирная — полную  $D$ -функцию. Примеры приведены на рис. 31.



Рис. 31.

Остановимся на смысле функций  $G^{\Pi}$  и  $P$ , введенных нами в процессе вывода уравнений Дайсона. Эти функции, а также другие средние от хронологизированных произведений большего

числа операторов поля называют многочастичными функциями Грина. Сами функции  $G$  и  $D$  называются поэтому одночастичными функциями Грина. Многочастичные функции Грина, так же как и одночастичные, определяют макроскопические свойства систем. В частности, двухчастичная функция Грина  $G^{\Pi}$  определяет поведение системы электронов во внешнем электромагнитном поле (см. гл. VI). Ввиду того, что эти функции зависят от большого числа аргументов, анализ их аналитических свойств представляет значительные трудности. Проще обстоит дело, когда некоторые аргументы считаются равными. Например, если в функции  $G^{\Pi}$  считать  $x_1 = x_3$ ,  $x_2 = x_4$ , то аналитические свойства фурье-преобразования этой функции по переменной  $x_1 - x_2$  те же, что и у гриновской функции фононов  $D(\omega, \mathbf{k})$ . Так как обычно представляют интерес именно такие частные случаи, то проще определять аналитические свойства соответствующих конкретных гриновских функций, не прибегая к изучению общего случая.

Полюсы фурье-компонент многочастичных функций, так же как и полюсы  $G(p)$  и  $D(k)$ , определяют спектр возбуждений системы. Среди них обязательно содержатся все полюсы

$G(p)$  и  $D(k)$ . Однако, кроме этих полюсов, могут появиться новые, соответствующие другим ветвям спектра возбуждений. Мы не будем заниматься общим анализом этого вопроса. В гл. IV, § 19 рассмотрен конкретный пример; найдено уравнение для полюсов двухчастичной гриновской функции ферми-системы и показано, что эти полюсы определяют бозевские ветви спектра возбуждений.

Для вычисления многочастичных гриновских функций в принципе можно было бы написать уравнения, аналогичные уравнениям Дайсона, которые связывают эти функции с функциями следующих порядков. Однако на практике такая процедура не дает каких-либо полезных результатов и проще непосредственно суммировать диаграммы. При этом часто оказывается, что определенная последовательность диаграмм является наиболее существенной. Обычно в таких случаях суммирование диаграмм не представляет большого труда.

Подчеркнем здесь еще раз простую связь между функциями  $G^{11}$  и  $P$  и вершинными частями.

**3. Энергия основного состояния.** В заключение этого параграфа выведем несколько формул, которые дают возможность получить поправку к энергии основного состояния, происходящую от взаимодействия частиц.

Вычтем из уравнения (10.11) соответствующее уравнение для функции  $G^{(0)}$ . При этом получим:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right) [G_{\alpha\beta}(x - x') - G_{\alpha\beta}^{(0)}(x - x')] = \\ = -i \langle T([\tilde{\psi}_{\alpha}(x), H_{int}], \tilde{\psi}_{\beta}^{+}(x')) \rangle.$$

Положим  $r \rightarrow r'$  и  $t' \rightarrow t + 0$ . Затем проинтегрируем обе части по  $r$ . При этом находим:

$$\nu \langle H_{int} \rangle = -i \int dr \lim_{\substack{r' \rightarrow r \\ t' \rightarrow t+0}} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu\right) \times \\ \times [G_{\alpha\alpha}(x - x') - G_{\alpha\alpha}^{(0)}(x - x')],$$

где  $\nu$  — число операторов  $\psi^{+}$ , входящих в  $H_{int}$ . Предположим, что гамильтониан взаимодействия пропорционален какой-то константе  $g$  (такую константу всегда можно ввести). Энергия основного состояния (точнее, потенциал  $\Omega = E - \mu N$ ) как функция  $\mu$  равна  $\Omega = \langle \hat{H} - \mu \hat{N} \rangle$ .

В силу известной статистической формулы (см. книгу Ландау и Лифшица [1])

$$\frac{\partial \Omega}{\partial g} = \left\langle \frac{\partial}{\partial g} (\hat{H} - \mu \hat{N}) \right\rangle = \frac{1}{g} \langle H_{int} \rangle.$$

Интегрируя это соотношение по  $dg$  от 0 до  $g$ , получаем:

$$\Omega - \Omega_0 = \int_0^g \frac{dg_1}{g_1} \langle H_{int} \rangle, \quad (10.22)$$

где  $\Omega_0$  — потенциал для невзаимодействующих частиц. Подставляя сюда найденное выше выражение  $\langle H_{int} \rangle$  через гриновскую функцию, получаем:

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 = & -\frac{i}{v} \int_0^g \frac{dg_1}{g_1} \int d\mathbf{r} \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} \left( t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m} + \mu \right) \times \\ & \times [G_{\alpha\alpha}(x - x') - G_{\alpha\alpha}^{(0)}(x - x')]. \end{aligned}$$

Полагая  $G_{\alpha\beta}(x - x') = \delta_{\alpha\beta} G(x - x')$ , переходя к импульсному представлению и воспользовавшись уравнением для  $G^{(0)}$ , находим окончательно:

$$\begin{aligned} \Omega - \Omega_0 = & -\frac{2i}{v} V \int_0^g \frac{dg_1}{g_1} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \\ & \times G^{(0)-1}(p) [G(p) - G^{(0)}(p)] e^{i\omega t}, \quad (10.23) \end{aligned}$$

где  $t \rightarrow +0$ ,  $V$  — объем системы.

Еще одну полезную формулу можно получить из соотношения (см. [1])

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial m} \right)_{T, V, \mu} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial m} \right\rangle.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial m} = \frac{1}{2m^2} \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Delta \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

то

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = -\frac{i}{2m^2} \int \left[ \Delta_x G_{\alpha\alpha} \left( x - x' \right) \right]_{\substack{x' \rightarrow x \\ t' \rightarrow t+0}} d\mathbf{r}.$$

Переходя к фурье-компонентам, получаем:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = \frac{iV}{m^2} \int p^2 G(p) e^{i\omega t} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \quad (10.24)$$

где  $t \rightarrow +0$ .

Наконец, здесь уместно еще напомнить формулу, приведенную в § 7,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -N = iV \int G(p) e^{i\omega t} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (10.25)$$

# ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ПРИ КОНЕЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ<sup>1)</sup>

## § 11. Температурные гриновские функции

**1. Общие свойства.** До сих пор мы изучали свойства многих частиц при абсолютном нуле температуры. При конечных температурах задача значительно усложняется.

Обычный «классический» метод статистической физики состоит в непосредственном вычислении термодинамических величин системы как функции ее температуры и плотности. При этом, поскольку фактически никакая задача такого рода не может быть решена точно, ответ выражается в виде разложения по степеням какого-нибудь малого параметра. Применяя обычную термодинамическую теорию возмущений (см. книгу Ландау и Лифшица [1]), мы легко написали бы два первых члена ряда теории возмущений для свободной энергии  $F$ :

$$F = F_0 + \sum_n V_{nn} e^{\frac{F_0 - E_n^{(0)}}{T}} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n, m} \frac{|V_{nm}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \left[ e^{\frac{F_0 - E_n^{(0)}}{T}} - e^{\frac{F_0 - E_m^{(0)}}{T}} \right] + \\ + \frac{1}{2T} \left( \sum_n V_{nn} e^{\frac{F_0 - E_n^{(0)}}{T}} \right)^2 + \dots$$

<sup>1)</sup> Рассуждения и выкладки в этой главе в значительной степени дублируют соответствующие места гл. II. Мы, однако, сочли целесообразным сохранить этот параллелизм ввиду важности этих глав для дальнейшего. К тому же это позволит читателю, уже знакомому с методами квантовой теории поля и интересующемуся только температурной диаграммной техникой, начать чтение книги непосредственно с гл. III.

Однако написание следующих членов (не говоря уже о непосредственном вычислении) является само по себе достаточно нелегкой задачей. Суммирование же какой-либо бесконечной последовательности членов ряда представляется совершенно безнадежным. В связи с этим в статистике при конечных температурах делается особенно привлекательным применение диаграммной техники квантовой теории поля, оперирующей с гриновскими функциями и позволяющей очень наглядно представить структуру и характер любого приближения.

Изложенная в предыдущей главе диаграммная техника не допускает прямого обобщения на случай конечных температур. Диаграммная техника при конечных температурах может быть построена для особых величин — температурных гриновских функций, зависящих не от времени  $t$ , как гриновские функции, рассмотренные ранее, а от некоторого фиктивного мнимого «времени» —  $i\tau$ , изменяющегося в интервале от  $-i/T$  до нуля (Мацубара [29]).

Как и в технике при  $T=0$ , в методе Мацубары вычисляются не сами термодинамические величины, а упомянутые температурные гриновские функции  $\mathfrak{G}(\mathbf{r}, \tau)$ . Любой член ряда теории возмущений для них описывается соответствующей фейнмановской диаграммой, и его вычисление производится по правилам фейнмановской техники: каждой линии диаграммы сопоставляется температурная гриновская функция свободной частицы  $\mathfrak{G}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau)$ , каждой вершине диаграммы — оператор взаимодействия и т. д. Единственное отличие по сравнению со случаем  $T=0$  состоит в том, что вместо интегрирования по времени  $t$  от  $-\infty$  до  $\infty$  в каждой вершине диаграммы производится интегрирование по  $\tau$  от 0 до  $1/T$ .

Фигурирующая в диаграммной технике при  $T \neq 0$  температурная гриновская функция  $\mathfrak{G}$  определяется как

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \begin{cases} -\text{Sp} \left[ e^{\frac{\mathfrak{G} + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau_1 - \tau_2)} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1) e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau_1 - \tau_2)} \psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}_2) \right], & \tau_1 > \tau_2; \\ \pm \text{Sp} \left[ e^{\frac{\mathfrak{G} + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau_1 - \tau_2)} \psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}_2) e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau_1 - \tau_2)} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1) \right], & \tau_1 < \tau_2. \end{cases} \quad (11.1)$$

Здесь  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$ ,  $\psi_\alpha^+(\mathbf{r})$  — шредингеровские операторы системы, а знаки «плюс» и «минус» относятся, соответственно, к случаям ферми- и бозе-частиц. Операция  $\text{Sp}$  означает взятие суммы всех диагональных элементов матрицы. При этом суммирование производится как по числу частиц в системе, так и по всем возможным при заданном числе частиц состояниям системы. Таким образом,  $\mathfrak{G}$  по определению является функцией температуры  $T$  и химического потенциала  $\mu$ . Стоящая в экспоненте в (11.1) величина  $\mathfrak{Q}$  представляет собой термодинамический потенциал в переменных  $T$ ,  $V$ ,  $\mu$  ( $d\mathfrak{Q} = -SdT - P dV - N d\mu$ ). Напомним, что операция  $\text{Sp} \{ e^{(\mathfrak{Q} + \mu \hat{N} - \hat{H})/T} \dots \}$  есть обычное статистическое усреднение по Гиббсу; эту операцию мы будем часто обозначать символом  $\langle \dots \rangle$ .

Температурная гриновская функция фонона  $\mathfrak{D}$  определяется аналогичным соотношением:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \\ = \begin{cases} -\text{Sp} \left[ e^{\frac{\mathfrak{Q} - \hat{H}}{T}} e^{\hat{H}(\tau_1 - \tau_2)} \varphi(\mathbf{r}_1) e^{-\hat{H}(\tau_1 - \tau_2)} \varphi(\mathbf{r}_2) \right], & \tau_1 > \tau_2, \\ -\text{Sp} \left[ e^{\frac{\mathfrak{Q} - \hat{H}}{T}} e^{-\hat{H}(\tau_1 - \tau_2)} \varphi(\mathbf{r}_2) e^{\hat{H}(\tau_1 - \tau_2)} \varphi(\mathbf{r}_1) \right], & \tau_1 < \tau_2, \end{cases} \quad (11.2) \end{aligned}$$

где  $\varphi(\mathbf{r})$  — шредингеровский оператор фононного поля.

Из определений (11.1), (11.2) сразу видно, что температурные гриновские функции зависят только от разности «времен»  $\tau_1 - \tau_2$ . Если к тому же система является изолированной и однородной, то они зависят, разумеется, лишь от разности пространственных координат:  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2)$ .  $\mathfrak{G}(\tau)$  является разрывной функцией переменной  $\tau$ , испытывая при значении  $\tau = 0$  скачок. Величину скачка можно вычислить непосредственно из определения  $\mathfrak{G}$ . Для случая фермиевских частиц

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\tau) - \mathfrak{G}(-\tau)|_{\tau \rightarrow +0} = \\ = -\text{Sp} \left\{ e^{\frac{\mathfrak{Q} + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} [\psi_\alpha(\mathbf{r}_1) \psi_\beta^+(\mathbf{r}_2) + \psi_\beta^+(\mathbf{r}_2) \psi_\alpha(\mathbf{r}_1)] \right\} \end{aligned}$$

и, согласно правилам коммутации  $\psi$  и  $\psi^+$ ,

$$\Delta \mathfrak{G} = -\delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Величина скачка  $\mathfrak{G}$ -функции бозе-частиц совпадает с величиной скачка для фермиевского случая,



Выражения (11.1), (11.2) можно представить в форме, аналогичной определению гриновской функции при равной нулю температуре. Для этого введем «гайзенберговские» операторы частиц, зависящие от «времени»  $\tau$ , по формулам<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}, \tau) &= e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} \psi_\alpha(\mathbf{r}) e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}, \\ \tilde{\bar{\psi}}_\alpha(\mathbf{r}, \tau) &= e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})}, \\ \tilde{\varphi}(\mathbf{r}, \tau) &= e^{\tau\hat{H}} \varphi(\mathbf{r}) e^{-\tau\hat{H}}.\end{aligned}\quad (11.3)$$

С их помощью громоздкие выражения типа (11.1) записываются в виде (ср. (7.1), (7.14)):

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) &= -\text{Sp} \left\{ e^{\frac{\mathcal{Q} + \mu\hat{N} - \hat{H}}{T}} T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \tilde{\bar{\psi}}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2)) \right\} \equiv \\ &\equiv -\langle T_\tau(\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1) \tilde{\bar{\psi}}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2)) \rangle.\end{aligned}\quad (11.4)$$

Символ  $T_\tau$  в (11.4) означает уже знакомую по предыдущей главе операцию  $T$ -упорядочения. Операторы, стоящие под знаком  $T_\tau$ -произведения, располагаются слева направо в порядке убывания «времени»  $\tau$  (мы снабдим символ  $T$ -произведения индексом  $\tau$ , чтобы отличить его от температуры  $T$ ). Напомним, что в случае ферми-частиц

$$T_\tau(\psi_1 \psi_2 \dots) = \delta_P \psi_{i_1} \psi_{i_2} \dots,$$

где справа операторы  $\psi$  расставлены в хронологическом порядке, а  $\delta_P$  равно  $+1$  или  $-1$ , в зависимости от того, является перестановка

$$1, 2, \dots \rightarrow i_1, i_2, \dots$$

четной или нечетной. В частности,

$$T_\tau(\tilde{\psi}(1) \tilde{\bar{\psi}}(2)) = \tilde{\psi}(1) \tilde{\bar{\psi}}(2), \quad \tau_1 > \tau_2,$$

$$T_\tau(\tilde{\psi}(1) \tilde{\bar{\psi}}(2)) = -\tilde{\bar{\psi}}(2) \tilde{\psi}(1), \quad \tau_1 < \tau_2.$$

<sup>1)</sup> Сразу же заметим, что  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  уже не являются эрмитовски сопряженными друг другу.

Аналогичными соотношениями определяются и многочастичные функции Грина техники Мацубары. Так, двухчастичная температурная функция Грина имеет вид

$$\mathbb{G}_{\alpha\beta}^{\Pi}{}_{\gamma\delta}(1, 2; 3, 4) = -\langle T_{\tau}(\tilde{\psi}_{\alpha}(1)\tilde{\psi}_{\beta}(2)\tilde{\bar{\psi}}_{\gamma}(3)\tilde{\bar{\psi}}_{\delta}(4)) \rangle. \quad (11.5)$$

Обобщение на случай гриновских функций, зависящих от большего числа переменных, очевидно.

Функции  $\mathbb{G}$  в принципе определяют все термодинамические свойства системы. Используя, например, формулу

$$N = \pm \int \mathbb{G}_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}, \tau + 0) d\mathbf{r}, \quad (11.6)$$

вытекающую непосредственно из определения  $\mathbb{G}$  и соотношения  $N = \int \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r})\psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , можно вычислить число частиц в системе как функцию ее химического потенциала  $\mu$  или, разрешая (11.6) относительно  $\mu$ , химический потенциал как функцию температуры и плотности  $n = N/V$ . Интегрируя затем известное термодинамическое соотношение  $\frac{\partial f}{\partial n} = \mu(n, T)$ , можно найти свободную энергию единицы объема  $f(n, T)$ .

Если в системе имеют место только парные взаимодействия между частицами, описываемые гамильтонианом

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{1}{2m} \int \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \Delta \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \\ & + \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}_1) \psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \psi_{\beta}(\mathbf{r}_2) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1), \end{aligned}$$

то ее энергия выражается через двухчастичную температурную функцию Грина:

$$\begin{aligned} E(\mu, T) = \langle \hat{H} \rangle = & \mp \frac{1}{2m} \int \Delta_{\mathbf{r}_1} \mathbb{G}_{\alpha\alpha}(1, 2) \Big|_{\substack{\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \\ \tau_2 = \tau_1 + 0}} d\mathbf{r}_1 - \\ & - \frac{1}{2} \int \int U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \mathbb{G}_{\alpha\beta; \beta\alpha}^{\Pi}(1, 2; 3, 4) \Big|_{\substack{\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 \\ \tau_3 = \tau_4 + 0, \tau_4 = \tau_1 + 0 \\ \tau_1 = \tau_2 + 0}} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \end{aligned}$$

В дальнейшем будет приведен еще ряд формул, связывающих температурные гриновские функции с термодинамическими величинами.

Круг вопросов, который можно разрешить с помощью температурных гриновских функций, не ограничивается только термодинамикой. Функции Грина определяют различные корреляционные свойства системы, проявляющиеся, в частности, во взаимодействии конденсированных тел с нейтронами, рентгеновскими лучами и т. д. Например, двухчастичная гриновская функция связана очевидным соотношением с функцией корреляции плотности

$$F(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \overline{n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2)} \equiv \langle \psi_\alpha^+(\mathbf{r}_1)\psi_\alpha(\mathbf{r}_1)\psi_\beta^+(\mathbf{r}_2)\psi_\beta(\mathbf{r}_2) \rangle,$$

определяющей упругое рассеяние рентгеновских лучей и нейтронов. Более того, в дальнейшем мы установим связь между температурными гриновскими функциями и соответствующими временными величинами, что позволит изучать различные кинетические явления.

Отметим теперь одно важное свойство температурной гриновской функции  $\mathfrak{G}$ . Как уже упоминалось, она есть функция разности «зремен»  $\tau_1 - \tau_2 = \tau$  и, как таковая, задана в интервале от  $-1/T$  до  $1/T$ . Произведем в выражении (11.1) для  $\mathfrak{G}(\tau < 0)$  циклическую перестановку операторов под знаком следа<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\tau < 0) &= \pm \text{Sp} \left\{ e^{\frac{\Omega}{T}} e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})\tau} \psi(\mathbf{r}_1) e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau + 1/T)} \psi^+(\mathbf{r}_2) \right\} = \\ &= \pm \text{Sp} \left\{ e^{\frac{\Omega + \mu \hat{N} - H}{T}} e^{(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau + 1/T)} \psi(\mathbf{r}_1) e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})(\tau + 1/T)} \psi^+(\mathbf{r}_2) \right\}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Сравнивая (11.7) с формулой для  $\mathfrak{G}$  при  $\tau > 0$  и замечая, что  $0 < \tau + 1/T < 1/T$  при  $\tau < 0$ , получаем соотношение

$$\mathfrak{G}(\tau < 0) = \mp \mathfrak{G}\left(\tau + \frac{1}{T}\right), \quad (11.8)$$

<sup>1)</sup> Возможность такой перестановки вытекает непосредственно из определения следа матрицы произведения нескольких операторов:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(ABC \dots DF) &= \sum_{i, k, \dots} A_{ik} B_{kl} C_{lm} \dots D_{np} F_{pi} = \\ &= \sum_{i, k, \dots} B_{kl} C_{lm} \dots D_{np} F_{pi} A_{ik} = \text{Sp}(BC \dots DFA). \end{aligned}$$

связывающее  $\mathfrak{G}$  при отрицательных «временах» с ее значением при  $\tau > 0$ . Разумеется,

$$\mathfrak{D}(\tau < 0) = \mathfrak{D}\left(\tau + \frac{1}{T}\right). \quad (11.8a)$$

Другое полезное соотношение вытекает из очевидной вещественности  $\mathfrak{D}$ -функции фонона (операторы  $\varphi(\mathbf{r})$  вещественны!). Вычислим формально величину  $\mathfrak{D}^*(\tau < 0)$ :

$$\mathfrak{D}(\tau < 0) = \mathfrak{D}^*(\tau < 0) = -\text{Sp} \left\{ e^{2/T} \varphi(\mathbf{r}_1) e^{\hat{H}\tau} \varphi(\mathbf{r}_2) e^{-\hat{H}\tau} e^{-\hat{H}/T} \right\}$$

Сравнивая полученное выражение с  $\mathfrak{D}(\tau > 0)$ , мы приходим к выводу, что температурная гриновская функция фонона является четной функцией  $\tau$ :

$$\mathfrak{D}(\tau) = \mathfrak{D}(-\tau). \quad (11.9)$$

Это утверждение справедливо для гриновской функции любого вещественного поля.

**2. Температурные гриновские функции свободных частиц.** В теории возмущений, опирающейся на диаграммную технику, важную роль играют гриновские функции свободных частиц. При отсутствии взаимодействия статистическое усреднение в (11.1) производится независимо по состояниям каждой отдельной частицы. Уровни энергии системы  $E_n$  (а с ними и термодинамический потенциал  $\Omega$ ) выражаются в виде суммы энергий отдельных частиц в состояниях с заданными импульсом  $\mathbf{p}$  и проекцией спина  $\alpha$ :

$$E_n^{(0)} = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} n_{\mathbf{p}\alpha} \varepsilon_0(\mathbf{p}), \quad \Omega_0 = \sum_{\mathbf{p}, \alpha} \Omega_{\mathbf{p}\alpha}^{(0)}.$$

В силу принципа Паули числа заполнения состояний в случае статистики Ферми могут принимать только значения 0 и 1.

Для вычисления гриновской функции свободных частиц удобнее всего воспользоваться определением (11.1). Подставим в него разложение шредингеровских операторов  $\psi$  в ряд Фурье

$$\psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_1\alpha} e^{i\mathbf{p}_1\mathbf{r}_1}, \quad \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_2\beta}^{\dagger} e^{-i\mathbf{p}_2\mathbf{r}_2}.$$

Имеем:

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\tau > 0) = -\frac{1}{V} \sum_{p_1 p_2} e^{i(p_1 r_1 - p_2 r_2)} \times \\ \times \text{Sp} \left\{ e^{\frac{\mathfrak{E}_0 + \mu \hat{N} - \hat{H}_0}{T}} e^{\tau(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} a_{p_1 \alpha} e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} a_{p_2 \beta}^+ \right\}.$$

Учитывая, далее, что гамильтониан  $\hat{H}$  имеет в импульсном представлении вид

$$\hat{H}_0 = \sum_{p\alpha} \hat{n}_{p\alpha} \varepsilon_0(p), \quad \hat{N} = \sum_{p\alpha} \hat{n}_{p\alpha},$$

легко убедиться в справедливости тождества

$$e^{\tau(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} a_{p\alpha} e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} = a_{p\alpha} e^{-\tau(\varepsilon_0(p) - \mu)}, \\ e^{\tau(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} a_{p\alpha}^+ e^{-\tau(\hat{H}_0 - \mu \hat{N})} = a_{p\alpha}^+ e^{\tau(\varepsilon_0(p) - \mu)}, \quad (11.10)$$

для чего достаточно вычислить единственный отличный от нуля матричный элемент в правой и левой частях. Таким образом,

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\tau > 0) = -\frac{1}{V} \sum_{p_1 p_2} e^{i(p_1 r_1 - p_2 r_2) - \tau(\varepsilon_0(p_1) - \mu)} \text{Sp} \times \\ \times \left\{ e^{\frac{\mathfrak{E}_0 + \mu \hat{N} - \hat{H}_0}{T}} a_{p_1 \alpha} a_{p_2 \beta}^+ \right\}.$$

Произведение  $a_{p_1 \alpha} a_{p_2 \beta}^+$  имеет отличные от нуля диагональные матричные элементы только при  $p_1 = p_2$ ,  $\alpha = \beta$  и, следовательно,

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(r_1 - r_2, \tau > 0) = -\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{V} \sum_p e^{ip(r_1 - r_2) - \tau(\varepsilon_0(p) - \mu)} \langle a_{p\alpha} a_{p\alpha}^+ \rangle.$$

Величина  $\langle a_{p\alpha} a_{p\alpha}^+ \rangle$  выражается через равновесные числа заполнения  $n(p)$ , зависящие от температуры и химического потенциала. Для частиц, подчиняющихся статистике Ферми,

$$\langle a_{p\alpha} a_{p\alpha}^+ \rangle = 1 - n(p), \quad n(p) = \left[ e^{\frac{\varepsilon_0(p) - \mu}{T}} + 1 \right]^{-1}; \quad (11.11)$$

для бозе-частиц

$$\langle a_{p\alpha} a_{p\alpha}^+ \rangle = 1 + n(p), \quad n(p) = \left[ e^{\frac{\varepsilon_0(p) - \mu}{T}} - 1 \right]^{-1}, \quad (11.12)$$

Устремим теперь объем системы  $V$  к бесконечности, переходя обычным образом от суммирования по импульсам к интегрированию. Получим окончательно:

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau > 0) = -\delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - \tau(\epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)} (1 \mp n(\mathbf{p})), \quad (11.13a)$$

где верхний знак соответствует ферми-частицам, нижний — бозе-частицам.  $\mathfrak{G}^{(0)}$  при  $\tau < 0$  проще всего вычислить, воспользовавшись соотношением (11.8):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau < 0) &= \mp \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}\left(\mathbf{r}, \tau + \frac{1}{T}\right) = \\ &= \pm \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - \tau(\epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)} n(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (11.13b)$$

Гриновская функция свободных фононов вычисляется аналогичным образом. Подставляя в (11.2) фурье-разложение оператора  $\varphi(\mathbf{r})$ :

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\omega_0(\mathbf{k})}{2}} (b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + b_{\mathbf{k}}^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}),$$

где  $\omega_0(\mathbf{k})$  — энергия фонона, находим после соответствующих выкладок:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^{(0)}(\mathbf{r}, \tau) &= -\frac{1}{2(2\pi)^3} \int d\mathbf{k} \omega_0(\mathbf{k}) \{ (N(\mathbf{k}) + 1) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_0(\mathbf{k})|\tau|} + \\ &\quad + N(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega_0(\mathbf{k})|\tau|} \}, \quad (11.14) \\ N(\mathbf{k}) &= \left[ e^{\frac{\omega_0(\mathbf{k})}{T}} - 1 \right]^{-1}. \end{aligned}$$

В соответствии с (11.9)  $\mathfrak{D}^{(0)}$  есть четная функция  $\tau$ .

## § 12. Теория возмущений

**1. Представление взаимодействия.** Если частицы, образующие систему, не свободны, то в выражении для температурной гриновской функции (11.1) можно перейти к своеобразному представлению взаимодействия, похожему на представление взаимодействия квантовой теории поля (Мацубара [29]). Введем для этого матрицу  $\mathfrak{S}(\tau)$  ( $0 \leq \tau \leq 1/T$ ),

являющуюся аналогом  $S$ -матрицы теории поля, определив ее соотношением

$$\begin{aligned} e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} &= e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau), \\ e^{\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} &= \mathfrak{S}^{-1}(\tau)e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}. \end{aligned} \quad (12.1)$$

Введем, далее, операторы полей частиц в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \tau) &= e^{\tau(\hat{H}_1-\mu\hat{N})}\psi(\mathbf{r})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}, \\ \bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau) &= e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\psi^+(\mathbf{r})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

совпадающие при  $\hat{H}=\hat{H}_0$  с упоминавшимися в § 11 гайзенберговскими операторами.

По аналогии с (12.2) определяются и другие операторы в представлении взаимодействия. В частности,

$$\begin{aligned} \hat{H}(\tau) &= e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{H}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}, \\ \hat{H}_{int}(\tau) &= e^{\tau(\hat{H}_1-\mu\hat{N})}\hat{H}_{int}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}. \end{aligned}$$

Из этого определения следует, что операторы  $\hat{H}(\tau)$ ,  $\hat{H}_{int}(\tau)$  получаются из  $\hat{H}$ ,  $\hat{H}_{int}$ , если в последних заменить  $\psi(\mathbf{r})$ ,  $\psi^+(\mathbf{r})$ , соответственно, на  $\psi(\mathbf{r}, \tau)$ ,  $\bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau)$ .

Заметим, кроме того, что  $\hat{H}_0(\tau)$ ,  $\hat{N}(\tau)$  фактически не зависят от  $\tau$  (гамильтониан свободных частиц коммутирует с оператором  $\hat{N}$ ):

$$\begin{aligned} \hat{H}_0(\tau) &= e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{H}_0e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})} = \hat{H}_0, \\ \hat{N}(\tau) &= e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\hat{N}e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})} = \hat{N}. \end{aligned}$$

Матрица  $\mathfrak{S}(\tau)$  удовлетворяет простому уравнению, отличающемуся от соответствующего уравнения для  $S$ -матрицы (6.17) заменой  $t \rightarrow -i\tau$ . Мы, однако, выведем это уравнение заново, для чего продифференцируем по  $\tau$  первое из равенств (12.1):

$$\begin{aligned} -(\hat{H}-\mu\hat{N})e^{-\tau(\hat{H}-\mu\hat{N})} &= \\ &= e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\frac{\partial \mathfrak{S}(\tau)}{\partial \tau}e^{\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})} - (\hat{H}_0-\mu\hat{N})e^{-\tau(\hat{H}_0-\mu\hat{N})}\mathfrak{S}(\tau). \end{aligned}$$

Умножая обе части уравнения на  $e^{\tau(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})}$ , имеем:

$$\frac{\partial \mathfrak{S}(\tau)}{\partial \tau} = -\hat{H}_{int}(\tau) \mathfrak{S}(\tau). \quad (12.3)$$

Решение уравнения (12.3), удовлетворяющее условию  $\mathfrak{S}(0)=1$ , которое следует из определения  $\mathfrak{S}$ , имеет вид

$$\mathfrak{S}(\tau) = T_{\tau} \exp \left\{ - \int_0^{\tau} \hat{H}_{int}(\tau') d\tau' \right\}. \quad (12.4)$$

Символ  $T_{\tau}$  в (12.4) означает, как уже упоминалось, что все операторы должны быть расположены слева направо в порядке убывания  $\tau$ . В справедливости (12.4) легко убедиться непосредственным дифференцированием с учетом только что отмеченной операции  $T_{\tau}$ .

Наряду с  $\mathfrak{S}(\tau)$  рассмотрим еще матрицу  $\mathfrak{S}(\tau_1, \tau_2)$  ( $\tau_1 > \tau_2$ ):

$$\mathfrak{S}(\tau_1, \tau_2) = T_{\tau} \exp \left\{ - \int_{\tau_2}^{\tau_1} \hat{H}_{int}(\tau') d\tau' \right\},$$

$$\mathfrak{S}(\tau) = \mathfrak{S}(\tau, 0).$$

$\mathfrak{S}(\tau_1, \tau_2)$  обладает рядом очевидных свойств:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\tau_1, \tau_3) &= \mathfrak{S}(\tau_1, \tau_2) \mathfrak{S}(\tau_2, \tau_3) & (\tau_1 > \tau_2 > \tau_3), \\ \mathfrak{S}(\tau_1, \tau_2) &= \mathfrak{S}(\tau_1) \mathfrak{S}^{-1}(\tau_2) & (\tau_1 > \tau_2). \end{aligned} \quad (12.5)$$

Перейдем теперь к представлению взаимодействия в формуле (11.1) для гриновской функции; выразив все экспоненты, содержащие  $\hat{H}$ , через  $H_0$  и  $\mathfrak{S}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\tau > 0) &= -e^{\frac{\Omega}{T}} \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu\hat{N}}{T}} \mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}\right) \mathfrak{S}^{-1}(\tau_1) e^{(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\tau_1} \psi(r_1) \times \right. \\ &\times e^{-(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\tau_1} \mathfrak{S}(\tau_1) \mathfrak{S}^{-1}(\tau_2) e^{(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\tau_2} \psi^+(r_2) e^{-(\hat{H}_0 - \mu\hat{N})\tau_2} \mathfrak{S}(\tau_2) \left. \right\}, \end{aligned}$$

или, учитывая (12.1), (12.5),

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\tau > 0) &= -e^{\frac{\Omega}{T}} \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu\hat{N}}{T}} \mathfrak{S}\left(\frac{1}{T}, \tau_1\right) \times \right. \\ &\times \psi(r_1, \tau_1) \mathfrak{S}(\tau_1, \tau_2) \bar{\psi}(r_2, \tau_2) \mathfrak{S}(\tau_2) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (12.6a)$$



Подобным же образом запишется  $\mathfrak{G}$  при  $\tau < 0$ :

$$\mathfrak{G}(\tau < 0) = \pm e^{\frac{\mathfrak{Q}}{T}} \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} \mathfrak{S} \left( \frac{1}{T}, \tau_2 \right) \times \right. \\ \left. \times \bar{\psi}(r_2, \tau_2) \mathfrak{S}(\tau_2, \tau_1) \psi(r_1, \tau_1) \mathfrak{S}(\tau_1) \right\}. \quad (12.66)$$

Выражения (12.6a) и (12.6б) могут быть объединены в одну формулу

$$\mathfrak{G}(\tau) = -e^{\frac{\mathfrak{Q}}{T}} \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} T_\tau \left( \psi(r_1, \tau_1) \bar{\psi}(r_2, \tau_2) \mathfrak{S} \left( \frac{1}{T} \right) \right) \right\}, \quad (12.6в)$$

вытекающую непосредственно из определения операции  $T_\tau$ -упорядочения и (12.5).

Теперь нам осталось преобразовать величину  $e^{\mathfrak{Q}/T}$ . Для этого заметим, что по определению

$$e^{-\frac{\mathfrak{Q}}{T}} = \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} \right\},$$

откуда сразу следует:

$$e^{-\frac{\mathfrak{Q}}{T}} = \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} \mathfrak{S} \left( \frac{1}{T} \right) \right\}.$$

Окончательно выражение для  $\mathfrak{G}$  в представлении взаимодействия запишется в виде

$$\mathfrak{G}(r_1, \tau_1; r_2, \tau_2) = - \frac{\text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} T_\tau \left( \psi(r_1, \tau_1) \bar{\psi}(r_2, \tau_2) \mathfrak{S} \left( \frac{1}{T} \right) \right) \right\}}{\text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} \mathfrak{S} \left( \frac{1}{T} \right) \right\}},$$

или, если мы введем символ гиббсовского усреднения по состоянию системы невзаимодействующих частиц,

$$\mathfrak{G}(r_1, \tau_1; r_2, \tau_2) = - \frac{\langle T_\tau (\psi(r_1, \tau_1) \bar{\psi}(r_2, \tau_2) \mathfrak{S}) \rangle_0}{\langle \mathfrak{S} \rangle_0}, \quad (12.7)$$

$$\langle \dots \rangle_0 = \text{Sp} \left\{ e^{\frac{\mathfrak{Q}_0 + \mu \hat{N} - \hat{H}_0}{T}} \dots \right\}, \quad \mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S} \left( \frac{1}{T} \right). \quad (12.8)$$

Повторяя буквально только что проделанные выкладки, можно получить выражения для гриновской функции фонона

и многочастичных гриновских функций в представлении взаимодействия. Гриновская функция фонона получится в виде

$$\mathfrak{D}(1, 2) = - \frac{\langle T_{\tau}(\varphi(1)\varphi(2)\mathfrak{S}) \rangle_0}{\langle \mathfrak{S} \rangle_0}, \quad (12.9)$$

а двухчастичная гриновская функция

$$\mathfrak{G}^{\Pi}(1, 2; 3, 4) = - \frac{\langle T_{\tau}(\psi(1)\psi(2)\bar{\psi}(3)\bar{\psi}(4)\mathfrak{S}) \rangle_0}{\langle \mathfrak{S} \rangle_0}. \quad (12.10)$$

Формулы для гриновских функций, зависящих от большего числа переменных, отличаются от (12.7), (12.9), (12.10) лишь числом  $\psi$ -операторов под знаком  $T$ -произведения.

В заключение приведем соотношение, связывающее термодинамический потенциал  $\Omega$  с матрицей  $\mathfrak{S}$ :

$$\Omega = \Omega_0 - T \ln \langle \mathfrak{S} \rangle_0. \quad (12.11)$$

Здесь  $\Omega_0$  — потенциал  $\Omega$  в отсутствие взаимодействия:

$$\Omega_0 = - T \ln \text{Sp} \left\{ e^{-\frac{\hat{H}_0 - \mu \hat{N}}{T}} \right\}.$$

**2. Теорема Вика.** Перейдем теперь к нашей основной задаче — вычислению гриновских функций системы взаимодействующих частиц. Если взаимодействие между частицами можно считать слабым, то выражение для температурных гриновских функций в представлении взаимодействия позволяет представить ряд теории возмущений по  $\hat{H}_{int}$  в исключительно компактной форме.

Гамильтониан взаимодействия  $\hat{H}_{int}$  входит в гриновскую функцию только через посредство матрицы  $\mathfrak{S}$ . Разлагая экспоненту в правой части (12.4) в ряд по степеням  $\hat{H}_{int}(\tau)$ , мы получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= 1 - \int_0^{1/T} \hat{H}_{int}(\tau') d\tau' + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{1/T} \int_0^{1/T} d\tau' d\tau'' T_{\tau}(\hat{H}_{int}(\tau') \hat{H}_{int}(\tau'')) - \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/T} \dots \int_0^{1/T} d\tau_1 \dots d\tau_n T_{\tau}(\hat{H}_{int}(\tau_1) \dots \hat{H}_{int}(\tau_n)). \end{aligned} \quad (12.12)$$

Подставляя теперь это разложение в числитель формулы (12.7), найдем ряд теории возмущений для гриновской функции

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2) = \\ = -\frac{1}{\langle \mathfrak{G} \rangle_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/T} \dots \int_0^{1/T} d\tau_{(1)} \dots d\tau_{(n)} \times \\ \times \langle T_{\tau}(\psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \hat{H}_{int}(\tau_{(1)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{(n)})) \rangle_0. \end{aligned} \quad (12.13)$$

первый член которого, естественно, совпадает со свободной гриновской функцией  $\mathfrak{G}^{(0)} = -\langle T_{\tau}(\psi(1) \bar{\psi}(2)) \rangle_0$ , вычисленной в § 11.

Мы не будем разлагать матрицу  $\mathfrak{S}$  в выражении  $\langle \mathfrak{S} \rangle_0$ , стоящем в знаменателе (12.13), поскольку оно, сократится с таким же множителем в числителе. К тому же  $\langle \mathfrak{S} \rangle_0$  есть постоянная величина, не зависящая от  $\mathbf{r}$ ,  $\tau$ , и не может никак повлиять на дальнейшие рассуждения.

Во всех реальных задачах  $H_{int}(\tau)$  представляет собой произведение некоторого (обычно небольшого) числа операторов  $\psi(\mathbf{r}, \tau)$ ,  $\bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau)$  (и, может быть,  $\varphi(\mathbf{r}, \tau)$ ), проинтегрированное по пространственным переменным. Поэтому задача вычисления гриновской функции по теории возмущений сводится к вычислению среднего значения от  $T$ -произведения некоторого числа операторов  $\psi$ , взятых в различных пространственных и «временных» точках:

$$\langle T_{\tau}(\psi_{\alpha}(\mathbf{r}, \tau) \dots \bar{\psi}_{\alpha'}(\mathbf{r}', \tau') \dots) \rangle_0. \quad (12.14)$$

С подобного рода проблемой мы уже сталкивались в предыдущей главе при вычислении обычных гриновских функций при абсолютном нуле температуры. Там было показано, что среднее от любого числа операторов сводится к сумме произведений всевозможных попарных средних, равных по определению гриновским функциям свободных частиц (теорема Вика). Как мы сейчас увидим, подобная же ситуация имеет место и в нашем случае.

Чтобы убедиться в этом, подставим в (12.14) вместо операторов  $\psi$  их разложения в ряд Фурье по координатам <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p a_p(\tau) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - \tau(\epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)}, \\ \bar{\psi}(\mathbf{r}, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_p a_p^+(\tau) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r} + \tau(\epsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)}.\end{aligned}\quad (12.15)$$

Операторы  $a_p(\tau)$  и  $a_p^+(\tau)$  в (12.15) представляют собой обычные операторы уничтожения и рождения и в действительности от  $\tau$  не зависят. Мы, однако, сохраним букву  $\tau$  для обозначения места, которое должен занимать тот или иной оператор при  $T$ -упорядочении.

После подстановки разложений (12.15) выражение (12.14), если отвлечься от экспонент (12.15), примет вид

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p_1} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p_2} \cdots \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p'_1} \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{p'_2} \cdots \\ & \cdots \langle T_\tau (a_{p_1}(\tau_1) a_{p_2}(\tau_2) \cdots a_{p'_1}^+(\tau'_1) a_{p'_2}^+(\tau'_2) \cdots) \rangle_0.\end{aligned}\quad (12.16)$$

В сумме по  $p_1, \dots, p'_1, \dots$  отличны от нуля лишь те члены, в которых содержится равное число операторов рождения и уничтожения, относящихся к одному и тому же импульсу. В частности, отличны от нуля члены, содержащие только по одному оператору рождения и уничтожения с одинаковым импульсом; так, отличен от нуля член

$$\frac{1}{V} \sum_{\substack{p_1 \\ p_1 \neq p_2 \neq \dots}} \frac{1}{V} \sum_{p_2} \cdots \langle T_\tau (a_{p_1}(\tau_1) a_{p_2}(\tau_2) \cdots a_{p_1}^+(\tau'_1) a_{p_2}^+(\tau'_2) \cdots) \rangle_0 \quad (12.17a)$$

и другие члены, отличающиеся от (12.17a) перестановкой импульсов  $p_1, p_2, \dots$  у операторов  $a^+$ .

Когда имеется несколько операторов рождения с одинаковым импульсом, например два, соответствующие отличные

<sup>1)</sup> В справедливости (12.15) проще всего убедиться, воспользовавшись определением операторов в представлении взаимодействия и тождествами (11.10).

от нуля члены в сумме имеют вид

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{1}{V} \sum_{\substack{p_1 \\ p_1 \neq p_2 \neq \dots}} \frac{1}{V} \sum_{p_2} \dots \langle T_{\tau} (a_{p_1}(\tau_1) a_{p_1}(\tau_2) a_{p_2}(\tau_3) \dots \dots a_{p_1}^+(\tau'_1) a_{p_1}^+(\tau'_2) a_{p_2}^+(\tau'_3) \dots) \rangle_0. \quad (12.176)$$

Выражения (12.17а) имеют одну особенность, отличающую их от всех остальных. Именно в (12.17а) число множителей  $1/V$  совпадает с числом суммирований, в то время как во всех других первое число всегда больше. Представим теперь, что мы уже произвели усреднение  $\langle \dots \rangle_0$  и будем стремиться объем нашей системы  $V$  к бесконечности, сохраняя, однако, постоянной плотность числа частиц  $N/V$ . (При этом суммы

заменяются на интегралы по правилу  $V^{-1} \sum \dots \rightarrow (2\pi)^{-3} \int \dots$ )

Сумма (12.17а) в пределе  $V \rightarrow \infty$  останется конечной, выражаясь через интегралы по импульсам от различных комбинаций фермиевских или бозевских функций. (С простейшим примером такого рода мы уже имели дело в § 11 при вычислении свободной гриновской функции  $\mathcal{G}^{(0)} = - \langle T_{\tau} (\psi(1) \bar{\psi}(2)) \rangle_0$ .) Напротив, в выражениях вида (12.176), помимо указанных интегралов по импульсам, останется некоторое число лишних множителей  $1/V$ , что приведет при  $V \rightarrow \infty$  к исчезновению этих выражений.

Таким образом, из всех членов суммы в (12.16) в пределе  $V \rightarrow \infty$  останутся лишь члены вида (12.17а), в которых все операторы рождения (и уничтожения) имеют разные импульсы. Это означает, что фактически при вычислении  $\langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p_2}(\tau_2) \dots a_{p_1}^+(\tau'_1) a_{p_2}^+(\tau'_2) \dots \} \rangle_0$  мы можем усреднять каждую пару операторов  $a_p, a_p^+$  независимо. Среднее значение от  $T$ -произведения большого числа операторов выразится при этом в виде суммы всевозможных попарных средних. Например,

$$\begin{aligned} \langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p_2}(\tau_2) a_{p_1}^+(\tau'_1) a_{p_2}^+(\tau'_2) \} \rangle_0 &\rightarrow \\ &\rightarrow \langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p_2}^+(\tau'_2) \} \rangle_0 \langle T_{\tau} \{ a_{p_2}(\tau_2) a_{p_1}^+(\tau'_1) \} \rangle_0 \mp \\ &\mp \langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p_1}^+(\tau'_1) \} \rangle_0 \langle T_{\tau} \{ a_{p_2}(\tau_2) a_{p_2}^+(\tau'_2) \} \rangle_0 \end{aligned} \quad (12.18а)$$

(знак «минус» для статистики Ферми, «плюс» для статистики Бозе).

В координатном представлении эти результаты означают, что среднее от  $T$ -произведения некоторого числа  $\psi$ -операторов распадается на сумму произведений всевозможных попарных средних операторов  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ . В частности, вместо (12.18a) имеем:

$$\begin{aligned}
 & \langle T_{\tau} \{ \psi(r_1, \tau_1) \psi(r_2, \tau_2) \bar{\psi}(r'_1, \tau'_1) \bar{\psi}(r'_2, \tau'_2) \} \rangle_0 = \\
 &= \frac{1}{V^2} \sum_{p'_1, p'_2, p_1, p_2} e^{i(p_1 r_1 + p_2 r_2 - p'_1 r'_1 - p'_2 r'_2)} e^{-\tau_1(\epsilon_0(p_1) - \mu) - \tau_2(\epsilon_0(p_2) - \mu)} \times \\
 & \times e^{\tau'_1(\epsilon_0(p'_1) - \mu) + \tau'_2(\epsilon_0(p'_2) - \mu)} \langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p_2}(\tau_2) a_{p'_1}^+(\tau'_1) a_{p'_2}^+(\tau'_2) \} \rangle_0 = \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{p_1, p'_2} e^{i(p_1 r_1 - p'_2 r'_2) - \tau_1(\epsilon_0(p_1) - \mu) + \tau'_2(\epsilon_0(p'_2) - \mu)} \times \\
 & \times \langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p'_2}^+(\tau'_2) \} \rangle_0 \times \\
 & \times \frac{1}{V} \sum_{p_2, p'_1} e^{i(p_2 r_2 - p'_1 r'_1) - \tau_2(\epsilon_0(p_2) - \mu) + \tau'_1(\epsilon_0(p'_1) - \mu)} \times \\
 & \times \langle T_{\tau} \{ a_{p_2}(\tau_2) a_{p'_1}^+(\tau'_1) \} \rangle_0 \mp \\
 & \mp \frac{1}{V} \sum_{p_1, p'_1} e^{i(p_1 r_1 - p'_1 r'_1) - \tau_1(\epsilon_0(p_1) - \mu) + \tau'_1(\epsilon_0(p'_1) - \mu)} \times \\
 & \times \langle T_{\tau} \{ a_{p_1}(\tau_1) a_{p'_1}^+(\tau'_1) \} \rangle_0 \times \\
 & \times \frac{1}{V} \sum_{p_2, p'_2} e^{i(p_2 r_2 - p'_2 r'_2) - \tau_2(\epsilon_0(p_2) - \mu) + \tau'_2(\epsilon_0(p'_2) - \mu)} \times \\
 & \times \langle T_{\tau} \{ a_{p_2}(\tau_2) a_{p'_2}^+(\tau'_2) \} \rangle_0 = \\
 &= \langle T_{\tau} \{ \psi(r_1, \tau_1) \bar{\psi}(r'_2, \tau'_2) \} \rangle_0 \langle T_{\tau} \{ \psi(r_2, \tau_2) \bar{\psi}(r'_1, \tau'_1) \} \rangle_0 \mp \\
 & \mp \langle T_{\tau} \{ \psi(r_1, \tau_1) \bar{\psi}(r'_1, \tau'_1) \} \rangle_0 \langle T_{\tau} \{ \psi(r_2, \tau_2) \bar{\psi}(r'_2, \tau'_2) \} \rangle_0. \quad (12.186)
 \end{aligned}$$

Аналогичные соотношения имеют место и для большего числа операторов.

Стоящие в правой части (12.186) средние величины с точностью до знака совпадают с температурными гриновскими функциями свободных частиц. Таким образом, при вычисле-

нии температурных гриновских функций мы сталкиваемся с той же ситуацией, которая имела место в случае абсолютного нуля температуры. Как и там, для гриновской функции  $\mathfrak{G}$  справедливо разложение (12.13), по форме совпадающее (если отвлечься от множителя  $i^n$  и пределов интегрирования по  $\tau$ ) с разложением (8.9) для функции  $G$ . Для вычисления входящих в (12.13) средних значений  $\langle T_\tau(\dots) \rangle_0$ , как и раньше, можно воспользоваться теоремой Вика, согласно которой эти средние выражаются через средние от пар операторов рождения и уничтожения.

Заметим, что в излагаемой технике понятие нормального произведения отсутствует. Теорема Вика имеет место не для самих  $T$ -произведений, а только для средних значений.

Расписывая любой член ряда (12.13) по теореме Вика и заменяя  $\langle T_\tau(\psi_1 \bar{\psi}) \rangle_0$  на свободную гриновскую функцию

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(r_1 - r_2, \tau_1 - \tau_2) = - \langle T_\tau \{ \psi_\alpha(r_1, \tau_1) \bar{\psi}_\beta(r_2, \tau_2) \} \rangle_0,$$

мы приходим к выражениям, полностью совпадающим со структурой соответствующих рядов при  $T=0$ . Это позволяет применить для описания различных приближений ряда теории возмущений те же самые диаграммы Файнмана, которыми мы пользовались в предыдущей главе. При этом изменяются лишь правила, по которым каждому элементу диаграммы сопоставлялись определенные выражения. В нашем случае каждой линии диаграммы следует сопоставить вместо функции  $G^{(0)}$  температурную гриновскую функцию свободной частицы  $\mathfrak{G}^{(0)}$ , а интегрирование по времени от  $-\infty$  до  $\infty$  в каждом узле диаграммы заменить на интегрирование по мнимому «времени»  $\tau$  в пределах от 0 до  $1/T$ .

До сих пор мы молчаливо предполагали, что при стремлении объема системы к бесконечности (при заданной плотности) все гриновские функции свободных частиц и интегралы от них остаются конечными. На этом основании, мы, в частности, отбросили в пределе  $V \rightarrow \infty$  члены вида (12.176), что позволило нам сформулировать теорему Вика. Положение существенно изменится в случае системы бозе-частиц при температурах ниже температуры конденсации  $T_c$  и в ферми-системах, обладающих свойствами сверхпроводимости.

В случае бозе-газа при  $T < T_c$  операторы рождения и уничтожения частиц в состоянии с равным нулю импульсом

оказываются пропорциональными корню из объема:

$$a_0 \sim a_0^+ \sim \sqrt{N} \sim \sqrt{V},$$

так, что при  $V \rightarrow \infty$  члены типа (12.176) останутся конечными. Аналогичная ситуация возникает и для сверхпроводников. В обоих случаях приходится пользоваться специальной техникой, описанию которой посвящены отдельные главы.

Вернемся теперь к случаю, когда пригодна обычная диаграммная техника. Подобно тому, как это было в предыдущей главе, диаграммы для гриновских функций имеют две внешние линии; одна из внешних линий начинается в точке  $r_1, \tau_1$ , соответствующей координатам оператора  $\psi_\alpha(r_1, \tau_1)$ , а другая внешняя линия оканчивается в точке  $r_2, \tau_2$ , соответствующей координатам оператора  $\bar{\psi}_\beta(r_2, \tau_2)$ . Так же как и раньше, диаграммы для функции  $\mathcal{G}$  могут быть разделены на два класса — связанных и несвязанных диаграмм. С помощью совершенно аналогичных рассуждений можно убедиться, что учет несвязанных диаграмм приводит к сокращению знаменателя в формуле (12.7). В результате для  $\mathcal{G}$ -функции имеем:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}(r_1, \tau_1; r_2, \tau_2) = - \langle T_\tau \{ \psi_\alpha(r_1, \tau_1) \bar{\psi}_\beta(r_2, \tau_2) \mathcal{S} \} \rangle_c, \quad (12.19)$$

где  $\langle \dots \rangle_c$  означает учет всех связанных диаграмм.

Поскольку при выводе нигде не используется тот факт, что число внешних линий на диаграмме равно двум, то же самое будет иметь место и для многочастичных гриновских функций. В соответствующих формулах (типа (12.10)) можно опустить  $\langle \mathcal{S} \rangle$  в знаменателе и при вычислении средних учитывать вклад только связанных диаграмм.

Так же как и в предыдущей главе, каждая диаграмма входит в ряд для  $\mathcal{G}$  с коэффициентом типа  $a^n$ , не зависящим существенно от порядка диаграммы. Это обстоятельство является очень важным при суммировании бесконечных последовательностей диаграмм.

### § 13. Диаграммная техника в координатном пространстве. Примеры

Основным результатом предыдущего параграфа было установление того факта, что при вычислении температурных гриновских функций  $\mathcal{G}$  можно пользоваться обычной диаграммной техникой Файнмана. Главным элементом всякой



диаграммы является линия, изображающая гриновскую функцию свободной частицы или фонона. Как и в предыдущей главе, гриновскую функцию частицы мы будем изображать сплошной линией (рис. 32); стрелка на линии указывает ее направление: линия «выходит» из точки с координатами  $r_1, \tau_1$  и проекцией спина  $\alpha_1$  (этой точке соответствует в определении  $\mathcal{G}$ -функции оператор  $\psi$ ) и «входит» в точку  $r_2, \tau_2, \alpha_2$  (ей соответствует оператор  $\bar{\psi}$ ). Координаты точки «выхода»

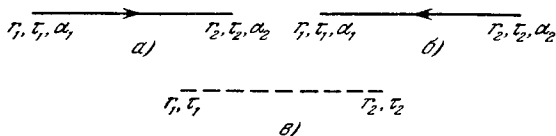


Рис. 32.

пишутся в аргументе гриновской функции слева, координаты «входа» — справа. Так, линия на рис. 32, а изображает гриновскую функцию

$$\mathcal{G}_{\alpha_1\alpha_2}^{(0)}(r_1, \tau_1; r_2, \tau_2) \equiv \mathcal{G}_{\alpha_1\alpha_2}^{(0)}(r_1 - r_2, \tau_1 - \tau_2),$$

на рис. 32, б — гриновскую функцию

$$\mathcal{G}_{\alpha_2\alpha_1}^{(0)}(r_2, \tau_2; r_1, \tau_1) \equiv \mathcal{G}_{\alpha_2\alpha_1}^{(0)}(r_2 - r_1, \tau_2 - \tau_1).$$

Гриновскую функцию фонона мы будем изображать пунктирной линией (рис. 32, в). Направление на фоновой линии можно не указывать, поскольку, как мы видели в § 11,  $\mathcal{D}^{(0)}$  есть четная функция  $r_1 - r_2$  и  $\tau_1 - \tau_2$ .

По координатам точек пересечения линий — «вершинам» — происходит интегрирование: по всему пространству по  $r$  и в пределах от 0 до  $1/T$  по  $\tau$ . В вершинах происходит также суммирование по спиновым переменным.

Конкретный вид диаграмм зависит от типа взаимодействия между частицами. Для построения диаграмм нужно воспользоваться теоремой Вика, согласно которой среднее от  $T$ -произведений нескольких операторов, входящих в ряд теории возмущения для гриновской функции (12.13), представляется в виде суммы произведений попарных средних. Последние

связаны с гриновскими функциями свободных частиц следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\langle T_{\tau} \{ \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \} \rangle &= - \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2), \\ \langle T_{\tau} \{ \bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \} \rangle &= \pm \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2; \tau_1 - \tau_2)\end{aligned}\quad (13.1)$$

(знак «плюс» для ферми-частиц, знак «минус» — для бозе-частиц).

Среднее от произведения двух фононных операторов выражается через функцию  $\mathfrak{D}^{(0)}$ :

$$\langle T_{\tau} \{ \varphi(\mathbf{r}_1, \tau_1) \varphi(\mathbf{r}_2, \tau_2) \} \rangle = - \mathfrak{D}^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2). \quad (13.2)$$

Рассмотрим различные типы взаимодействия.

А. Двухчастичное взаимодействие. Пусть между частицами системы действуют парные силы, описываемые потенциалом  $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ . Гамильтониан  $\hat{H}_{int}$  в представлении взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{H}_{int}(\tau) &= \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau) \bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau) U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \\ &\quad \times \psi_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau).\end{aligned}\quad (13.3)$$

Вместо потенциала  $U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  удобно ввести зависящий от «времени»  $\tau$  потенциал  $\mathfrak{B}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2)$ , определив его формулой

$$\mathfrak{B}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2) = U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\tau_1 - \tau_2). \quad (13.4)$$

Используя (13.4), выражению (12.4) для матрицы  $\mathfrak{S}$  можно придать симметричную форму:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S} &= T_{\tau} \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\tau_1 d\tau_2 \bar{\psi}_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \psi_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \times \right. \\ &\quad \times \mathfrak{B}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \tau_1 - \tau_2) \psi_{\beta}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \bar{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \left. \right\}.\end{aligned}$$

Вычислим поправку первого порядка по  $U$  к гриновской функции. Имеем<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(1)}(x-y) = \\ = \frac{1}{2} \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 \langle T_{\tau} \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \times \\ \times \psi_{\gamma_2}(z_2) \psi_{\gamma_1}(z_1) \} \rangle. \quad (13.5) \end{aligned}$$

Согласно теореме Вика,  $\langle \dots \rangle$  представляется в виде суммы следующих четырех членов:

$$\langle T_{\tau} \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} \rangle \langle \{ \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \psi_{\gamma_1}(z_1) \} \rangle \langle \{ \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \psi_{\gamma_2}(z_2) \} \rangle, \quad (I)$$

$$\mp \langle T_{\tau} \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} \rangle \langle \{ \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \psi_{\gamma_1}(z_1) \} \rangle \langle \{ \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \psi_{\gamma_2}(z_2) \} \rangle, \quad (II)$$

$$\langle T_{\tau} \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \} \rangle \langle T_{\tau} \{ \psi_{\gamma_1}(z_1) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} \rangle \langle \{ \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \psi_{\gamma_2}(z_2) \} \rangle, \quad (III)$$

$$\mp \langle T_{\tau} \{ \psi_{\alpha}(x) \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \} \rangle \langle \{ \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \psi_{\gamma_1}(z_1) \} \rangle \langle T_{\tau} \{ \psi_{\gamma_2}(z_2) \bar{\psi}_{\beta}(y) \} \rangle \quad (IV)$$

и еще четырех членов, получающихся из (I) — (IV) заменой  $z_1 \rightarrow z_2$ ,  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ . Вклад этих последних в интеграл (13.5), очевидно, совпадает с вкладом от (I) — (IV), что приведет просто к исчезновению  $1/2$  перед интегралом.

Заменяя  $\langle T_{\tau} \{ \dots \} \rangle$  на гриновские функции  $\mathfrak{G}^{(0)}$  по формулам (13.1), получим, что поправка первого порядка складывается из следующих четырех выражений:

$$- \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x-y) \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 \mathfrak{G}_{\gamma_1\gamma_1}^{(0)}(0) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) \mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_2}^{(0)}(0), \quad (I)$$

$$\pm \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x-y) \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 \mathfrak{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_1}^{(0)}(z_2 - z_1) \mathfrak{B}(z_1 - z_2), \quad (II)$$

$$\pm \int \int \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathfrak{G}_{\gamma_1\beta}^{(0)}(z_1 - y) \mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_2}^{(0)}(0) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) d^4 z_1 d^4 z_2, \quad (III)$$

$$- \int \int \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathfrak{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathfrak{G}_{\gamma_2\beta}^{(0)}(z_2 - y) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) d^4 z_1 d^4 z_2. \quad (IV)$$

Отметим, что величина  $\mathfrak{G}^{(0)}(r_1 - r_2; 0)$  всегда берется при  $\tau \rightarrow -0$ .

<sup>1)</sup> В дальнейшем в этом параграфе светлыми латинскими буквами мы будем обозначать совокупность четырех переменных  $x = (r, \tau)$ . Так,  $\mathfrak{G}(x-y) = \mathfrak{G}(x-y, \tau_1 - \tau_2)$ ,  $d^4 x = dr d\tau$ .

Будем изображать на диаграмме функцию  $\mathfrak{B}(z_1 - z_2)$  волнистой линией. Тогда выражениям (I) — (IV) можно сопоставить диаграммы рис. 33. Диаграммы I, II относятся к упоминавшимся в предыдущем параграфе несвязанным диаграммам. Как там было указано, при вычислении гриновских функций их вклад учитывать не следует.

Вклад в поправку первого порядка дают, таким образом, только диаграммы III, VI и диаграммы, отличающиеся от них перестановкой координат вершин  $z_1, z_2$ . Напомним еще раз, что такие диаграммы называются топологически эквивалентными; все топологически эквивалентные диаграммы дают одинаковый вклад.

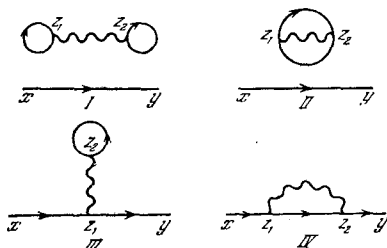


Рис. 33.

Следует обратить внимание на то, что выражения, соответствующие диаграммам III и IV, имеют в случае фермиевской статистики противоположные знаки. Это обстоятельство связано с наличием на диаграмме III замкнутой петли. Рассматривая диаграмму произвольного порядка, можно показать, что любая замкнутая фермионная петля (не обязательно образованная из одной линии, как в нашем случае) входит в соответствующее выражение со знаком «минус».

Сформулируем теперь правила, по которым производится вычисления поправки произвольного порядка.

1) Прежде всего, следует изобразить все связанные топологически неэквивалентные диаграммы с  $2n$  вершинами и двумя внешними концами, причем в каждой вершине сходятся две сплошные и одна волнистая линия.

2) Каждой сплошной линии диаграммы сопоставляется гриновская функция частицы  $G_{\alpha\beta}^{(0)}(x - y)$  ( $x, \alpha$  — координаты начала,  $y, \beta$  — координаты конца линии).

3) Каждой волнистой линии сопоставляется обобщенный потенциал  $\mathfrak{B}(x - y)$ .

4) Производится интегрирование по координатам каждой вершины  $z$  ( $d^4z \equiv dz d\tau$ ) и суммирование по спиновой переменной  $\alpha$ .

5) Полученное выражение умножается на  $(-1)^{n+F}$ , где  $n$  — порядок диаграммы, а  $F$  — число замкнутых фермионных петель в ней.

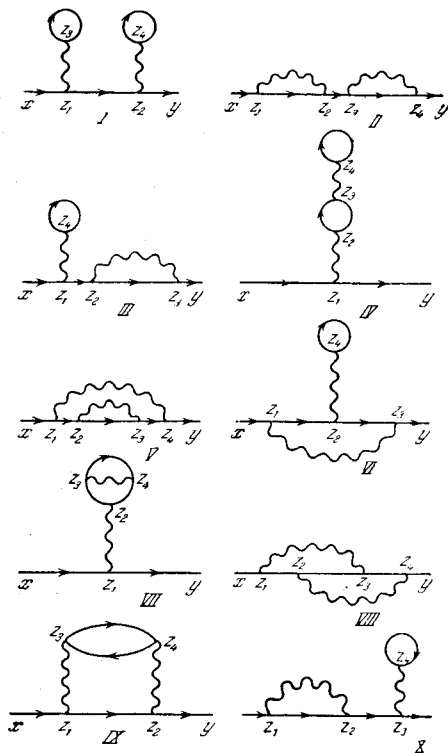


Рис. 34.

6) Если в выражении возникают гриновские функции от совпадающих временных аргументов  $\mathbb{G}^{(0)}(0)$ , их следует понимать как  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \mathbb{G}^{(0)}(r_1 - r_2, -\tau)$ .

Рассмотрим поправку второго порядка. Все возможные топологически неэквивалентные диаграммы с четырьмя вершинами изображены на рис. 34. Пользуясь правилами 1) — 6), легко записать соответствующие этим диаграммам

выражения:

$$\int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\beta}^{(0)}(z_2 - y) \times \\ \times \mathfrak{B}(z_1 - z_3) \mathfrak{B}(z_2 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_3}^{(0)}(0) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0), \quad (I)$$

$$\int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_3 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_4\beta}^{(0)}(z_4 - y) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) \mathfrak{B}(z_3 - z_4), \quad (II)$$

$$\mp \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\beta}^{(0)}(z_3 - y) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) \mathfrak{B}(z_1 - z_4) \mathfrak{B}(z_2 - z_3), \quad (III)$$

$$\int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\beta}^{(0)}(z_1 - y) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_2}^{(0)}(z_3 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) \mathfrak{B}(z_3 - z_4), \quad (IV)$$

$$\int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_3 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_4\beta}^{(0)}(z_4 - y) \mathfrak{B}(z_1 - z_4) \mathfrak{B}(z_2 - z_3), \quad (V)$$

$$\mp \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\beta}^{(0)}(z_3 - y) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) \mathfrak{B}(z_1 - z_3) \mathfrak{B}(z_2 - z_4), \quad (VI)$$

$$\mp \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\beta}^{(0)}(z_1 - y) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_3 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_2}^{(0)}(z_4 - z_2) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) \mathfrak{B}(z_3 - z_4), \quad (VII)$$

$$\int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_3 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_4\beta}^{(0)}(z_4 - y) \mathfrak{B}(z_1 - z_3) \mathfrak{B}(z_2 - z_4), \quad (VIII)$$

$$\mp \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_2\beta}^{(0)}(z_2 - y) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_3 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_3}^{(0)}(z_4 - z_3) \mathfrak{B}(z_1 - z_3) \mathfrak{B}(z_2 - z_4), \quad (IX)$$

$$\mp \int d^4 z_1 d^4 z_2 d^4 z_3 d^4 z_4 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \times \\ \times \mathbb{G}_{\gamma_2\gamma_3}^{(0)}(z_2 - z_3) \mathbb{G}_{\gamma_3\beta}^{(0)}(z_3 - y) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_4}^{(0)}(0) \mathfrak{B}(z_1 - z_2) \mathfrak{B}(z_3 - z_4). \quad (X)$$

Теории возмущений для случая двухчастичного взаимодействия можно придать другую, более симметричную форму, которая оказывается особенно удобной, когда действующие между частицами силы зависят не только от расстояния, но и от спинов. Гамильтониан такого взаимодействия имеет вид

$$\hat{H}_{int}(\tau) = \frac{1}{2} \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \bar{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau) \bar{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau) U_{\alpha\beta; \delta\gamma}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \\ \times \psi_\gamma(\mathbf{r}_2, \tau) \psi_\delta(\mathbf{r}_1, \tau). \quad (13.6)$$

Представим интеграл

$$\int_0^{1/T} H_{int}(\tau) d\tau,$$

входящий в выражение для  $\mathfrak{S}$ , в симметричном по всем переменным виде

$$\frac{1}{4} \int_0^{1/T} \dots \int_0^{1/T} d\tau_1 \dots d\tau_4 \int \dots \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_2 \times \\ \times \bar{\psi}_{\gamma_1}(\mathbf{r}_1, \tau_1) \bar{\psi}_{\gamma_2}(\mathbf{r}_2, \tau_2) \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(\mathbf{r}_1, \tau_1, \mathbf{r}_2, \tau_2; \mathbf{r}_3, \tau_3, \mathbf{r}_4, \tau_4) \times \\ \times \psi_{\gamma_4}(\mathbf{r}_4, \tau_4) \psi_{\gamma_3}(\mathbf{r}_3, \tau_3),$$

или, вводя «четырёхмерные обозначения»,

$$\frac{1}{4} \int d^4z_1 d^4z_2 d^4z_3 d^4z_4 \times \\ \times \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \psi_{\gamma_4}(z_4) \psi_{\gamma_3}(z_3). \quad (13.7)$$

Ввиду того, что операторы  $\bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1)$  и  $\bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2)$  (соответственно,  $\psi_{\gamma_3}(z_3)$  и  $\psi_{\gamma_4}(z_4)$ ) антикоммутируют или коммутируют в зависимости от статистики, величину  $\mathcal{J}^{(0)}$  можно считать в случае ферми-частиц антисимметричной относительно перестановки  $z_1, \gamma_1 \rightleftharpoons z_2, \gamma_2$  или  $z_3, \gamma_3 \rightleftharpoons z_4, \gamma_4$ , а в случае статистики Бозе симметричной по тем же переменным.

Определенная таким образом функция  $\mathcal{J}^{(0)}$  получается из величины

$$U_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(\tau_1 - \tau_2) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta(\tau_1 - \tau_3) \times \\ \times \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_4) \delta(\tau_2 - \tau_4)$$

антисимметризацией по переменным  $z_1\gamma_1$ ,  $z_2\gamma_2$  (и  $z_3\gamma_3$ ,  $z_4\gamma_4$ ) в случае статистики Ферми и симметризацией по тем же переменным в случае статистики Бозе.

Вычислим поправку первого порядка к гриновской функции. Имеем:

$$\frac{1}{4} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_4 \mathcal{J}_{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \times \\ \times \langle T_\tau \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \bar{\psi}_{\gamma_1}(z_1) \bar{\psi}_{\gamma_2}(z_2) \psi_{\gamma_4}(z_4) \psi_{\gamma_3}(z_3) \} \rangle. \quad (13.8)$$

Применяя теорему Вика и используя свойства симметрии  $\mathcal{J}^{(0)}$ , легко убедиться, что (13.8) представляется в виде суммы двух членов

$$-\frac{1}{2} \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x-y) \int d^4 z_1 \dots d^4 z_4 \mathcal{G}_{\gamma_3 \gamma_1}^{(0)}(z_3-z_1) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_4 \gamma_2}^{(0)}(z_4-z_2) \mathcal{J}_{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4), \quad (I)$$

$$-\int d^4 z_1 \dots d^4 z_4 \mathcal{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-z_1) \mathcal{J}_{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_4\beta}^{(0)}(z_4-y) \mathcal{G}_{\gamma_3\gamma_2}^{(0)}(z_3-z_2). \quad (II)$$

Будем обозначать на диаграмме  $\mathcal{J}^{(0)}$  четырехугольником. Тогда выражениям (I) и (II) можно сопоставить диаграммы

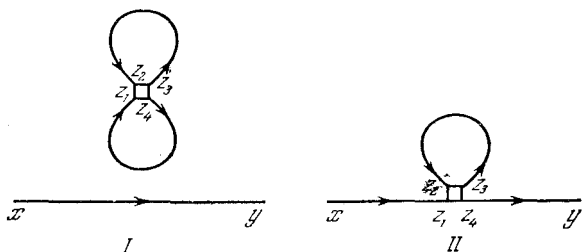


Рис. 35.

рис. 35. Диаграмма  $I$  — несвязанная, и ее вклад учитывать не нужно. Таким образом, в первом порядке теории возмущений мы имеем единственную диаграмму, вклад которой дается выражением (II).



Во втором порядке теории возмущений имеется всего три связанные топологически различные диаграммы (рис. 36). Нетрудно вычислить соответствующие этим диаграммам выражения:

$$\int dz_1 \dots dz_8 \mathcal{G}_{x\gamma_1}^{(0)}(x-z_1) \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_4\gamma_5}^{(0)}(z_4-z_5) \mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6; \gamma_7\gamma_8}^{(0)}(z_5, z_6; z_7, z_8) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_8\gamma_3}^{(0)}(z_8-y) \mathcal{G}_{\gamma_7\gamma_6}^{(0)}(z_7-z_6) \mathcal{G}_{\gamma_3\gamma_2}^{(0)}(z_3-z_2), \quad (\text{I})$$

$$\int dz_1 \dots dz_8 \mathcal{G}_{x\gamma_1}^{(0)}(x-z_1) \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \mathcal{G}_{\gamma_4\gamma_3}^{(0)}(z_4-y) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_3\gamma_6}^{(0)}(z_3-z_6) \mathcal{G}_{\gamma_7\gamma_2}^{(0)}(z_7-z_2) \times \\ \times \mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6; \gamma_7\gamma_8}^{(0)}(z_5, z_6; z_7, z_8) \mathcal{G}_{\gamma_8\gamma_5}^{(0)}(z_8-z_5), \quad (\text{II})$$

$$\frac{1}{2} \int dz_1 \dots dz_2 \mathcal{G}_{x\gamma_1}^{(0)}(x-z_1) \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_3\gamma_5}^{(0)}(z_3-z_5) \mathcal{G}_{\gamma_4\gamma_6}^{(0)}(z_4-z_6) \times \\ \times \mathcal{G}_{\gamma_7\gamma_2}^{(0)}(z_7-z_2) \mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6; \gamma_7\gamma_8}^{(0)}(z_5, z_6; z_7, z_8) \mathcal{G}_{\gamma_8\gamma_3}^{(0)}(z_8-y). \quad (\text{III})$$

Вычисление поправки  $n$ -го порядка к гриновской функции производится по следующим правилам:

1) следует изобразить все топологически неэквивалентные диаграммы, содержащие  $n$  четырехугольников (в нашем

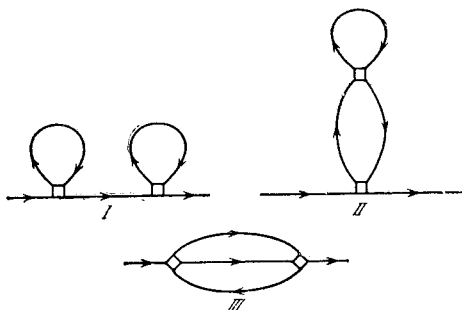


Рис. 36.

случае к топологически эквивалентным диаграммам относятся диаграммы, отличающиеся перестановкой каких-либо координат вершин четырехугольников);

2) каждой линии диаграммы сопоставляется гриновская функция частицы;

3) каждому четырехугольнику сопоставляется функция  $\mathcal{J}^{(0)}$ ;

4) производится интегрирование по координатам вершин четырехугольников.

Коэффициент  $A_n$  перед диаграммой определяется точно так же, как и в диаграммной технике при  $T=0$  (см. § 9).

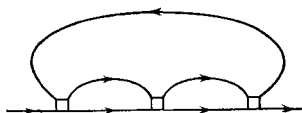


Рис. 37.

Проще всего, однако, для нахождения коэффициента воспользоваться непосредственно теоремой Вика, расписывая выражение  $\langle T_\tau \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \dots \} \rangle$  через попарные средние.

Пользуясь этими правилами, не представляет труда записать выражение, соответствующее диаграмме рис. 37:

$$\begin{aligned} & \mp \frac{1}{4} \int d^4 z_1 \dots d^4 z_{12} \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4) \times \\ & \times \mathbb{G}_{\gamma_3\gamma_5}^{(0)}(z_3 - z_5) \mathbb{G}_{\gamma_4\gamma_6}^{(0)}(z_4 - z_6) \mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6; \gamma_7\gamma_8}^{(0)}(z_5, z_6; z_7, z_8) \times \\ & \times \mathbb{G}_{\gamma_7\gamma_9}^{(0)}(z_7 - z_9) \mathbb{G}_{\gamma_8\gamma_{10}}^{(0)}(z_8 - z_{10}) \times \\ & \times \mathcal{J}_{\gamma_9\gamma_{10}; \gamma_{11}\gamma_{12}}^{(0)}(z_9, z_{10}; z_{11}, z_{12}) \mathbb{G}_{\gamma_{12}\beta}^{(0)}(z_{12} - y) \mathbb{G}_{\gamma_{11}\gamma_2}^{(0)}(z_{11} - z_2). \end{aligned}$$

Возникающие в этой технике довольно громоздкие выражения (сложность которых, правда, искупается их симметрией) очень упрощаются, если мы имеем дело с точечным взаимодействием, описываемым потенциалом

$$U_{\alpha\beta; \gamma\delta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \lambda \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

В этом случае функция  $\mathcal{J}^{(0)}$  имеет простой вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4}^{(0)} &= \lambda (\delta_{\gamma_1\gamma_3} \delta_{\gamma_2\gamma_4} - \delta_{\gamma_1\gamma_4} \delta_{\gamma_2\gamma_3}) \delta(z_1 - z_2) \delta(z_1 - z_3) \delta(z_1 - z_4) = \\ &= \lambda L_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4} \delta(z_1 - z_2) \delta(z_1 - z_3) \delta(z_1 - z_4). \end{aligned}$$

Благодаря наличию в  $\mathcal{J}^{(0)}$  трех  $\delta$ -функций в выражениях для поправок из четырех интегрирований по координатам вершин четырехугольников остается только одно. Это позволяет заменить на диаграммах четырехугольники просто точками (вершинами). Например, диаграммы II рис. 35

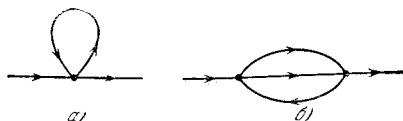


Рис. 38.

и III рис. 36 удобнее рисовать так, как показано на рис. 38; соответствующие им поправки преобразуются к виду

$$-\lambda L_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4} \int d^4z \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-z) \mathfrak{G}_{\gamma_4\beta}^{(0)}(z-y) \mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_2}^{(0)}(0), \quad (a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{2} L_{\gamma_1\gamma_2; \gamma_3\gamma_4} L_{\gamma_5\gamma_6; \gamma_7\gamma_8} \int d^4z_1 d^4z_2 \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x-z_1) \mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}^{(0)}(z_1-z_2) \times \\ & \times \mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_6}^{(0)}(z_1-z_2) \mathfrak{G}_{\gamma_7\gamma_2}^{(0)}(z_2-z_1) \mathfrak{G}_{\gamma_8\beta}^{(0)}(z_2-y). \end{aligned} \quad (б)$$

Общие правила вычислений по такой диаграммной технике очевидны из предыдущего.

**Б. Взаимодействие частиц с фононами.** Взаимодействие частиц с фононами (например, взаимодействие частиц жидкости со звуковыми волнами или взаимодействие электронов в металле с колебаниями решетки) описывается гамильтонианом

$$\hat{H}_{int}(\tau) = g \int \bar{\psi}_a(\mathbf{r}, \tau) \psi_a(\mathbf{r}, \tau) \varphi(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r},$$

где  $g$  — константа взаимодействия.

Легко убедиться, что отличны от нуля лишь поправки к гриновским функциям частиц  $\mathfrak{G}$  и фононов  $\mathfrak{D}$  в четных порядках теории возмущений. (Выражения для поправок в нечетных порядках содержат нечетное число фононных операторов  $\varphi$ .) Вычисляя выражения для поправок к гриновской функции частиц  $\mathfrak{G}$ , можно убедиться, что они в точности совпадают с выражениями для поправок к  $\mathfrak{G}$  в первой формулировке теории возмущений для двухчастичного взаимодействия, если в последних заменить потенциал  $\mathfrak{B}(z_1 - z_2)$  на

$g^2 \mathcal{D}^{(0)}(z_1 - z_2)$ . Естественно, что соответствующие поправки будут описываться точно такими же диаграммами, как на рис. 33 и 34. Мы, однако, для определенности будем изображать гриновскую функцию фонона  $\mathcal{D}^{(0)}$  не волнистой, а пунктирной линией.

Поправки второго порядка к фононной гриновской функции описываются двумя связанными диаграммами (рис. 39, а и б).

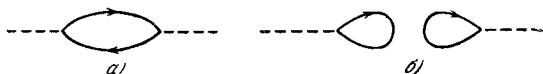


Рис. 39.

Вычисления дают для поправки в случае рис. 39, а выражение

$$\pm g^2 \int d^4 z_1 d^4 z_2 \mathcal{D}^{(0)}(x - z_1) \mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathcal{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(z_2 - z_1) \mathcal{D}^{(0)}(z_2 - y),$$

поправка в случае рис. 39, б имеет вид

$$g^2 \int d^4 z_1 \mathcal{D}^{(0)}(x - z_1) \mathcal{G}_{\alpha\alpha}(0) \int d^4 z_2 \mathcal{D}^{(0)}(z_2 - y) \mathcal{G}_{\beta\beta}(0).$$

Так же, как и в § 9, можно убедиться, что выражение, соответствующее диаграмме 39, б), равно нулю. То же

самое обстоятельство позволяет вообще не рассматривать диаграмм, в выражениях для которых появляется интеграл  $\int \mathcal{D}^{(0)}(z) d^4 z$ . Сюда относятся

все диаграммы для  $\mathcal{D}$ , которые распадаются на две не связанные друг с другом части, причем к каждой из частей подходит по одной внешней

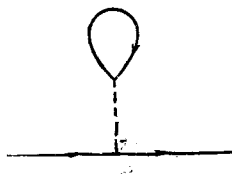


Рис. 40.

линии, а также диаграммы для  $\mathcal{G}$  типа рис. 40 (последние всегда содержат часть, не содержащую внешних линий и соединенную с остатком одной фононной линией).

Рассматривая поправки к  $\mathcal{D}$  следующих порядков и учитывая сказанное выше относительно  $\mathcal{G}$ , можно сформулировать следующие общие правила вычисления по диаграммной технике поправки порядка  $2n$ :

1) каждой сплошной линии диаграммы сопоставляется гриновская функция свободной частицы  $\mathcal{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x - y)$ , каждой пунктирной линии — функция  $\mathcal{D}^{(0)}(x - y)$ ;

2) производится интегрирование по координатам всех вершин (по  $r$  и по  $\tau$ );

3) полученное выражение умножается на  $g^{2n}(-1)^{n+F}$ , где  $F$  — число замкнутых фермионных петель в диаграмме.



Рис. 41.

Например, поправка четвертого порядка к гриновской функции фонона, описываемая диаграммой рис. 41, имеет вид

$$\mp g^4 \int d^4 z_1 \dots d^4 z_4 \mathcal{D}^{(0)}(x - z_1) \mathbb{G}_{\gamma_1 \gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathbb{G}_{\gamma_3 \gamma_1}^{(0)}(z_3 - z_1) \times \\ \times \mathcal{D}^{(0)}(z_2 - z_3) \mathbb{G}_{\gamma_2 \gamma_4}^{(0)}(z_2 - z_4) \mathbb{G}_{\gamma_4 \gamma_3}^{(0)}(z_4 - z_3) \mathcal{D}^{(0)}(z_4 - y).$$

## § 14. Диаграммная техника в импульсном пространстве

**1. Переход к импульсному представлению.** Развитая в предыдущем параграфе диаграммная техника в координатном представлении оказывается, однако, весьма неудобной при конкретных вычислениях. Дело в том, что успех методов теории поля при абсолютном нуле температуры обязан в основном большой степени автоматизма при вычислениях, который достигается за счет разложения всех фигурирующих в теории величин в интегралы Фурье по всем четырем координатам, подобно тому, как это было сделано при  $T=0$ . В описанной выше технике Мацубары такой автоматизм отсутствует в связи с тем, что переменная  $\tau$  в этом методе изменяется в конечных пределах от нуля до  $1/T$  и переход к фурье-представлению (по  $\tau$ ) оказывается невозможным.

В координатном представлении  $\mathbb{G}^{(0)}$  и  $\mathcal{D}^{(0)}$  являются разрывными функциями переменной  $\tau$ ; все интегралы по  $\tau$  фактически распадаются на большое число областей, число которых с ростом порядка ( $n$ ) приближения очень быстро растет. Это делает применение мацубаровской техники крайне затруднительным.

Технику можно значительным образом улучшить, если разложить величины, зависящие от  $\tau$ , в ряды Фурье по этой переменной (Абрикосов, Горьков, Дзялошинский [30], Фрадкин [31]).

Температурная гриновская функция  $\mathfrak{G}$  (или  $\mathfrak{D}$ ) является функцией разности  $\tau_1 - \tau_2$  и как таковая задана в интервале  $(-1/T, 1/T)$ . Разложим  $\mathfrak{G}(\tau)$  в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\tau) &= T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\omega_n), \\ \mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-1/T}^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau, \quad \omega_n = \pi n T.\end{aligned}\tag{14.1}$$

Наша задача состоит в том, чтобы произвести переход к фурье-представлению в выражениях для поправок к гриновской функции, приведенных в § 13. При этом было бы безусловно желательным, чтобы указанный переход не внес в формулы никаких дополнительных усложнений (например, чтобы не возникало каких-либо дополнительных, зависящих от «частот»  $\omega_n$ , множителей и т. п.).

Оказывается, что в случае конечных температур мы сталкиваемся практически с той же ситуацией, какую имели при  $T=0$ . Это связано с отмеченным нами в § 11 одним общим свойством гриновских функций. Именно, как было установлено,  $\mathfrak{G}(\tau)$  при  $\tau < 0$  связано простыми соотношениями с  $\mathfrak{G}(\tau)$  при  $\tau > 0$  (см. формулы (11.8), (11.8a)). Из этих соотношений следует, что фурье-компоненты  $\mathfrak{G}(\omega_n)$  гриновской функции бозе-частиц и фононов отличны от нуля лишь для «четных» частот  $\omega_n = 2\pi n T$ , в то время как  $\mathfrak{G}$  для ферми-частиц имеет лишь компоненты с

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_{-1/T}^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-1/T}^0 e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Выразим во втором интеграле  $\mathfrak{G}(\tau \leq 0)$  при помощи соотношения (11.8) и произведем в нем затем замену переменных  $\tau' = \tau + 1/T$ . Имеем:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\omega_n) &= \frac{1}{2} \int_0^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau \mp \frac{1}{2} \int_{-1/T}^0 e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}\left(\tau + \frac{1}{T}\right) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} (1 \mp e^{-i\omega_n/T}) \int_0^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau,\end{aligned}$$

откуда сразу вытекает сделанное утверждение. Заметим, что при этом всегда

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\omega_n) &= \int_0^{1/T} e^{i\omega_n \tau} \mathfrak{G}(\tau) d\tau, \\ \omega_n &= \begin{cases} (2n+1)\pi T & \text{для ферми-частиц} \\ 2n\pi T & \text{для бозе-частиц.} \end{cases}\end{aligned}\tag{14.2}$$

Произведем преобразование Фурье во всех членах ряда теории возмущений, для чего подставим в соответствующие выражения разложения в ряд Фурье по (14.1). Кроме того, одновременно проведем преобразование Фурье по пространственным переменным:

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(r) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{ipr} \mathfrak{G}(p) dp, \\ \mathfrak{G}(p) &= \int e^{-ipr} \mathfrak{G}(r) dr.\end{aligned}\tag{14.3}$$

Преобразование по пространственным переменным производится в нашем случае точно так же, как это было сделано при  $T=0$ .

Заметим, что в каждой точке, по координатам которой проводится интегрирование, всегда сходится четное число фермионных линий, вследствие чего при интегрировании по временной координате каждой вершины

$$\int_0^{1/T} d\tau e^{i\tau \Sigma \omega_n},\tag{14.4}$$

сумма «частот»  $\sum \omega_n$  в показателе экспоненты всегда «четна»  $\sum \omega_n = 2N\pi T$  ( $N$  — целое число). Интеграл (14.4) в случае четных частот равен

$$\frac{1}{T} \delta_{\sum \omega_n}, \quad \delta_{\omega_n} = \begin{cases} 1, & \omega_n = 0, \\ 0, & \omega_n \neq 0. \end{cases} \quad (14.5)$$

Таким образом, здесь мы имеем, по существу, ту же самую ситуацию, что и при  $T=0$ . В последнем случае при интегрировании по координатам и времени  $t$  вершины возникали  $\delta$ -функции от частот и импульсов, выражающие законы сохранения энергий и импульса в виртуальных процессах. При  $T \neq 0$   $\delta$ -функция от частот заменяется на функцию  $\delta_{\omega_n}$  — символ Кронекера, выражающую закон сохранения дискретной «частоты»  $\omega_n$ .

Все это позволяет сохранить для описания в импульсном пространстве ряда теории возмущений обычные фейнмановские диаграммы, с которыми мы имели дело при  $T=0$ . Единственным существенным отличием (помимо разницы в коэффициентах) является возникновение в выражениях для матричных элементов вместо интегралов по частотам  $\omega$  сумм по дискретным частотам  $\omega_n$ .

Прежде чем переходить к конкретным примерам, приведем выражения для фурье-компонент нулевых гриновских функций. В § 11 мы вычислили нулевые гриновские функции в координатном пространстве. Согласно (11.13а), гриновская функция свободной фермиевской частицы после проведения преобразования Фурье по координатам (14.3) имеет при  $\tau > 0$  вид

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}, \tau) = -\delta_{\alpha\beta} (1 - n(\mathbf{p})) e^{-\tau(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)},$$

$$n(\mathbf{p}) = [e^{(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)/T} + 1]^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (14.2), имеем ( $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ ):

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega_n) = -\delta_{\alpha\beta} (1 - n(\mathbf{p})) \int_0^{1/T} e^{i\omega_n \tau - \tau(\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)} d\tau =$$

$$= -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{i\omega_n - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu} (1 - n(\mathbf{p})) \{e^{(2n+1)\pi i - (\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu)/T} - 1\},$$



т. е. окончательно

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(p, \omega_n) = \delta_{\alpha\beta} \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_0(p) + i\mu}, \quad \omega_n = (2n+1)\pi T. \quad (14.6)$$

Аналогичные вычисления дают для бозе-частиц

$$\mathfrak{G}^{(0)}(p, \omega_n) = \frac{1}{i\omega_n - \varepsilon_0(p) + i\mu}, \quad \omega_n = 2\pi n T, \quad (14.7)$$

и для фононов

$$\mathfrak{D}^{(0)}(k, \omega_n) = - \frac{\omega_0^2(k)}{\omega_n^2 + \omega_0^2(k)}, \quad \omega_n = 2\pi n T. \quad (14.8)$$

Таким образом, нулевые гриновские функции ферми- и бозе-частиц отличаются друг от друга только «четностью» частоты  $\omega_n$ . Функции (14.6) — (14.8) получаются из гриновских функций при  $T=0$  (7.7), (7.16) заменой  $\omega \rightarrow i\omega_n$ . В дальнейшем мы убедимся, что подобная связь существует (правда, с некоторыми оговорками) и для точных гриновских функций.

**2. Примеры.** Как мы убедились, вычисление температурных гриновских функций может производиться по диаграммной технике Файнмана в импульсном пространстве. При этом каждой линии файнмановской диаграммы сопоставляется нулевая гриновская функция частиц  $\mathfrak{G}^{(0)}(p, \omega_n)$  или фононов  $\mathfrak{D}^{(0)}(k, \omega_n)$ , а каждой вершине —  $\delta(\sum p)\delta_{\sum \omega_n}$ , выражающие законы сохранения импульса и дискретной «частоты»  $\omega_n$ . По всем внутренним линиям производится интегрирование по импульсам и суммирование по «частотам»  $\omega_n$ .

Фактический вид диаграмм и сопоставляемых им выражений зависит от вида взаимодействия. Мы начнем с двухчастичного взаимодействия.

**А. Двухчастичное взаимодействие.** Рассмотрим поправку к гриновской функции, даваемую диаграммой IV рис. 33. В § 13 мы получили для нее выражение

$$- \int \int d^4 z_1 d^4 z_2 \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(x - z_1) \mathfrak{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(z_1 - z_2) \mathfrak{G}_{\gamma_2\beta}^{(0)}(z_2 - y) \mathfrak{V}(z_1 - z_2).$$

Произведем в нем преобразование Фурье по координатам и «времени»  $\tau$ :

$$\delta \mathfrak{G}^{(1)}(\mathbf{p}, \omega_n) = \frac{1}{2} \int d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \\ \times \int_{-1/T}^{1/T} d(\tau_x - \tau_y) \delta \mathfrak{G}^{(1)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \tau_x - \tau_y) e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + i\omega_n(\tau_x - \tau_y)}.$$

Введем при этом компоненту Фурье потенциала  $\mathfrak{B}(z_1 - z_2)$ :

$$\mathfrak{B}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\omega_n\tau} \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \omega_n).$$

Ввиду того, что

$$T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n T \tau} = \delta(\tau),$$

$$\mathfrak{B}(\mathbf{q}, \omega_n) = U(\mathbf{q}).$$

Имеем:

$$\delta \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{p}, \omega_n) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\omega_{n1}, \omega_{n2} \\ \omega_{n3}, \omega_{n4}}} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 d\mathbf{p}_4 \times \\ \times \left[ \frac{T}{(2\pi)^3} \right]^4 \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(\mathbf{p}_1, \omega_{n1}) \mathfrak{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(\mathbf{p}_2, \omega_{n2}) \times \\ \times \mathfrak{G}_{\gamma_2\beta}^{(0)}(\mathbf{p}_3, \omega_{n3}) \mathfrak{B}(\mathbf{q}, \omega_{n4}) \int d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \times \\ \times \int d(\tau_x - \tau_y) d\tau_1 d\tau_2 e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} e^{i\omega_n(\tau_x - \tau_y)} \times \\ \times e^{i\mathbf{p}_1(\mathbf{x} - \mathbf{z}_1) + i\mathbf{p}_2(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) + i\mathbf{p}_3(\mathbf{z}_2 - \mathbf{y})} e^{-i\omega_{n1}(\tau_x - \tau_1) - i\omega_{n2}(\tau_1 - \tau_2)} \times \\ \times e^{-i\omega_{n3}(\tau_2 - \tau_y)} e^{i\mathbf{q}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2) - i\omega_{n4}(\tau_1 - \tau_2)},$$

В интегралах по пространству и времени сделаем замену переменных  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ ,  $\tau_x \rightarrow \tau_y \rightarrow \tau$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} d\mathbf{z}_1 d\mathbf{z}_2 \int_{-1/T}^{1/T} d\tau \times \\ & \times \int_0^{1/T} \int_0^{1/T} d\tau_1 d\tau_2 e^{i\mathbf{x}(-\mathbf{p}+\mathbf{p}_1)+i\mathbf{z}_1(-\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{q})+i\mathbf{z}_2(-\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3+\mathbf{q})} \times \\ & \times e^{i\tau(\omega_n-\omega_{n1})+i\tau_1(\omega_{n1}-\omega_{n2}-\omega_{n4})+i\tau_2(\omega_{n2}-\omega_{n3}+\omega_{n4})} \times \\ & \times e^{i\mathbf{y}(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)+i\tau_y(-\omega_{n1}+\omega_{n3})} = \\ & = \left(\frac{(2\pi)^3}{T}\right)^3 \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1) \delta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\mathbf{q}) \delta(\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3+\mathbf{q}) \times \\ & \times \delta_{\omega_n-\omega_{n1}} \delta_{\omega_{n1}-\omega_{n2}-\omega_{n4}} \delta_{\omega_{n2}-\omega_{n3}+\omega_{n4}}, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \delta \mathbb{G}_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{p}, \omega_n) &= -\frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_{n1}} \int d\mathbf{p}_1 \mathbb{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega_n) \times \\ & \times \mathbb{G}_{\gamma_1\gamma_2}^{(0)}(\mathbf{p}_1, \omega_{n1}) \mathbb{G}_{\gamma_2\beta}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega_n) \mathfrak{B}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1, \omega_n-\omega_{n1}). \end{aligned}$$

Подставляя выражения для нулевых гриновских функций (14.6), (14.7), получим окончательно:

$$\delta \mathbb{G}_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{[i\omega_n - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu]^2} \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_{n1}} \int d\mathbf{p}_1 \frac{\mathfrak{B}(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1, \omega_n-\omega_{n1})}{i\omega_{n1} - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1) + \mu}. \quad (14.9)$$

Аналогичные вычисления для вклада диаграммы III рис. 33 приводят к результату

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega_n - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu)^2} \mathfrak{B}(0, 0) (2s+1) \frac{T}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \sum_{\omega_{n1}} \int d\mathbf{p}_1 \frac{e^{i\omega_{n1}\tau}}{i\omega_{n1} - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1) + \mu}, \quad (14.10) \end{aligned}$$

где  $\tau \rightarrow 0$ ,  $s$  — спин частицы, равный  $1/2$  для ферми-частиц и нулю для бозе-частиц. Мы ввели здесь  $e^{i\omega_{n1}\tau}$  ( $\tau \rightarrow +0$ ) под знаком суммы в соответствии с упоминавшимся в § 13

условием, что  $\mathfrak{G}$ -функция в координатном пространстве при совпадающих временных аргументах определяется как

$$\mathfrak{G}^{(0)}(0, 0) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \mathfrak{G}^{(0)}(0, -\tau).$$

Выражениям (14.9), (14.10) можно сопоставить фейнмановские диаграммы, соответственно, рис. 42, а и б. Внешние линии этих диаграмм несут внешние импульс и частоту —  $p, \omega_n$ ; импульсы и частоты в каждой вершине удовлетворяют законам сохранения: сумма «входящих» в вершину импульсов равна сумме «выходящих».

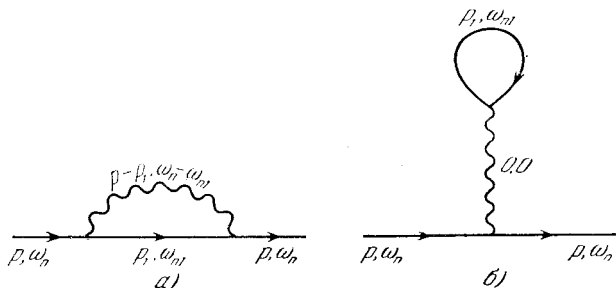


Рис. 42.

Рассмотрим диаграмму для  $\mathfrak{G}(p, \omega_n)$  произвольного порядка  $k$  теории возмущений. Такая диаграмма имеет  $2k$  вершин,  $2k + 1$  сплошных линий и  $k$  волнистых линий. При проведении преобразования Фурье мы будем иметь  $2k$  интегрирований по пространственным и «временным» координатам вершин и одно интегрирование по разности координат внешних концов, от которых возникает  $2k + 1$  величин типа  $\delta(\sum p) \delta \sum \omega_n$ , выражающих  $2k + 1$  законов сохранения. Легко убедиться, что два закона сохранения выражают тот факт, что внешние линии имеют импульс  $p$  и частоту  $\omega_n$ . Остальные  $2k - 1$  законов сохранения приводят к тому, что из  $3k - 1$  интегрирований по импульсам и суммирований по частотам внутренних линий (как сплошным, так и волнистым) фактически останется лишь  $k$  интегрирований и суммирований.

Сформулируем теперь правила написания выражения, отвечающего определенной диаграмме для функции Грина.

1) Прежде всего, следует сопоставить линиям диаграммы импульсы и частоты; внешние линии при этом должны нести внешние импульс и частоту, а импульсы и частоты внутренних линий должны удовлетворять в каждой вершине законам сохранения  $\sum p' = 0$ ,  $\sum \omega'_n = 0$ . Частоты бозевских линий всегда четные ( $\omega_n = 2n\pi T$ ), частоты фермиевских — нечетные ( $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ ).

2) По всем независимым импульсам и частотам диаграммы производятся суммирование и интегрирование.

3) Каждой сплошной внутренней линии (импульс и частота  $p'$ ,  $\omega'_n$ ) сопоставляется величина

$$\frac{1}{i\omega'_n - \varepsilon_0(p') + \mu},$$

каждой волнистой линии ( $q$ ,  $\omega'_n$ ) — величина

$$\mathfrak{B}(q, \omega'_n) \equiv U(q).$$

4) Обеим внешним линиям (импульс и частота  $p$ ,  $\omega_n$ ) диаграммы сопоставляется величина

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega_n - \varepsilon_0(p) + \mu)^2}.$$

5) Перед получившимся выражением следует поставить множитель

$$(-1)^k \frac{T^k}{(2\pi)^{3k}} (2s + 1)^F (\mp 1)^F,$$

где  $F$  — число замкнутых петель на диаграмме, образованных линиями частиц.

Пользуясь этими правилами, не составляет труда записать поправку, отвечающую любой сколь угодно сложной диаграмме. Вклад диаграммы рис. 43 имеет, например, вид

$$\begin{aligned} & \pm \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega - \varepsilon_0(p) + \mu)^2} \frac{T^3}{(2\pi)^9} (2s + 1) \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3} \int dp_1 dp_2 dp_3 \times \\ & \times \frac{1}{i(\omega - \omega_1) - \varepsilon_0(p - p_1) + \mu} \frac{1}{i(\omega_3 - \omega_1) - \varepsilon_0(p_3 - p_1) + \mu} \times \\ & \times \frac{1}{i\omega_3 - \varepsilon_0(p_3) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(p_2) + \mu} \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2) - \varepsilon_0(p_1 + p_2) + \mu} \times \\ & \times \left( U(p_1) \right)^2 U(p - p_3), \\ & \omega_1 = 2\pi n T; \omega_2, \omega_3 = (2n + 1)\pi T. \end{aligned}$$

Перейдем теперь ко второму варианту диаграммной техники для случая двухчастичного взаимодействия. При переходе к фурье-представлению в соответствующих выражениях удобно применить следующий формальный прием. Выше была введена величина  $\mathcal{J}_{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4)$ . Величина  $\mathcal{J}^{(0)}$  зависит от четырех «времен»  $\tau_i$ , причем каждое  $\tau_i$  изменяется в интервале от 0 до  $1/T$ . Продолжим функцию  $\mathcal{J}^{(0)}$

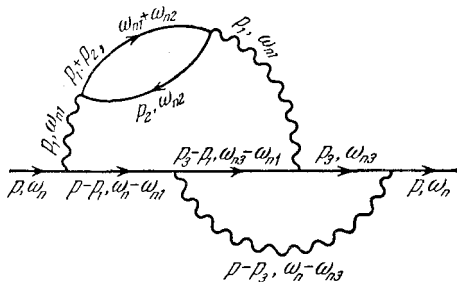


Рис. 43.

на интервал  $-1/T, 1/T$  при помощи соотношений типа соотношений (11.8) для  $\mathcal{G}$ -функций

$$\mathcal{J}^{(0)}(\tau_1 < 0, \tau_2; \tau_3, \tau_4) = \mp \mathcal{J}^{(0)}(\tau_1 + 1/T, \tau_2; \tau_3, \tau_4)$$

и аналогичных соотношений для  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$ . Определим преобразование Фурье как

$$\frac{1}{16} \int_{-1/T}^{1/T} d\tau_1 \dots d\tau_4 e^{i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 - \omega_3 \tau_3 - \omega_4 \tau_4)} \mathcal{J}^{(0)}(\tau_1, \tau_2; \tau_3, \tau_4).$$

Очевидно, что в случае фермиевской статистики все четыре частоты будут «нечетными», а в случае статистики Бозе — «четными».

Заметим, далее, что поскольку  $\mathcal{J}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4)$  согласно своему определению есть функция только от разностей координат и «времен»  $\tau$ , то фурье-компоненты  $\mathcal{J}^{(0)}$  по пространственным и временным переменным будут содержать  $\delta$ -функцию от суммы импульсов  $\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)$  и символ Кронекера от суммы частот  $\delta_{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4}$ . Поэтому мы

определим фурье-компоненту  $\mathcal{J}^{(0)}$  сразу как

$$\begin{aligned} & \frac{(2\pi)^3}{T} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta_{\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4} \times \\ & \times \mathcal{J}^{(0)}(p_1 \omega_1, p_2 \omega_2; p_3 \omega_3, p_4 \omega_4) = \frac{1}{16} \int_{-1/T}^{1/T} d\tau_1 \dots d\tau_4 \times \\ & \times \int dr_1 \dots dr_4 e^{-i(p_1 r_1 + p_2 r_2 - p_3 r_3 - p_4 r_4) + i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 - \omega_3 \tau_3 - \omega_4 \tau_4)} \times \\ & \times \mathcal{J}^{(0)}(z_1, z_2; z_3, z_4). \quad (14.11) \end{aligned}$$

Произведем, например, преобразование Фурье в выражении для поправки первого порядка, соответствующей диа-

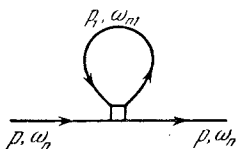


Рис. 44.

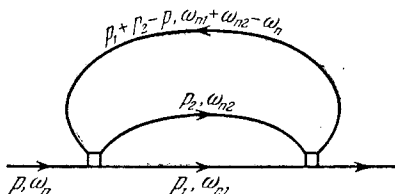


Рис. 45.

грамме II рис. 35. После простых вычислений находим:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{(i\omega - \varepsilon_0(p) + \mu)^2} \frac{T}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \sum_{\omega_1} \int d\mathbf{p}_1 \mathcal{J}_{\alpha\gamma; \gamma\beta}^{(0)}(p, \omega; p_1, \omega_1; p_1, \omega_1; p, \omega) \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(p_1) + \mu}, \end{aligned}$$

которое соответствует диаграмме рис. 44.

Аналогичные вычисления для поправки, даваемой диаграммой рис. 45, приводят к формуле <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{1}{(i\omega - \varepsilon_0(p) + \mu)^2} \frac{T^2}{(2\pi)^6} \times \\ & \times \sum_{\omega_1 \omega_2} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \mathcal{J}_{\alpha\gamma_1; \gamma_2\gamma_3}^{(0)}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \times \\ & \times \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(p_1) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(p_2) + \mu} \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega) - \varepsilon_0(p_1 + p_2 - p) + \mu} \times \\ & \times \mathcal{J}_{\gamma_2\gamma_3; \gamma_1\beta}^{(0)}(p_1, p_2; p_1 + p_2 - p, p). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Мы использовали здесь четырехмерные обозначения:  $p = (p, \omega_n)$ .

Диаграмма  $n$ -го порядка для  $\mathcal{G}$ -функции содержит  $n$  четырехугольников (вершин) и  $2n+1$  линию; из них  $2n-1$  внутренних линий связаны в каждой вершине законами сохранения  $\sum \mathbf{p}' = 0$ ,  $\sum \omega'_n = 0$ . Легко убедиться, что имеется всего  $n$  независимых интегрирований и суммирований по импульсам и частотам внутренних линий. При вычислении вклада произвольной диаграммы проводятся операции:

1) каждой внутренней линии сопоставляется величина

$$\frac{1}{i\omega' - \varepsilon_0(\mathbf{p}') + \mu};$$

2) каждой внешней линии сопоставляется величина

$$\frac{1}{i\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu};$$

3) каждой вершине диаграммы сопоставляется функция

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3);$$

4) по всем независимым внутренним импульсам и частотам производятся интегрирование и суммирование;

5) по индексам  $\alpha, \beta, \dots$  величин  $\mathcal{J}^{(0)}$ , соединенным  $\mathcal{G}^{(0)}$ -линией, производится суммирование;

6) результат вычисления умножается на  $\frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} A_n$  (относительно  $A_n$  см. § 13).

Так, диаграмме рис. 46 соответствует выражение

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \frac{1}{(i\omega - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu)^2} \frac{T^3}{(2\pi)^9} \times \\ & \times \sum_{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3 \mathcal{J}_{\alpha\gamma_1; \gamma_2 \gamma_3}^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \times \\ & \times \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(\mathbf{p}_2) + \mu} \times \\ & \times \mathcal{J}_{\gamma_2 \gamma_3; \gamma_4 \gamma_5}^{(0)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \frac{1}{i\omega_3 - \varepsilon_0(\mathbf{p}_3) + \mu} \times \\ & \times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) + \mu} \times \\ & \times \mathcal{J}_{\gamma_4 \gamma_5; \gamma_1 \beta}^{(0)}(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3; \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}, \mathbf{p}) \times \\ & \times \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega) - \varepsilon_0(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}) + \mu}. \end{aligned}$$



В случае точечного взаимодействия функция  $\mathcal{J}^{(0)}$  не зависит от импульсов и частот.

Б. Взаимодействие с фононами. В случае взаимодействия с фононами отличны от нуля только диаграммы

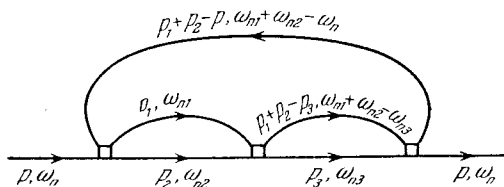


Рис. 46.

четного порядка. Произвольная диаграмма порядка  $2n$  содержит  $3n + 1$  внутренних линий (электронных и фононных) и  $2n$  вершин, что соответствует

$$3n - 1 - (2n - 1) = n$$

независимым интегрированиям. При вычислении ее вклада производятся следующие операции:

1) каждой внутренней сплошной линии сопоставляется величина

$$\frac{1}{i\omega' - \varepsilon_0(p') + \mu},$$

а обеим внешним сплошным линиям (в диаграммах для поправок к  $\mathfrak{G}$ -функции частиц) — величина

$$\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega - \varepsilon_0(p) + \mu)^2};$$

2) каждой фононной (пунктирной) линии сопоставляется величина

$$-\frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 + \omega_0^2(k)};$$

3) результат вычисления умножается на

$$g^{2n} \frac{T^n}{(2\pi)^{3n}} (-1)^n (2s + 1)^F (\mp 1)^F,$$

где  $g$  — константа взаимодействия,  $F$  — число замкнутых петель на диаграмме  $s$ -спин частиц.

Запишем, например, выражение для поправки второго порядка к  $\mathfrak{D}$ -функции фонона, соответствующей диаграмме рис. 47:

$$\begin{aligned} & \pm \left[ \frac{\omega_0^2(k)}{\omega^2 + \omega_0^2(k)} \right]^2 g^2 (2s+1) \frac{T}{(2\pi)^3} \times \\ & \times \sum_{\omega'} \int dp' \frac{1}{i\omega' - \varepsilon_0(p') + \mu} \frac{1}{i(\omega' - \omega) - \varepsilon_0(p' - k) + \mu}. \end{aligned}$$

Приведенные в этом параграфе правила находятся в очень простом соотношении с соответствующими правилами вычисления поправок к гриновским функциям при

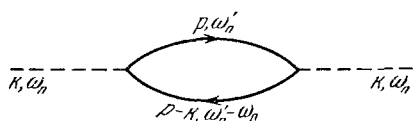


Рис. 47.

счисления поправок к гриновским функциям при  $T=0$ . Как легко проверить, поправку к температурной гриновской функции  $\mathfrak{G}$  можно получить из выражения для

поправки к гриновской функции  $G$  при  $T=0$ , заменив в последнем все частоты  $\omega$  на  $i\omega_n$  ( $\omega_n = 2n\pi T$  для бозе-частиц,  $\omega_n = (2n+1)\pi T$  для ферми-частиц) и все интегралы по частотам на суммы:

$$\int d\omega \dots \rightarrow 2\pi T i \sum_{\omega_n} \dots$$

В заключение рассмотрим, как в развитой технике происходит предельный переход к случаю  $T=0$ . При стремлении  $T$  к нулю в суммах по частотам главную роль играют большие  $n$ , и поэтому эти суммы можно заменить интегралами. Учитывая, что  $\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi T$ , получим:

$$T \sum_{\omega_n} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int d\omega.$$

Подчеркнем, что  $\mathfrak{G}(\omega)$  при  $T=0$  отнюдь не совпадает с  $G(\omega)$ . Связь между этими величинами будет установлена в дальнейшем.

## § 15. Ряд теории возмущений для термодинамического потенциала $\Omega$

Бывают случаи, когда оказывается, что более удобно вычислять непосредственно термодинамический потенциал  $\Omega$ , вместо того чтобы сначала находить гриновские функции, а уже затем термодинамические величины.

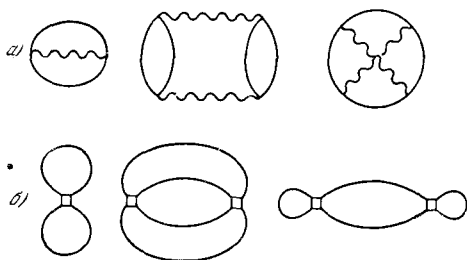


Рис. 48.

Поправка к термодинамическому потенциалу выражается через среднее значение  $\mathfrak{E}$ -матрицы формулой (см. (12.11))

$$\Delta\Omega = -T \ln \langle \mathfrak{E} \rangle,$$

$$\mathfrak{E} = \exp \left\{ - \int_0^{1/T} \hat{H}_{int}(\tau) d\tau \right\}. \quad (15.1)$$

Оказывается, что логарифм в формуле (15.1) может быть взят в общем виде; точнее, можно построить диаграммную технику непосредственно для величины  $\Omega$ .

Из предыдущего очевидно, что диаграммы, которыми описывается ряд теории возмущений для  $\Omega$ , имеют вид замкнутых петель. Типичные диаграммы для обоих вариантов двухчастичного взаимодействия представлены на рис. 48, *a* и *б*, для взаимодействия с фонами — на рис. 49 (фактически диаграмма на рис. 49, *I* равна нулю).

Среди диаграмм данного порядка теории возмущений будут находиться диаграммы обоих типов — связанные и несвязанные. Последние представляют собой две и более замкнутых петель, не соединенных никакими линиями. Связанные диаграммы возникают, если при расписывании по теореме

Вика произвольного члена ряда для  $\langle \mathfrak{S} \rangle$ :

$$\frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/T} \dots \int_0^{1/T} d\tau_1 \dots d\tau_n \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1) \dots \hat{H}_{int}(\tau_n) \} \rangle \quad (15.2)$$

мы, начав спаривание с какого-нибудь оператора, входящего в  $\hat{H}_{int}(\tau_1)$ , вернемся обратно к  $\hat{H}_{int}(\tau_1)$ , не миновав при этом

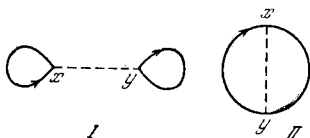


Рис. 49.

ни одного из  $\hat{H}_{int}$ . В любом другом случае мы имеем дело с несвязанной диаграммой.

Пусть несвязанная диаграмма  $n$ -го порядка состоит из  $k$  замкнутых петель. Предположим сначала, что все  $k$  петель содержат различное число вершин. Такой диаграмме отвечает выражение

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^n}{n!} \int d\tau_1^{(1)} \dots d\tau_{m_1}^{(1)} \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1^{(1)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{m_1}^{(1)}) \} \rangle_c \times \\ & \times \int d\tau_1^{(2)} \dots d\tau_{m_2}^{(2)} \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1^{(2)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{m_2}^{(2)}) \} \rangle_c \dots \\ & \dots \int d\tau_1^{(k)} \dots d\tau_{m_k}^{(k)} \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1^{(k)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{m_k}^{(k)}) \} \rangle_c, \quad (15.3) \end{aligned}$$

где

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n \quad (m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_k),$$

символ  $\langle \dots \rangle_c$  означает усреднение, соответствующее какой-нибудь определенной связанной диаграмме. Просуммируем теперь все топологически эквивалентные диаграммы, содержащие  $k$  петель выбранного нами типа. Для этого, очевидно, нужно просто умножить (15.3) на число таких диаграмм  $F_k$ . Последнее совпадает с числом способов, какими можно разместить  $n$  операторов  $\hat{H}_{int}$  по  $k$  различным «ящикам»  $\langle \dots \rangle_c$ , содержащим, соответственно,  $m_1, m_2, \dots, m_k$  мест, т. е.

$$F_k = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}.$$

В результате получим:

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{m_1}}{m_1!} \int d\tau_1^{(1)} \dots d\tau_{m_1}^{(1)} \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1^{(1)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{m_1}^{(1)}) \} \rangle_c \times \\ & \times \frac{(-1)^{m_2}}{m_2!} \int d\tau_1^{(2)} \dots d\tau_{m_2}^{(2)} \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1^{(2)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{m_2}^{(2)}) \} \rangle_c \dots \\ & \dots \frac{(-1)^{m_k}}{m_k!} \int d\tau_1^{(k)} \dots d\tau_{m_k}^{(k)} \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1^{(k)}) \dots \hat{H}_{int}(\tau_{m_k}^{(k)}) \} \rangle_c. \end{aligned} \quad (15.4)$$

Заметим, что, по существу, мы уже сразу могли бы отказаться от предположения о том, что каждое усреднение  $\langle \dots \rangle_c$  соответствует связанной диаграмме определенного типа, и считать просто, что  $\langle \dots \rangle_c$  представляет собой вообще сумму всех связанных диаграмм с данным числом вершин. Тем самым можно заключить, что сумма всех несвязанных диаграмм, содержащих  $k$  замкнутых петель, имеющих, соответственно,  $m_1, m_2, \dots, m_k$  вершин, имеет вид

$$\Xi_{m_1} \Xi_{m_2} \dots \Xi_{m_k},$$

где

$$\Xi_m = \frac{(-1)^m}{m!} \int d\tau_1 \dots d\tau_m \langle T_\tau \{ \hat{H}_{int}(\tau_1) \dots \hat{H}_{int}(\tau_m) \} \rangle_c \quad (15.5)$$

есть не что иное, как сумма всех связанных диаграмм порядка  $m$  для  $\langle \mathfrak{S} \rangle$ . Очевидно,

$$1 + \Xi_1 + \Xi_2 + \dots = \langle \mathfrak{S} \rangle_c. \quad (15.6)$$

Если среди чисел  $m_1, m_2, \dots$  имеются одинаковые, так что диаграмма распадается на  $p_1 + p_2 + \dots + p_k$  замкнутых петель, содержащих, соответственно,  $m_1, m_2, \dots, m_k$  ( $m_1 \neq \dots m_k$ ) вершин, то, как можно показать, выражение (15.5) следует заменить на <sup>1)</sup>

$$\frac{1}{p_1!} \Xi_{m_1}^{p_1} \frac{1}{p_2!} \Xi_{m_2}^{p_2} \dots \frac{1}{p_k!} \Xi_{m_k}^{p_k} \quad (15.7)$$

<sup>1)</sup> В справедливости сказанного можно убедиться следующим образом. В случае, когда среди чисел  $m_1, \dots, m_k$  имеются одинаковые, упомянутое выше число  $F_k$  совпадает с числом способов, которыми можно разместить  $p_1 m_1 + p_2 m_2 + \dots + p_k m_k = n$  операторов  $\hat{H}_{int}$  по  $p_1 + p_2 + \dots + p_k$  ящикам  $\langle \dots \rangle_c$ , содержащим  $m_1, m_2, \dots, m_k$  мест, причем, соответственно,  $p_1, p_2, \dots, p_k$  ящиков — одинаковые. Число  $F_k$  в этом случае равно

$$F_k = \frac{n!}{p_1! (m_1!)^{p_1} p_2! (m_2!)^{p_2} \dots p_k! (m_k!)^{p_k}}.$$

или, что то же самое, на

$$\frac{1}{p_1!} \Xi_1^{p_1} \frac{1}{p_2!} \Xi_2^{p_2} \dots \frac{1}{p_l!} \Xi_l^{p_l}, \quad (15.8)$$

где числа  $p_l$  ( $p_l = 0, 1, 2, \dots$ ) показывают, сколько замкнутых петель порядка  $l$  содержится во всей несвязанной диаграмме. Суммируя (15.8) по всем  $p_l$  (суммирование по различным  $p_l$ , очевидно, независимо), получим:

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{G} \rangle &= \sum_{p_1, p_2, \dots} \frac{1}{p_1!} \Xi_1^{p_1} \frac{1}{p_2!} \Xi_2^{p_2} \dots = \\ &= \sum_{p_1} \frac{1}{p_1!} \Xi_1^{p_1} \sum_{p_2} \frac{1}{p_2!} \Xi_2^{p_2} \dots = e^{\Xi_1} e^{\Xi_2} \dots = \\ &= \exp \{ \Xi_1 + \Xi_2 + \dots \}. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Подставляя, наконец, (15.9) в (15.1), имеем:

$$\Delta \Omega = -T(\Xi_1 + \Xi_2 + \dots) = -T \{ \langle \mathfrak{G} \rangle_c - 1 \}. \quad (15.10)$$

Мы получили, таким образом, весьма важный результат: для вычисления поправки к термодинамическому потенциалу достаточно вычислить вклад только связанных диаграмм в  $\langle \mathfrak{G} \rangle$ .

Как уже упоминалось, диаграммы для  $\langle \mathfrak{G} \rangle$  имеют вид замкнутых петель и их вычисление производится в основном по тем же правилам, что и вычисление  $\mathfrak{G}$ -функций. Единственное отличие состоит в коэффициенте перед диаграммой.

В § 12 мы отметили, что коэффициент  $\frac{1}{n!}$  в ряде теории возмущений для  $\mathfrak{G}$ -функций (12.13) сокращается, если учесть вклад всех топологически эквивалентных диаграмм, число которых было как раз равно  $n!$ . При вычислении  $\langle \mathfrak{G} \rangle_c$  положение меняется. Число эквивалентных диаграмм, даваемых  $n$ -м членом ряда (12.12), будет равно  $^1) (n-1)!$ , так что перед каждой диаграммой (если считать различными только топологически неэквивалентные диаграммы) появится

<sup>1)</sup> Все эквивалентные диаграммы получатся при всевозможных перестановках  $n-1$  операторов  $H_{int}$  в формуле (12.12). Один из операторов  $H_{int}$  следует считать фиксированным. В случае вычисления  $\mathfrak{G}$  фиксированными были начало и конец внешних линий, т. е. операторы  $\psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \tau_1)$ ,  $\bar{\psi}_\beta(\mathbf{r}_2, \tau_2)$  в (12.13).

множитель  $\frac{1}{n}$ . Наличие существенно зависящего от порядка  $n$  коэффициента делает ряд теории возмущений для  $\Omega$  очень неудобным, особенно в тех случаях, когда нельзя ограничиться конечным числом членов ряда, а приходится суммировать бесконечные последовательности диаграмм.

Приведем несколько примеров вычисления поправок  $\Delta\Omega$ , причем ограничимся для краткости случаем взаимодействия с фононами. Во втором порядке теории возмущений отлична от нуля только связанная диаграмма рис. 49, II. Вычисляя ее вклад по теореме Вика, получим для  $\Omega_2 = -T\Xi_2$  (пользуемся четырехмерными обозначениями):

$$\Omega_2 = \pm \frac{1}{2} Tg^2 \int d^4x d^4y \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x-y) \mathfrak{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(y-x) \mathfrak{D}^{(0)}(x-y).$$

Величина  $\Omega_2$  оказывается пропорциональной объему системы  $V$ , в чем легко убедиться, вводя в интеграле новую переменную  $x' = x - y$ . Такая же ситуация сохранится и в любом приближении, чего и следовало ожидать, поскольку, как известно, потенциал  $\Omega$  имеет вид

$$\Omega = -VP(\mu, T),$$

где  $P$  — давление, выраженное как функция химического потенциала и температуры. В дальнейшем поэтому мы всегда будем приводить формулы для

$$\Delta P (P = P_0(\mu, T) + \Delta P,$$

где  $P_0$  — давление в системе свободных частиц).

Для  $\Delta P_2$  имеем:

$$\Delta P_2 = \mp \frac{1}{2} g^2 \int d^4x \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(x) \mathfrak{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(-x) \mathfrak{D}^{(0)}(x). \quad (15.11)$$

Переходя к импульсному представлению, получаем:

$$\Delta P_2 = \mp \frac{1}{2} g^2 \frac{T^2}{(2\pi)^6} (2s+1) \sum_{\omega_1, \omega_2} \int dp dk \times \\ \times \frac{1}{i\omega_1 - \epsilon_0(p) + \mu} \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2) - \epsilon_0(p+k) + \mu} \frac{\omega_0^2(k)}{\omega_2^2 + \omega_0^2(k)}.$$

Соответствующая диаграмма изображена на рис. 50.

Рассмотрим произвольную диаграмму порядка  $2n$ . Такая диаграмма содержит  $3n$  линий и  $2n$  вершин. Однако один из  $2n$  законов сохранения выполняется тождественно, при условии выполнения остальных  $2n - 1$  законов. Таким образом, в диаграмме  $2n$ -го порядка имеется всего  $n + 1$  независимых интегрирований. Лишний закон сохранения приводит к появлению в диаграмме для  $\langle \mathfrak{S} \rangle$  дополнительного множителя  $\delta(\mathbf{p} = 0)$ , пропорционального объему системы  $V$ <sup>1)</sup>.

Правила, по которым отдельным элементам диаграммы сопоставляются гриновские функции (и вершинные части при

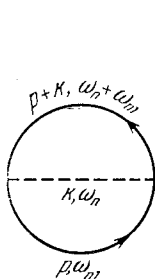


Рис. 50.

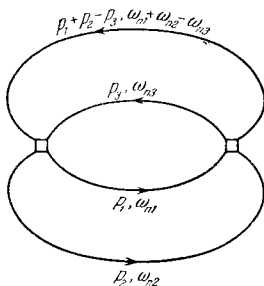


Рис. 51.

других взаимодействиях), остаются теми же, что в случае диаграммы для  $\mathfrak{S}$ . Коэффициент перед диаграммой порядка  $2n$  для поправки  $\Delta P$  равен

$$M_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} g^{2n} \left( \frac{T}{(2\pi)^3} \right)^{2n} (\mp 1)^F (2s + 1)^F,$$

где  $F$  — число замкнутых петель, образованных одними  $\mathfrak{S}$ -линиями частиц.

Приведем также выражения для  $\Delta P$  для случая парного взаимодействия. Для взаимодействия в форме (13.7) поправка второго порядка к давлению, отвечающая диаграмме рис. 51,

<sup>1)</sup> По определению,

$$\delta(\mathbf{p} = 0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{r} = \frac{V}{(2\pi)^3}.$$



имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \frac{T^3}{(2\pi)^9} \sum_{\omega_1 \omega_2 \omega_3} \int dp_1 dp_2 dp_3 \frac{1}{i\omega_1 - \varepsilon_0(p_1) + \mu} \frac{1}{i\omega_2 - \varepsilon_0(p_2) + \mu} \times \\
 & \times \frac{1}{i\omega_3 - \varepsilon(p_3) + \mu} \frac{1}{i(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3) - \varepsilon_0(p_1 + p_2 - p_3) + \mu} \times \\
 & \times \mathcal{J}_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{(0)}(p_1, p_2; p_1 + p_2 - p_3, p_3) \times \\
 & \times \mathcal{J}_{\gamma\delta; \beta\alpha}^{(0)}(p_1 + p_2 - p_3, p_3; p_2, p_1).
 \end{aligned}$$

## § 16. Уравнение Дайсона. Многочастичные функции Грина

**1. Уравнение Дайсона.** Как и при равной нулю температуре, в задачах статистики при  $T \neq 0$  почти никогда не удастся обойтись несколькими первыми членами ряда теории возмущений в качестве поправок к гриновским функциям. В условиях практически любой физически правильно поставленной задачи формальный параметр разложения диаграммной техники — гамильтониан взаимодействия  $\hat{H}_{int}$  — оказывается не мал, в связи с чем те или иные бесконечные последовательности членов ряда теории возмущений будут давать вклад одного порядка величины.

В предыдущей главе мы видели, что суммирование бесконечных рядов в технике теории поля производится диаграммным методом. В этом методе сумма ряда может быть изображена в виде диаграммы, элементы которой — линии и вершины — в свою очередь представляют собой суммы бесконечного числа диаграмм. Сопоставление элементам такой диаграммы определенных выражений производится по тем же правилам, что и для диаграмм теории возмущений. Это обстоятельство дает возможность строить различные уравнения для гриновских функций. В гл. II мы уже сталкивались с одним из таких уравнений — уравнением Дайсона, выражающим гриновскую функцию через массовый оператор системы.

Для построения таких уравнений существенны два свойства диаграммной техники: топологическая структура диаграмм и правила, по которым диаграмме сопоставляется определенное выражение. Диаграммы в технике при  $T=0$  и в технике Мацубары вообще одинаковы, правила же

сопоставления отличаются только тем, что интегрирование по частотам в первом случае заменяется суммированием по дискретным мнимым «частотам»  $i\omega_n$  во втором; точнее говоря, любое выражение для поправок к температурной гриновской функции  $\mathfrak{G}$ , соответствующее какой-нибудь диаграмме, может быть получено из выражения для поправки к гриновской функции  $G$  при  $T=0$ , отвечающей той же диаграмме,

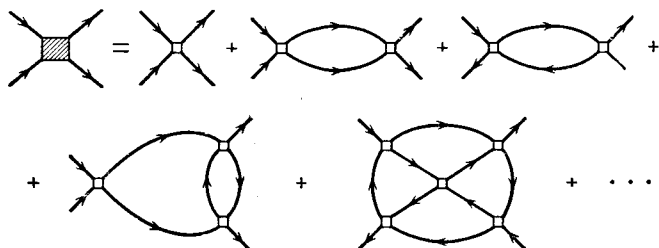


Рис. 52.

если в последнем заменить  $\omega$  на  $i\omega_n$ , а интеграл на суммы по формуле

$$\frac{1}{2\pi} \int d\omega \dots \rightarrow iT \sum_n \dots$$

(см. конец § 14).

Отмеченное выше обстоятельство позволяет непосредственно перенести, просто заменив обозначения, все результаты § 10 на случай  $T \neq 0$ . В частности, в технике Мацубары сохраняется уравнение Дайсона. Для системы частиц с парным взаимодействием оно имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(p) = & \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{(0)}(p) - \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_1} \int d\mathbf{p}_1 \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(p, p_1; p_1, p) \times \\ & \times \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(p) \mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_2}(p_1) \mathfrak{G}_{\gamma_4\beta}(p) + \frac{1}{2} \mathfrak{G}_{\alpha\gamma_1}^{(0)}(p) \frac{T^2}{(2\pi)^6} \sum_{\omega_1\omega_2} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \times \\ & \times \mathcal{J}_{\gamma_1\gamma_2;\gamma_3\gamma_4}^{(0)}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}(p_1) \mathfrak{G}_{\gamma_4\gamma_6}(p_2) \times \\ & \times \mathfrak{G}_{\gamma_7\gamma_2}(p_1 + p_2 - p) \mathcal{J}_{\gamma_5\gamma_6;\gamma_7\gamma_8}^{(0)}(p_1, p_2; p_1 + p_2 - p, p) \mathfrak{G}_{\gamma_8\beta}(p). \quad (16.1) \end{aligned}$$

Здесь  $\mathcal{J}$  — точная вершинная часть, имеющая тот же смысл, что и в технике при  $T=0$ . Она равна сумме всех компактных диаграмм с четырьмя внешними линиями, причем каждая линия изображает собой точную гриновскую функцию  $\mathfrak{G}$  (примеры таких диаграмм приведены на рис. 52).

Уравнение Дайсона (16.1) изображается графически так же, как и соответствующее уравнение в гл. II (рис. 53). Жирной линией обозначена  $\mathfrak{G}$ , светлой —  $\mathfrak{G}^{(0)}$ , а заштрихованным квадратом — вершинная часть  $\mathcal{J}$ .

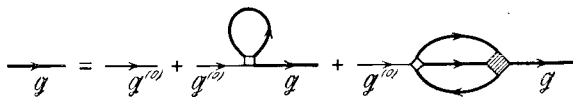


Рис. 53.

Если ввести  $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{-1}$ , обратную матрицу  $\mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ , то уравнение (16.1) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{-1}(p) = & (i\omega - \varepsilon(p) + \mu) \delta_{\alpha\beta} + \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_1} \int d\mathbf{p}_1 \times \\ & \times \mathcal{J}_{\alpha\gamma_1; \gamma_2\beta}^{(0)}(p, p_1; p_1, p) \mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_1}(p_1) - \frac{T^2}{2(2\pi)^6} \sum_{\omega_1\omega_2} \int d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 \times \\ & \times \mathcal{J}_{\alpha\gamma_1; \gamma_2\gamma_3}^{(0)}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \mathfrak{G}_{\gamma_2\gamma_4}(p_1) \mathfrak{G}_{\gamma_3\gamma_5}(p_2) \times \\ & \times \mathfrak{G}_{\gamma_6\gamma_1}(p_1 + p_2 - p) \mathcal{J}_{\gamma_4\gamma_5; \gamma_6\beta}(p_1, p_2; p_1 + p_2 - p; p). \end{aligned} \quad (16.2)$$

Аналогичным образом записывается система уравнений для  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{D}$  в случае взаимодействия с фононами (рис. 54):

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}^{-1}(\mathbf{p}, \omega_n) = & (i\omega_n - \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu) \delta_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{gT}{(2\pi)^3} \sum_{\omega'_n} \int d\mathbf{p}' \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}', \omega'_n) \mathfrak{D}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}, \omega'_n - \omega_n) \times \\ & \times \mathcal{J}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega_n, \omega'_n), \\ \mathfrak{D}^{-1}(\mathbf{k}, \omega_n) = & -\omega_0^{-2}(\mathbf{k}) (\omega_n^2 + \omega_0^2(\mathbf{k})) \mp \\ & \mp \frac{gT}{(2\pi)^3} \sum_{\omega'_n} \int d\mathbf{p}' \mathfrak{G}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}', \omega'_n) \mathfrak{G}_{\beta\alpha}(\mathbf{p}' - \mathbf{k}, \omega'_n - \omega_n) \times \\ & \times \mathcal{J}(\mathbf{p}', \mathbf{p}' - \mathbf{k}; \omega'_n, \omega'_n - \omega_n). \end{aligned} \quad (16.3)$$

Функция  $\mathcal{J}$  в (16.3) представляет собой полную вершинную часть. Она описывается суммой всех компактных диаграмм с двумя внешними линиями частиц и одной внешней фононной линией (рис. 55).

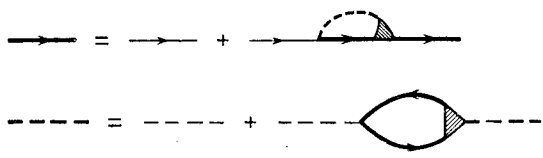


Рис. 54.

Как и при температуре абсолютного нуля, полные вершинные части при  $T \neq 0$  связаны определенными соотношениями с многочастичными температурными гриновскими функциями. Последние выражаются в технике Мацубары

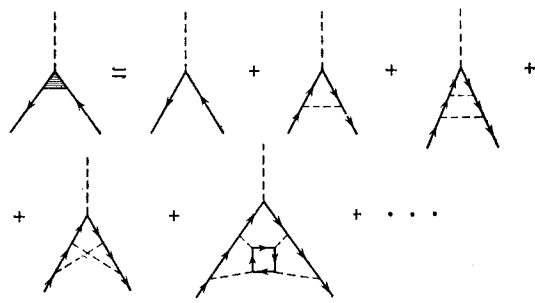


Рис. 55.

формулами (11.1) — (11.4), по виду в точности совпадающими с соответствующими выражениями при  $T=0$ . Учитывая также тождественность формулировок теоремы Вика в обоих случаях, мы немедленно приходим к выводу, что для вычисления многочастичных функций  $\mathcal{G}$  можно воспользоваться многохвостными диаграммами, сохранив при этом (в пространстве  $r, \tau$ ) все правила сопоставления, описанные в § 14. Для перехода к импульсному представлению полезно применить формальный прием.

Рассмотрим, например, двухчастичную гриновскую функцию

$$\mathfrak{G}_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{\Pi}(1, 2; 3, 4) = \langle T_{\tau} \{ \tilde{\psi}_{\alpha}(1) \tilde{\psi}_{\beta}(2) \tilde{\bar{\psi}}_{\gamma}(3) \tilde{\bar{\psi}}_{\delta}(4) \} \rangle \quad (16.4)$$

( $\tilde{\psi}$  — «гайзенберговские» операторы (11.3)); она зависит от четырех «времен»  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ , каждое из которых меняется от 0 до  $1/T$ . Продолжим (16.4) на область  $\tau_1$  от  $-1/T$  до 0, положив, что  $\mathfrak{G}^{\Pi}(1, 2; 3, 4)$  при  $\tau_1 < 0$  связана с ее значениями при  $\tau_1 > 0$  соотношением (11.8); аналогичное продолжение проводим и по  $\tau_2, \tau_3, \tau_4$ . Проводя теперь преобразование Фурье (14.2) по каждому из  $\tau$ , мы сразу убеждаемся, что частоты, соответствующие каждой «фермиевской» переменной (фермиевскому оператору в (16.4)), могут принимать только нечетные значения:  $(2n+1)\pi T$ , а частоты, соответствующие «бозевской» переменной — только «четные»  $2n\pi T$ .

Аналогичной процедуре продолжения можно подвергнуть, разумеется, любую многочастичную гриновскую функцию.

Как и в § 14, нетрудно проверить, что преобразование Фурье по  $\tau$  удастся совершить во всех членах ряда теории возмущений. Возникающие при этом правила сопоставления совпадают с правилами § 14 для одночастичной гриновской функции. Сохраняется также упомянутая в начале этого параграфа связь между диаграммными техниками при  $T=0$  и  $T \neq 0$ . Выражение для поправки к  $\mathfrak{G}^{\Pi}(1, 2; 3, 4)$  получается из выражения для  $G^{\Pi}(1, 2; 3, 4)$ , соответствующего той же диаграмме, при помощи упомянутой выше замены  $\omega \rightarrow i\omega_n, (2\pi)^{-1} \int d\omega \rightarrow iT \sum_n$ . Наличие такой связи позво-

ляет дословно повторить все написанные в § 10 о диаграммах для многочастичных функций. Ряд теории возмущений для  $\mathfrak{G}^{\Pi}(1, 2; 3, 4)$  может быть сведен к сумме всех компактных диаграмм, составленных только из жирных линий, отвечающих точной гриновской функции  $\mathfrak{G}(1, 2)$ . Эти диаграммы совпадают с диаграммами для полной вершинной части  $\mathcal{J}$ , откуда следует, что должно существовать соотношение

между  $\mathbb{G}^{\text{II}}(1, 2; 3, 4)$  и  $\mathcal{J}$ . Нетрудно убедиться, что оно имеет вид <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{\text{II}}(p_1, p_2; p_3, p_4) = & \frac{(2\pi)^3}{T} \left\{ \frac{(2\pi)^3}{T} \left[ \mathbb{G}_{\alpha\delta}(p_1) \mathbb{G}_{\beta\gamma}(p_2) \delta_{\omega_1\omega_4} \times \right. \right. \\ & \times \delta(p_1 - p_4) \mp \mathbb{G}_{\alpha\gamma}(p_1) \mathbb{G}_{\beta\delta}(p_2) \delta_{\omega_1\omega_3} \delta(p_1 - p_3) \left. \right] \pm \\ & \pm \mathbb{G}_{\alpha\lambda}(p_1) \mathbb{G}_{\beta\mu}(p_2) \mathcal{J}_{\lambda\mu; \nu\tau}(p_1, p_2; p_3, p_4) \mathbb{G}_{\nu\gamma}(p_3) \mathbb{G}_{\tau\delta}(p_4) \left. \right\} \times \\ & \times \delta_{\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4} \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (16.5) \end{aligned}$$

Вершинная часть  $\mathcal{J}(p_1, p_2)$  в случае взаимодействия с фононами связана с фурье-компонентами гриновской функции

$$\mathbb{G}_{\alpha\beta}(1, 2; 3) = \langle T_{\tau} \{ \tilde{\psi}_{\alpha}(1) \tilde{\tilde{\psi}}_{\beta}(2) \tilde{\varphi}(3) \} \rangle$$

соотношением

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{\alpha\beta}(p_1, p_2; k) = & \frac{(2\pi)^3}{T} \mathbb{G}_{\alpha\gamma}(p_1) \mathbb{G}_{\gamma\beta}(p_2) \mathfrak{D}(k) \times \\ & \times \mathcal{J}(p_1, p_1 + k) \delta(p_1 - p_2 + k) \delta_{\omega_1 - \omega_2 + \omega}. \quad (16.6) \end{aligned}$$

Как следовало ожидать, соотношения (16.5), (16.6) отличаются от соответствующих соотношений (10.17), (10.21) лишь численным коэффициентом.

Подчеркнем, что метод графического суммирования может применяться только к диаграммам для  $\mathbb{G}$ -функций. В рассмотренном в § 15 ряде теории возмущений для потенциала  $\Omega$  такого суммирования произвести нельзя из-за коэффициента  $\frac{1}{n}$ , стоящего перед диаграммой  $n$ -го порядка.

Диаграммы такого типа, очевидно, уже не будут распадаться на отдельные блоки, подобно диаграммам для  $\mathbb{G}$ , и результат суммирования какой-нибудь бесконечной последовательности диаграмм не сведется просто к замене светлых линий на жирные. В частности, совершенно незаконен графический процесс, показанный на рис. 56.

**2. Связь гриновских функций с термодинамическим потенциалом  $\Omega$ .** В заключение мы выведем ряд соотношений, связывающих термодинамический потенциал  $\Omega$  с темпе-

<sup>1)</sup> Коэффициенты в (16.5), (16.6) проще всего проверить, вычислив обе стороны равенства в первом порядке теории возмущений.

ратурными гриновскими функциями. Начнем со случая парного взаимодействия частиц. Введем вместо потенциала  $\mathcal{J}^{(0)}$

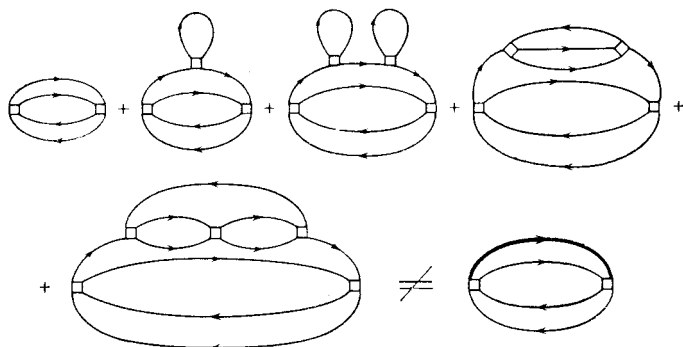


Рис. 56.

потенциал  $\lambda \mathcal{J}^{(0)}$  с  $0 < \lambda < 1$  и продифференцируем выражение для  $\Omega$

$$\Omega = \Omega_0 - T \ln \langle \mathfrak{S} \rangle$$

по  $\lambda$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = & \frac{T}{4} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 \mathcal{J}_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{(0)}(x_1, x_2; x_3, x_4) \times \\ & \times \langle T_\tau \{ \bar{\psi}_\alpha(x_1) \bar{\psi}_\beta(x_2) \psi_\delta(x_4) \psi_\gamma(x_3) \mathfrak{S}(\lambda) \} \rangle / \langle \mathfrak{S}(\lambda) \rangle \end{aligned}$$

или, согласно определению (16.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = & \frac{T}{4} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 \mathcal{J}_{\alpha\beta; \gamma\delta}^{(0)}(x_1, x_2; x_3, x_4) \times \\ & \times \mathfrak{G}_{\delta\gamma; \alpha\beta}^{\text{II}}(x_4, x_3; x_1, x_2). \end{aligned}$$

Проводя здесь преобразование Фурье и используя (16.5), получаем ( $\mathfrak{G}(p, \lambda)$  — гриновская функция при  $\lambda \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = & \frac{VT}{2\lambda(2\pi)^3} \sum_{\omega} \int dp \left\{ \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_1} \int dp_1 \times \right. \\ & \times \lambda \mathcal{J}_{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(p, p_1; p, p_1) \mathfrak{G}_{\gamma_3 \gamma_1}(p, \lambda) \mathfrak{G}_{\gamma_4 \gamma_2}(p_1, \lambda) \pm \\ & \pm \frac{T^2}{2(2\pi)^6} \sum_{\omega_1, \omega_2} \int dp_1 dp_2 \lambda \mathcal{J}_{\gamma_1 \gamma_2; \gamma_3 \gamma_4}^{(0)}(p, p_1 + p_2 - p; p_1, p_2) \times \\ & \times \mathfrak{G}_{\gamma_3 \gamma_6}(p_1, \lambda) \mathfrak{G}_{\gamma_4 \gamma_5}(p_2, \lambda) \mathfrak{G}_{\gamma_8 \gamma_2}(p_1 + p_2 - p, \lambda) \times \\ & \left. \times \mathcal{J}_{\gamma_5 \gamma_6; \gamma_7 \gamma_8}(p_2, p_1; p, p_1 + p_2 - p) \mathfrak{G}_{\gamma_7 \gamma_1}(p, \lambda) \right\}. \quad (16.7) \end{aligned}$$

Заметим, что выражение в фигурных скобках в (16.7) совпадает с правой частью уравнения Дайсона (16.1) с потенциалом взаимодействия  $\lambda \mathcal{J}^{(0)}$ , т. е.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \pm \frac{VT}{2\lambda (2\pi)^3} \sum_{\omega} \int d\mathbf{p} \mathbb{G}_{\alpha\beta}^{(0)-1}(\mathbf{p}) \{ \mathbb{G}_{\beta\alpha}(\mathbf{p}, \lambda) - \mathbb{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}) \}. \quad (16.8)$$

Интегрируя (16.8) по  $\lambda$  с учетом условия  $\Omega(\lambda=0) = \Omega_0$ , получаем интересующее нас соотношение

$$\Omega = \Omega_0 \pm \frac{i}{2} V \int_0^1 \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega} \int d\mathbf{p} \mathbb{G}_{\alpha\beta}^{(0)-1}(\mathbf{p}) \{ \mathbb{G}_{\beta\alpha}(\mathbf{p}, \lambda) - \mathbb{G}_{\beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}) \}. \quad (16.9)$$

В случае взаимодействия с фононами существуют аналогичные соотношения, выражающие  $\Omega$  через интеграл от  $\mathbb{G}$ -функции системы по заряду  $g$ . Вычисления, в точности совпадающие с проведенными нами при выводе (16.9), приводят к результату:

$$\begin{aligned} \Omega = \Omega_0 \pm V \int_0^g \frac{dg}{g} \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{p} (i\omega_n - \varepsilon(\mathbf{p}) + \mu) \times \\ \times (\mathbb{G}_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}, \omega_n) - \mathbb{G}_{\alpha\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}, \omega_n)) = \Omega_0 + V \int_0^g \frac{dg}{g} \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{k} \times \\ \times \frac{\omega_n^2 + \omega_0^2(\mathbf{k})}{\omega_0^2(\mathbf{k})} (\mathfrak{D}(\mathbf{k}, \omega_n) - \mathfrak{D}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega_n)). \quad (16.10) \end{aligned}$$

Другая полезная формула вытекает из известного соотношения, связывающего производную  $\Omega$  по массе частиц  $m$  с производной по  $m$  от полного гамильтониана системы  $\hat{H}$  (см. книгу Ландау и Лифшица [1]):

$$\left( \frac{\partial \Omega}{\partial m} \right)_{T, V, \mu} = \left\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial m} \right\rangle.$$

Поскольку

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial m} = \frac{1}{2m^2} \int \phi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \Delta \phi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$



то, согласно определению  $\mathfrak{G}$ -функции (11.1), мы сразу получаем:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = \pm \frac{1}{2m^2} \int [\Delta_r \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; -0)]_{r=r'} d\mathbf{r},$$

или в фурье-компонентах <sup>1)</sup>

$$\frac{\partial \Omega}{\partial m} = \mp \frac{VT}{m(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{p} \frac{p^2}{2m} \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}, \omega_n) e^{i\omega_n \tau}, \tau \rightarrow +0. \quad (16.11)$$

Пользуясь соотношениями (16.9) — (16.11) и соотношением (11.6), имеющим в фурье-компонентах вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -N = \mp \frac{VT}{(2\pi)^3} \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{p} \mathfrak{G}_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}, \omega_n) e^{i\omega_n \tau} \quad (\tau \rightarrow +0), \quad (16.12)$$

мы можем рассчитать производные от  $\Omega$  по различным параметрам. Эти соотношения выражают термодинамический потенциал  $\Omega$  через гриновские функции.

## § 17. Временные гриновские функции $G$ при конечных температурах. Аналитические свойства гриновских функций

Наряду с изученными нами температурными гриновскими функциями  $\mathfrak{G}$  при конечных температурах сохраняют свое значение и временные гриновские функции  $G$ , введенные в предыдущей главе. В дальнейшем на различных примерах будет показано, что последние определяют кинетические свойства системы, в частности, электросопротивление и комплексную диэлектрическую постоянную  $\epsilon$  как функцию частоты поля. Функции  $G$  описывают также процессы неупругого рассеяния частиц на конденсированных телах.

При отличных от нуля температурах одночастичную гриновскую функцию  $G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2)$  следует определить как

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2; E_n, N) = -i \langle E_n, N | T_t \{ \tilde{\Psi}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1) \tilde{\Psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}_2, t_2) \} | E_n, N \rangle, \quad (17.1)$$

<sup>1)</sup> В § 17 мы покажем, каким образом вычисляется входящая сюда сумма по  $\omega_n$ .

где  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\psi}^+$  — гайзенберговские операторы системы. Усреднение в (17.1) производится по состоянию системы с энергией  $E_N$  и числом частиц  $N$ . Определение (17.1) включает в себя как частный случай определение  $G$  при  $T=0$ , когда усреднение происходит по основному состоянию системы. Гриновская функция (17.1) зависит от полной энергии системы  $E$  и числа частиц в ней. В квантовой статистике удобнее рассматривать все величины как функции температуры и химического потенциала  $\mu$ , что эквивалентно переходу от микроканонического распределения к каноническому (см. [1]). Усредняя (17.1) по распределению Гиббса, мы получим:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2; T, \mu) &= \\ &= \sum_{N, n} e^{\frac{\Omega + \mu N - E_n}{T}} G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2, E_n, N) = \\ &= -i \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} T_t [\tilde{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1) \tilde{\psi}_\beta^+(\mathbf{r}_2, t_2)] \right\}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

Аналогичными формулами определяются многочастичные функции. Функция Грина фонона имеет вид

$$D(1, 2) = -i \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{\Omega - \hat{H}}{T}} T_t [\tilde{\varphi}(1) \tilde{\varphi}(2)] \right\} \quad (17.3)$$

и двухчастичная гриновская функция

$$G''(1, 2; 3, 4) = \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} T_t [\tilde{\psi}(1) \tilde{\psi}(2) \tilde{\psi}^+(3) \tilde{\psi}^+(4)] \right\}. \quad (17.4)$$

Фурье-компоненты гриновской функции  $G(\omega, \mathbf{p})$  удовлетворяют некоторому весьма общему соотношению (Ландау [32]). Для его вывода заметим, что временная зависимость матричных элементов гайзенберговских операторов  $\tilde{\psi}$ ,  $\tilde{\psi}^+$  дается выражением

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{nm}(\mathbf{r}, t) &= \psi_{nm}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{nm}t}, \\ \tilde{\psi}_{nm}^+(\mathbf{r}, t) &= \psi_{nm}^+(\mathbf{r}) e^{i\omega_{nm}t}, \\ \omega_{nm} &= E_n - E_m - \mu(N_n - N_m) \end{aligned} \quad (17.5)$$

(причем всегда  $N_n = N_m \pm 1$ ).

Координатная зависимость матричных элементов операторов  $\psi(\mathbf{r})$  в случае, если рассматриваемая система однородна и безгранична, в свою очередь имеет вид<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned}\psi_{nm}(\mathbf{r}) &= \psi_{nm}(0) e^{-i\mathbf{p}_{nm}\mathbf{r}}, \\ \psi_{nm}^+(\mathbf{r}) &= \psi_{nm}^+(0) e^{-i\mathbf{p}_{nm}\mathbf{r}}, \\ \mathbf{p}_{nm} &= \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m,\end{aligned}\quad (17.6)$$

где  $\mathbf{P}_n$ ,  $\mathbf{P}_m$  — импульсы системы в состояниях  $n$ ,  $m$ . Величины  $\psi_{nm}(0)$  и  $\psi_{nm}^+(0)$  в (17.6) уже от координат не зависят. Подставляя (17.5) и (17.6) в (17.1), мы получим:

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t > 0) &= -i \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} e^{i\omega_{nm}t - i\mathbf{p}_{nm}\mathbf{r}} (\psi_\alpha(0))_{nm} (\psi_\beta^+(0))_{mn}, \\ G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t < 0) &= \\ &= \pm i \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_m - E_m}{T}} e^{-i\omega_{mn}t + i\mathbf{p}_{mn}\mathbf{r}} (\psi_\alpha(0))_{nm} (\psi_\beta^+(0))_{mn}.\end{aligned}$$

Перейдем от пространственного представления функции Грина к ее компонентам Фурье:

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \int \int G(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r} + i\omega t} d\mathbf{r} dt.$$

Интегрирование по пространству дает  $\delta$ -функции от  $\mathbf{p} + \mathbf{p}_{nm}$ . Интегрирование по  $t$  производится отдельно по интервалам от  $-\infty$  до 0 и от 0 до  $\infty$ . При этом следует использовать известную формулу

$$\int_0^\infty e^{i\alpha x} dx = \pi\delta(\alpha) + \frac{i}{\alpha}.$$

Интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получаем ( $N_n = N_m - 1$ ):

$$\begin{aligned}(2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} (\psi_\alpha(0))_{nm} (\psi_\beta^+(0))_{mn} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_{nm}) \times \\ \times \left[ \frac{1}{\omega + \omega_{nm}} - i\pi\delta(\omega + \omega_{nm}) \right].\end{aligned}$$

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 81.

Интеграл по области  $t < 0$  дает:

$$\pm (2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_m - E_m}{T}} (\psi_\alpha(0))_{nm} (\psi_\beta^\dagger(0))_{mn} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}) \times \\ \times \left[ \frac{1}{\omega - \omega_{mn}} + i\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) \right],$$

откуда

$$G_{\alpha\beta}(\mathbf{p}, \omega) = - (2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} (\psi_\alpha(0))_{nm} (\psi_\beta^\dagger(0))_{mn} \times \\ \times \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}) \left\{ \frac{1}{\omega_{mn} - \omega} [1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}] + \right. \\ \left. + i\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) [1 \mp e^{-\omega_{mn}/T}] \right\}. \quad (17.7)$$

Ход дальнейших рассуждений связан с зависимостью  $G_{\alpha\beta}$  от спиновых переменных. Если система неферромагнитна, а только этот случай мы и будем рассматривать, то из соображений симметрии следует, что  $G_{\alpha\beta}$  должна быть пропорциональна единичному тензору  $\delta_{\alpha\beta}$ :

$$G_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} G, \quad (17.8)$$

$$G(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{2s+1} G_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}, \omega) = \\ = - (2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} \frac{1}{2s+1} \sum_{\alpha} |(\psi_\alpha(0))_{nm}|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\omega_{mn} - \omega} [1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}] + i\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) [1 \mp e^{-\omega_{mn}/T}] \right\}, \quad (17.9)$$

$s$  — спин частиц.

Сравнивая между собой два члена в фигурных скобках (17.9), мы убеждаемся, что между вещественной и мнимой частями гриновской функции,  $G'$  и  $G''$ , существует определенное соотношение (Ландау [32]). Именно, для случая статистики Ферми мы получаем:

$$G'(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{cth} \frac{x}{2T} \frac{G''(\mathbf{p}, x)}{x - \omega} dx, \quad (17.10)$$

где интеграл берется в смысле главного значения; для статистики Бозе имеем:

$$G'(\mathbf{p}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{th} \frac{x}{2T} \frac{G''(\mathbf{p}, x)}{x - \omega} dx. \quad (17.11)$$

Кроме того, из (17.9) следует, что для бозе-частиц  $G''$  всегда отрицательна. Напротив, мнимая часть  $G$ -функции ферми-системы меняет знак при  $\omega = 0$ ; она положительна при  $\omega < 0$  и отрицательна при  $\omega > 0$ .

Из соотношений (17.10) и (17.11) следует, что  $G$ , рассматриваемая как функция комплексной переменной  $\omega$ , не является аналитической. Функция  $G$ , однако, связана простыми формулами с двумя функциями —  $G^R$  и  $G^A$ , — аналитическими, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях переменной  $\omega$ . Функция  $G^R$  выражается через вещественную  $G'$  и мнимую  $G''$  части  $G$  как

$$G^R(\mathbf{p}, \omega) = G'(\mathbf{p}, \omega) + i \text{cth} \frac{\omega}{2T} G''(\mathbf{p}, \omega) \quad (17.12)$$

для случая ферми-частиц и

$$G^R(\mathbf{p}, \omega) = G'(\mathbf{p}, \omega) + i \text{th} \frac{\omega}{2T} G''(\mathbf{p}, \omega) \quad (17.13)$$

для бозе-частиц. Аналогично

$$G^A(\mathbf{p}, \omega) = G'(\mathbf{p}, \omega) - i \text{cth} \frac{\omega}{2T} G''(\mathbf{p}, \omega),$$

$$G^A(\mathbf{p}, \omega) = G'(\mathbf{p}, \omega) - i \text{th} \frac{\omega}{2T} G''(\mathbf{p}, \omega).$$

Функции  $G^R$  и  $G^A$  удовлетворяют дисперсионным соотношениям:

$$\text{Re } G^R(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } G^R(x)}{x - \omega} dx, \quad (17.14)$$

$$\text{Re } G^A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } G^A(x)}{x - \omega} dx,$$

откуда, согласно известной теореме теории функций комплексного переменного, и следует их аналитичность.

Нетрудно проверить, что  $G^R$  совпадает с так называемой запаздывающей функцией Грина:

$$G^R(1, 2) = \begin{cases} -i \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{\mathcal{Q} + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} (\tilde{\psi}(1) \tilde{\psi}^+(2) \pm \tilde{\psi}^+(2) \tilde{\psi}(1)) \right\}, & t_1 > t_2, \\ 0, & t_1 < t_2, \end{cases} \quad (17.15)$$

а  $G^A$  — с опережающей функцией:

$$G^A(1, 2) = \begin{cases} 0, & t_1 > t_2, \\ i \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{\mathcal{Q} + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} (\tilde{\psi}(1) \tilde{\psi}^+(2) \pm \tilde{\psi}^+(2) \tilde{\psi}(1)) \right\}, & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (17.16)$$

Действительно, проводя для (17.15) точно такие же вычисления, какие мы проделали для  $G$ , мы получим:

$$G^R(\mathbf{p}, \omega) = -(2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\mathcal{Q} + \mu N_n - E_n}{T}} |\psi_{nm}(0)|^2 (1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}) \times \\ \times \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}) \left\{ i\pi \delta(\omega - \omega_{mn}) - \frac{1}{\omega - \omega_{mn}} \right\}. \quad (17.17)$$

Функция (17.17) явно удовлетворяет соотношениям (17.14).

Формулу (17.17) для  $G^R$  (и аналогичную формулу для  $G^A$ ) можно представить в несколько ином виде:

$$G^R(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{p}, x)}{x - \omega - i\delta} dx, \\ G^A(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{p}, x)}{x - \omega + i\delta} dx; \quad \delta \rightarrow +0, \quad (17.18)$$

где  $\rho$  — вещественная функция

$$\rho(\mathbf{p}, \omega) = -(2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\mathcal{Q} + \mu N_n - E_n}{T}} |\psi_{nm}(0)|^2 \times \\ \times (1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}) \delta(\omega - \omega_{mn}). \quad (17.19)$$

Выражения типа (17.18) были впервые получены Леманом [27] применительно к гриновским функциям квантовой электродинамики. С их помощью можно, в частности, сделать заключение о поведении  $G^R$  и  $G^A$  при больших  $\omega$ .

Именно, замечая, что интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho dx$  конечен, находим:

$$G^R \approx G^A \approx -\frac{1}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \rho dx.$$

С другой стороны, мы можем вычислить интеграл от  $\rho$ , воспользовавшись определением  $G^R$  (17.15). Действительно, в силу правил коммутации гайзенберговских операторов при  $t_1 = t_2$  мы имеем:

$$G^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1 = t_2 + 0) = -i\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

$$G^R(\mathbf{p}; t_1 = t_2 + 0) = -i.$$

Выразим  $G^R(\mathbf{p}; t_1 = t_2 + 0)$  через  $G^R(\mathbf{p}, \omega)$ :

$$G^R(\mathbf{p}, t_1 = t_2 + 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega G^R(\mathbf{p}, \omega) e^{-i\omega\alpha}, \quad \alpha \rightarrow +0,$$

и подставим сюда выражение (17.18) для  $G^R$ :

$$-i = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x, \mathbf{p}) \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\alpha}}{x - \omega - i\delta} = i \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, \mathbf{p}) dx$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, \mathbf{p}) dx = -1. \quad (17.20)$$

Функции  $G^R$  и  $G^A$  ведут себя при больших  $\omega$ , как

$$G^R \approx G^A \approx \frac{1}{\omega}, \quad (17.21)$$

т. е. как соответствующие функции невзаимодействующих частиц.

Запаздывающие и опережающие функции удовлетворяют бесконечной системе зацепляющихся уравнений (Боголюбов и Тябликов [33]). Однако для их вычисления не существует диаграммной техники, подобной технике для температурных гриновских функций  $\mathfrak{G}$ . Поэтому представляет интерес установить связь между  $G^R$  и  $\mathfrak{G}$ . Для этого построим для  $\mathfrak{G}$  интегральное представление, аналогичное (17.18).

Используя определение (11.1), мы можем написать ( $\tau > 0$ ):

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}, \tau) = - \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} e^{i\omega_{nm}\tau - i\mathbf{p}_{nm}\mathbf{r}} |\psi_{nm}(0)|^2. \quad (17.22)$$

Переходя в (17.22) к фурье-компонентам по формуле

$$\mathfrak{G}(\mathbf{p}, \omega_k) = \int_0^{1/T} d\tau \int d\mathbf{r} e^{i\omega_k\tau - i\mathbf{p}\mathbf{r}} \mathfrak{G}(\mathbf{r}, \tau),$$

где  $\omega_k = (2k+1)\pi T$  для ферми-частиц и  $\omega_k = 2k\pi T$  для бозе-частиц, получаем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{p}, \omega_k) = & - (2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{\Omega + \mu N_n - E_n}{T}} |\psi_{nm}(0)|^2 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{mn}) \times \\ & \times \frac{1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}}{\omega_{mn} - i\omega_k}. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Функция (17.23) может быть представлена в виде<sup>1)</sup>

$$\mathfrak{G}(\mathbf{p}, \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{p}, x)}{x - i\omega_n} dx \quad (17.24)$$

с тем же самым  $\rho$ , что и в (17.19), откуда получается соотношение, связывающее  $\mathfrak{G}$  при  $\omega_n > 0$  с  $G^R(\omega)$ :

$$\mathfrak{G}(\omega_n) = G^R(i\omega_n), \quad \omega_n > 0. \quad (17.25)$$

С другой стороны, из (17.24) следует, что

$$\mathfrak{G}(\omega_n) = \mathfrak{G}^*(-\omega_n). \quad (17.26)$$

<sup>1)</sup> Может показаться, что в бозе-случае при  $\omega_n = 0$  интеграл (17.24) имеет особенность в точке  $x = 0$ . Однако из (17.19) следует, что в этом случае  $\rho \sim x$  при малых  $x$ .



Таким образом, зная аналитическую в верхней полуплоскости функцию  $G^R(\omega)$ , мы можем, пользуясь (17.25) и (17.26), построить температурную гриновскую функцию  $\mathfrak{G}$  для всех «частот»  $\omega_n$ .

Значительно больший интерес представляет, однако, обратная задача построения функции  $G^R$  по известной  $\mathfrak{G}$ . Вообразим себе, что нам известна  $\mathfrak{G}$  для всех частот  $\omega_n$  и что нам удалось построить аналитическую в верхней полуплоскости  $\omega$  функцию  $F(\omega)$ , обладающую свойствами:

$$F(i\omega_n) = \mathfrak{G}(\omega_n), \quad \omega_n > 0.$$

Тогда по известной теореме из теории функций комплексного переменного<sup>1)</sup> мы немедленно получили бы, что всюду в верхней полуплоскости  $F(\omega)$  совпадает с  $G^R(\omega)$ .

Итак, задача построения функции  $G^R(\omega)$  сводится к задаче аналитического продолжения  $\mathfrak{G}(\omega_n)$  с дискретного множества точек на всю верхнюю полуплоскость (Абрикосов, Горьков, Дзялошинский [30], Фрадкин [31]). Хотя такая задача и не имеет решения в общем виде, в различных конкретных случаях аналитическое продолжение может быть проведено. В следующих главах мы столкнемся с рядом примеров этого рода.

Зная запаздывающую функцию  $G^R(\omega)$ , можно, пользуясь соотношениями (17.12), найти гриновскую функцию  $G(\omega)$ . Как упоминалось в начале этого параграфа, гриновская функция  $G(\omega)$  определяет целый ряд кинетических свойств системы. Тем самым метод аналитического продолжения в технике температурных функций Грина позволяет выйти за рамки чисто статистической задачи вычисления термодинамического потенциала; по существу, одновременно с вычислением  $\Omega$  мы можем находить кинетические коэффициенты системы.

В принципе соотношения, аналогичные (17.24), могут быть получены и для многочастичных гриновских функций. Однако

---

<sup>1)</sup> Упомянутая теорема гласит, что две аналитические функции, принимающие одинаковые значения на бесконечной последовательности точек, имеющей предельную точку в области аналитичности, совпадают. В нашем случае такой последовательностью являются целочисленные точки  $i\omega_n$ , а предельной точкой будет служить бесконечно удаленная точка.

ввиду того, что они зависят от большого числа частот (например, от трех для двухчастичной функции), общие соотношения оказываются довольно громоздкими и неудобны для пользования. К тому же в большинстве практически важных случаев бывают нужны гриновские функции, у которых часть аргументов совпадает. Аналитические свойства таких функций не отличаются от таковых для одночастичных функций, и соотношения, связывающие температурные и временные величины, могут быть для них без труда установлены.

Рассмотрим, например, рассеяние медленных нейтронов в жидкости, которую для простоты будем предполагать состоящей из бесспиновых бозевских частиц. Взаимодействие медленного нейтрона с атомом жидкости, как известно, может быть описано при помощи точечного взаимодействия (см., например, [15]):

$$V(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = 2\pi \frac{m + m_n}{mm_n} a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}), \quad (17.27)$$

где  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{R}$  — радиус-векторы падающего нейтрона и атома жидкости,  $m_n$ ,  $m$  — соответственно, их массы,  $a$  — амплитуда рассеяния. Суммируя (17.27) по всем атомам жидкости, мы получим энергию взаимодействия медленного нейтрона с жидкостью

$$V(\mathbf{r}) = 2\pi \frac{m + m_n}{mm_n} a \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_k). \quad (17.28)$$

В представлении вторичного квантования для частиц жидкости  $V(\mathbf{r})$  имеет вид

$$V(\mathbf{r}) = 2\pi \frac{m + m_n}{mm_n} a \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}),$$

где  $\psi$ ,  $\psi^\dagger$  — операторы поля частиц жидкости в шредингеровском представлении.

Матричный элемент перехода при рассеянии нейтрона с передачей импульса  $\mathbf{q}$  пропорционален величине

$$a \int e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \langle l | \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) | f \rangle d\mathbf{r}$$

( $i$  — начальное,  $f$  — конечное состояния жидкости). Отсюда для дифференциального сечения рассеяния ( $\Delta$  — передача энергии) имеем:

$$d\sigma \sim a^2 \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \langle i | \psi^+(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1) | f \rangle \times \\ \times \langle f | \psi^+(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_2) | i \rangle \delta(E_i - E_f + \Delta).$$

Просуммируем это выражение по конечным состояниям  $f$  и затем усредним по начальным состояниям  $i$  по Гиббсу:

$$d\sigma \sim a^2 \sum_{i, f} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{\frac{\Omega + \mu N_i - E_i}{T}} \langle i | \psi^+(\mathbf{r}_1) \psi(\mathbf{r}_1) | f \rangle \times \\ \times \langle f | \psi^+(\mathbf{r}_2) \psi(\mathbf{r}_2) | i \rangle \delta(E_f - E_i - \Delta).$$

Подставляя, наконец, выражение (17.6) для операторов  $\psi(\mathbf{r})$ , получим окончательно:

$$d\sigma \sim a^2 (2\pi)^3 V \sum_{i, f} e^{\frac{\Omega + \mu N_i - E_i}{T}} |\langle i | \psi^+(0) \psi(0) | f \rangle|^2 \times \\ \times \delta(\mathbf{p}_{fi} - \mathbf{q}) \delta(\omega_{fi} - \Delta), \quad (17.29)$$

где  $V$  — объем системы,  $\omega_{fi} = E_f - E_i$ ,  $\mathbf{p}_{fi} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i$ .

Легко убедиться, что выражение (17.29) с точностью до множителя совпадает с мнимой частью фурье-компоненты функции

$$K(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) = \\ = -i \text{Sp} \left\{ e^{\frac{\Omega + \mu \hat{N} - \hat{H}}{T}} T_t \{ \tilde{\psi}^+(\mathbf{r}_1, t_1) \tilde{\psi}(\mathbf{r}_1, t_1) \tilde{\psi}^+(\mathbf{r}_2, t_2) \tilde{\psi}(\mathbf{r}_2, t_2) \} \right\},$$

а именно:

$$d\sigma \sim -V a^2 \frac{\text{Im } K(\mathbf{q}, \Delta)}{1 + e^{-\Delta/T}}. \quad (17.30)$$

Функция  $K$  есть двухчастичная гриновская функция с попарно совпадающими аргументами, ее аналитические свойства ничем не отличаются от аналитических свойств бозевской одночастичной гриновской функции  $G$ . Если по аналогии с  $G^R$  и  $\mathfrak{G}$  ввести функции  $K^R$  и  $\mathfrak{K}$ , то для последних можно дословно повторить все сказанное выше относительно функций  $G$ ,  $G^R$  и  $\mathfrak{G}$ ,

заменяя при этом во всех формулах от (17.1) до (17.21) операторы  $\psi(1)$ ,  $\psi^+(2)$ , соответственно, на  $\psi^+(1)\psi(1)$  и  $\psi^+(2)\psi(2)$ .

Таким образом, для вычисления  $d\sigma$  достаточно найти температурную гриновскую функцию  $\mathfrak{R}$  и построить ее аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость  $K^R$ . После этого сечение находится при помощи соотношения

$$d\sigma \sim -V a^2 \frac{\text{Im } K^R(q, \Delta)}{1 - e^{-\Delta/T}}. \quad (17.30')$$

В заключение мы покажем, как вычисляются суммы по  $\omega_n$  типа (16.12). Заметим, что при больших  $\omega_n$  функция  $\mathfrak{G}$  имеет вид

$$\mathfrak{G} \approx \frac{1}{i\omega_n} \quad (17.31)$$

(это сразу следует из (17.24) и (17.20)) и, стало быть, сумма

$$T \sum_{\omega_n} \mathfrak{G}(\omega_n) e^{-i\omega_n \tau} \quad (17.32)$$

при  $\tau = 0$  расходится. В действительности это означает, что, как видно из определения  $\mathfrak{G}(\tau)$ , последняя претерпевает разрыв при  $\tau = 0$ .

Будем считать  $\tau$  сколь угодно малым, но конечным. Тогда ряд (17.32) сходится. Учитывая (17.26), перепишем его в виде

$$2T \sum'_{\omega_n \geq 0} \cos \omega_n \tau \text{Re } \mathfrak{G}(\omega_n) + 2T \sum'_{\omega_n \geq 0} \sin \omega_n \tau \text{Im } \mathfrak{G}(\omega_n)$$

(штрих у знака суммы означает, что член  $\omega_n = 0$  берется с половинным весом). Ввиду того, что в силу (17.31)  $\text{Re } \mathfrak{G}$  при  $\omega_n \rightarrow \infty$  стремится к нулю быстрее, чем  $1/\omega_n$ , в первой сумме мы можем положить просто  $\tau = 0$ . Для вычисления второй суммы заметим, что в сумме по  $\omega_n$  основную роль играют  $\omega_n \tau \sim 1$ , т. е. при  $\tau \rightarrow 0$  большие  $\omega_n$ . Ввиду этого сумму по  $\omega_n$  можно заменить интегралом  $\left( T \sum \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int \right)$ ,

причем для  $\mathfrak{G}(\omega_n)$  следует, конечно, использовать ее асимптотическое значение (17.31). Имеем:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} 2T \sum'_{\omega_n \geq 0} \sin \omega_n \tau \operatorname{Im} \mathfrak{G}(\omega_n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau x}{x} dx = -\frac{1}{2} \operatorname{sign} \tau.$$

Таким образом, мы получаем следующее правило вычисления суммы (17.32):

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} T \sum_{\omega_n} \mathfrak{G}(\omega_n) e^{-i\omega_n \tau} = 2T \sum'_{\omega_n \geq 0} \operatorname{Re} \mathfrak{G}(\omega_n) - \frac{1}{2} \operatorname{sign} \tau. \quad (17.33)$$

# ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ<sup>1)</sup>

## § 18. Свойства вершинной части при малых передачах импульса. Нулевой звук<sup>2)</sup>

В настоящей главе мы, прежде всего, покажем, как методы квантовой теории поля позволяют обосновать положения общей теории ферми-жидкости. Мы рассмотрим для этой цели систему ферми-частиц с произвольными короткодействующими силами взаимодействия при  $T=0$ . Свойства гриновской функции в этом случае были рассмотрены в § 7. В частности, там было установлено, что возбуждениям типа «частиц» соответствует полюс функции  $G_R$  в нижней полуплоскости вблизи действительной положительной полуоси комплексной переменной  $\epsilon$ <sup>3)</sup>, а дыркам — полюс  $G_A$  в верхней полуплоскости вблизи полуоси  $\epsilon < 0$ . Поскольку обе эти функции получаются как аналитические продолжения  $G$ -функции с разных действительных полуосей переменной  $\epsilon$ , то можно утверждать, что в окрестности точки  $\epsilon=0$ ,  $|p|=p_0$  функция  $G$  имеет вид

$$G(p, \epsilon) = \frac{a}{\epsilon - v(|p| - p_0) + i\delta \operatorname{sign}(|p| - p_0)}, \quad (18.1)$$

где  $a$  — коэффициент, смысл которого был выяснен в § 7 (см. (7.40));  $\delta \rightarrow +0$ ;  $v(|p| - p_0)$  — разность  $\epsilon(p) - \mu$ ,

<sup>1)</sup> В этой главе нам будет удобно обозначать частотную переменную в гриновской функции буквой  $\epsilon$ .

<sup>2)</sup> Этот параграф в значительной степени основывается на результатах, полученных Л. Д. Ландау [34].

<sup>3)</sup> Для гриновских функций при заданном  $N$ , определенных в § 7, это соответствует  $\epsilon > \mu$ .

разложенная в окрестности  $|p| = p_0$  (напомним, что  $p_0$  определяется уравнением  $\varepsilon(p_0) = \mu$ ). Коэффициент разложения  $v$  есть скорость возбуждений на ферми-границе, равная  $p_0/m^*$ , где  $m^*$  — эффективная масса возбуждений.

Рассмотрим свойства вершинной части  $\Gamma$ . Эта функция наряду с  $G$  играет существенную роль в теории ферми-жидкости. Мы рассмотрим поведение вершинной части при  $p_1$ , близком к  $p_3$ , а  $p_2$  — к  $p_4$ . Введем обозначение

$$\Gamma(p_1, p_2; p_1 + k, p_2 - k) \equiv \Gamma(p_1, p_2, k), \quad (18.2)$$

где передача энергии-импульса  $k = (\mathbf{k}, \omega)$  — малый 4-вектор (т. е.  $|\mathbf{k}| \ll p_0$ ,  $|\omega| \ll \mu$ ). Рассмотрим простейшие диаграммы для такой вершинной части, изображенные на рис. 57. Выражения для этих диаграмм содержат интегралы от двух гриновских функций. В то время как для диаграмм а) и б)

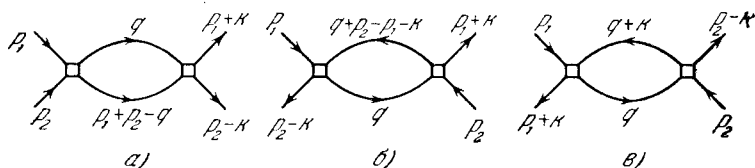


Рис. 57.

случай  $k = 0$  ничем не выделен, в случае в) полюсы обеих гриновских функций при  $k \rightarrow 0$  сближаются. Как мы увидим ниже, это приводит к появлению особенностей в  $\Gamma$ . Следует заметить, что хотя диаграммы на рис. 57 формально относятся к случаю парных сил, в действительности диаграмма типа в) остается выделенной при любых силах взаимодействия.

Обозначим через  $\Gamma^{(1)}$  совокупность всех возможных диаграмм для  $\Gamma$ , не содержащих «особых элементов» (линий  $G(p)G(p+k)$ ). Нетрудно видеть, что полная  $\Gamma$  получается с помощью суммирования «лестницы», изображенной на рис. 58, где вершинами являются функции  $\Gamma^{(1)}$  и все линии являются особыми. Такое суммирование можно выразить посредством интегрального уравнения

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2, k) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(p_1, p_2) - i \int \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\eta}^{(1)}(p_1, q) G(q) \times \\ \times G(q+k) \Gamma_{\eta\beta, \xi\delta}(q, p_2, k) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (18.3)$$

Ввиду того, что при  $k=0$  функция  $\Gamma^{(1)}$  не имеет особенности (короткодействующие силы), в ней положено  $k=0$ .

Рассмотрим теперь интеграл в (18.3). Он состоит из члена, происходящего от областей, удаленных от точки  $\epsilon=0$ ,  $|p|=p_0$ , и интеграла по окрестности этой точки, который определяет особенность всего выражения. Если  $k$  мало, то эта окрестность может быть взята очень малой, и в соответствующем интеграле существенным будет лишь обход полюсов  $G$ -функций. Ввиду близости аргументов обоих  $G$  можно считать, что все остальные величины под



Рис. 58.

интегралом медленно меняются с  $q$ . Вклад от полюсов возникает при этом лишь в том случае, если полюсы находятся по разные стороны от действительной оси. Для этого должно быть  $|q| < p_0$ ,  $|q+k| > p_0$  или наоборот. Принимая во внимание малость  $k$ , нетрудно видеть, что при этом  $|q| \approx p_0$  и  $\epsilon \approx 0$ . Таким образом, в той части интеграла по  $q$ , которая связана с обходом полюсов, произведение  $G(q)G(q+k)$  может быть заменено на  $A\delta(\epsilon)\delta(|q|-p_0)$ .

Коэффициент  $A$  может быть установлен с помощью интегрирования  $G(q)G(q+k)$  по  $\epsilon$  и  $|q|$ ; он равен

$$\frac{2\pi i a^2}{v} \frac{kv}{\omega - kv},$$

где  $v$  — вектор, направленный по  $q$  и равный  $v$  по абсолютной величине. Таким образом, произведение  $G(q)G(q+k)$  может быть записано в виде

$$G(q)G(q+k) = \frac{2\pi i a^2}{v} \frac{kv}{\omega - kv} \delta(\epsilon)\delta(|q|-p_0) + \varphi(q), \quad (18.4)$$

где  $\varphi(q)$  изображает регулярную часть произведения  $G(q)G(q+k)$ , которая существенна лишь в интеграле по далеким областям (поэтому в ней положено  $k=0$ ).

Предел выражения (18.4) при  $k, \omega \rightarrow 0$  существенно зависит от того, каково соотношение между  $\omega$  и  $k$ . Это же относится к  $\Gamma$  в пределе  $\omega \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ .



Рассмотрим, прежде всего,  $\Gamma$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\frac{|k|}{\omega} \rightarrow 0$ .

Для этого предела, который мы обозначим как  $\Gamma^\omega$ , получаем из (18.3) и (18.4):

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(p_1, p_2) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(p_1, p_2) - i \int \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\eta}^{(1)}(p_1, q) \varphi(q) \times \\ \times \Gamma_{\eta\beta, \xi\delta}^\omega(q, p_2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (18.5)$$

Из двух уравнений (18.3) и (18.5) можно исключить  $\Gamma^{(1)}$ . Для этого условно запишем эти уравнения в операторной форме (под произведением подразумевается интеграл):

$$\Gamma^\omega = \Gamma^{(1)} - i\Gamma^{(1)}\varphi\Gamma^\omega, \\ \Gamma = \Gamma^{(1)} - i\Gamma^{(1)}(i\Phi + \varphi)\Gamma. \quad (18.6)$$

Здесь  $i\Phi$  означает первый член в (18.4). Из первого уравнения получаем:

$$\Gamma^\omega = (1 + i\Gamma^{(1)}\varphi)^{-1} \Gamma^{(1)}.$$

Во втором из уравнений (18.6) перенесем член с  $\varphi$  налево и применим операцию  $(1 + i\Gamma^{(1)}\varphi)^{-1}$ . После этого получаем:

$$\Gamma = \Gamma^\omega + \Gamma^\omega\Phi\Gamma.$$

Записывая это соотношение в явном виде, находим:

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2, k) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(p_1, p_2) + \frac{a^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\eta}^\omega(p_1, q) \times \\ \times \Gamma_{\eta\beta, \xi\delta}(q, p_2) \frac{v k}{\omega - v k} d\Omega. \quad (18.7)$$

Возьмем теперь другой предел, а именно  $|k| \rightarrow 0$ ,  $\frac{\omega}{|k|} \rightarrow 0$ . Эту величину мы обозначим через  $\Gamma^k$ . Из уравнения (18.7) находим связь между  $\Gamma^k$  и  $\Gamma^\omega$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^k(p_1, p_2) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^\omega(p_1, p_2) - \frac{p_0^2 a^2}{v(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\eta}^\omega(p_1, q) \times \\ \times \Gamma_{\eta\beta, \xi\delta}^k(q, p_2) d\Omega. \quad (18.8)$$

Исследуем полюсы функции  $\Gamma(p_1, p_2, k)$  при малых  $k$  и  $\omega$ . Ввиду того, что в окрестности полюса  $\Gamma(p_1, p_2; k) \gg \Gamma^\omega(p_1, p_2)$ , можно пренебречь членом  $\Gamma^\omega$  в правой части уравнения (18.7). Далее, можно заметить, что переменная  $p_2$ , а также индексы  $\beta$  и  $\delta$  играют в уравнении роль параметров. Поэтому функция  $\Gamma$  около полюса может быть представлена в виде произведения двух функций  $\chi_{\alpha\gamma}(p_1; k) \chi'_{\beta\delta}(p_2; k)$ . После этого  $\chi'_{\beta\delta}(p_2; k)$  сокращается в обеих сторонах уравнения (18.7). Введем обозначение

$$v_{\alpha\gamma}(n) = \frac{nk}{\omega - vnk} \chi_{\alpha\gamma}(p_1; k),$$

где  $n$  — единичный вектор в направлении  $p_1$ . Для  $v_{\alpha\gamma}$  получается уравнение

$$(\omega - vnk) v_{\alpha\gamma}(n) = nk \frac{p_0^2 a^2}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\alpha\xi, \gamma\eta}^\omega(n, l) v_{\eta\xi}(l) d\Omega. \quad (18.9)$$

Соотношение (18.9) совпадает по форме с уравнением для нулевого звука и спиновых волн (см. § 2, формула (2.24)). В следующем параграфе мы покажем, что это является вполне закономерным, так как полюсы  $\Gamma$  определяют спектр звуковых возбуждений ферми-жидкости.

Величина  $a^2 \Gamma^\omega$  играет в уравнении (18.9) роль функции  $f$ , введенной в теории ферми-жидкости (§ 2). Сама по себе эта величина не имеет непосредственного физического смысла. Однако благодаря соотношению (18.8) она связана с функцией  $a^2 \Gamma^k$ . Как мы сейчас покажем, эту величину можно с точностью до постоянного множителя интерпретировать как амплитуду рассеяния двух квазичастиц с  $|p_1| = |p_2| = p_0$  на нулевой угол.

Рассмотрим вспомогательную задачу о рассеянии двух частиц в вакууме. Пусть в момент времени  $t = -\infty$  волновая функция этой системы равна  $a_{p_3\gamma}^+ a_{p_4\delta}^+ \Phi_0$ , где  $\Phi_0$  — волновая функция вакуума. При  $t = \infty$  система перейдет в состояние  $S(\infty) a_{p_3\gamma}^+ a_{p_4\delta}^+ \Phi_0$ . Амплитуда рассеяния с переходом частиц в состояния  $p_1\alpha, p_2\beta$  пропорциональна

$$-i \langle a_{p_1\alpha} a_{p_2\beta} S(\infty) a_{p_3\gamma}^+ a_{p_4\delta}^+ \rangle_0, \quad (18.10)$$

где  $\langle \dots \rangle_0$  означает усреднение по вакууму. Оператор  $S(\infty)$

определяется формулой (8.8), т. е., будучи разложенным в ряд по  $H_{int}$ , представляет собой сумму интегралов от  $T$ -произведений операторов  $\psi$ .

Согласно формуле (8.10), каждое из таких  $T$ -произведений может быть представлено в виде совокупности  $N$ -произведений. Очевидно, что в нашем матричном элементе будут существенны только те члены, которые содержат  $N$ -произведения от четырех  $\psi$ -операторов со всеми возможными связями. Поскольку связи представляют собой просто числа, то они не принимают участия в усреднении. В данном случае имеются две частицы, а потому

$$N(\psi^+(x_3)\psi^+(x_4)\psi(x_1)\psi(x_2)) = \psi^+(x_3)\psi^+(x_4)\psi(x_1)\psi(x_2).$$

При усреднении по вакууму матричного элемента (18.10) это  $N$ -произведение дает множитель

$$\exp \left\{ i(r_1 p_1 + r_2 p_2 - r_3 p_3 - r_4 p_4) - \right. \\ \left. - i(\varepsilon_0(p_1)t_1 + \varepsilon_0(p_2)t_2 - \varepsilon_0(p_3)t_3 - \varepsilon_0(p_4)t_4) \right\}.$$

В выражении (18.10) этот множитель интегрируется по координатам вместе с выражением, содержащим только связи. В результате мы получаем совокупность всех диаграмм с четырьмя вершинами, причем энергия и импульс каждого конца связаны соотношением  $\varepsilon = \varepsilon_0(p)$ .

Такая величина соответствует последнему члену введенной ранее двухчастичной функции Грина (10.17) без концевых  $G^{(0)}$ -функций. В рассматриваемой задаче о рассеянии двух частиц в вакууме эти  $G^{(0)}$ -функции совпадают с полными  $G$ -функциями. Действительно, согласно формуле (7.3),

$$G^{(0)}(r, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0.$$

В то же время в любой диаграмме для поправок к  $G$  всегда найдется хотя бы одна пара линий, направленных в противоположные стороны<sup>1)</sup> (т. е. одно  $G^{(0)}$  при  $t > 0$  и одно  $G^{(0)}$  при  $t < 0$ ), благодаря чему любая поправка к  $G^{(0)}$  равна нулю.

<sup>1)</sup> Исключение представляют диаграммы типа рис. 4, а, но как уже было отмечено в § 8, в таких диаграммах  $G^{(0)}(0)$  надо рассматривать как предел  $\lim_{t \rightarrow +0} G^{(0)}(-t)$ , который в данном случае равен нулю.

По той же причине из диаграмм для вершинной части останутся только такие, в которых все линии  $G^{(0)}$  идут в одну сторону, т. е. только диаграммы типа рис. 57, а.

Из всего этого следует, что амплитуда рассеяния (18.10) равна<sup>1)</sup>  $\Gamma'_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2, p_3 p_4)|_{\varepsilon_i = \varepsilon_0(p_i)}$ , где  $\Gamma'$  — вершинная часть для рассматриваемой задачи.

Формула (9.17), выражающая связь между двухчастичной функцией Грина и вершинной частью, в данном случае принимает вид

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta}^{II'}(p_1 p_2; p_3 p_4) = G^{(0)}(p_1) G^{(0)}(p_2) (2\pi)^4 \times \\ \times [\delta(p_1 - p_3) \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta(p_1 - p_4) \delta_{\beta\gamma} \delta_{\alpha\delta}] + \\ + i G^{(0)}(p_1) G^{(0)}(p_2) G^{(0)}(p_3) G^{(0)}(p_4) \Gamma'_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2; p_3 p_4). \quad (18.11)$$

Импульсы в этой формуле связаны законами сохранения. Величину  $G^{II'}$  можно рассматривать как гриновскую функцию двух частиц (отсюда и происходит ее название). Первое слагаемое в формуле (18.11) соответствует свободному движению частиц, а второе — рассеянию их друг на друге.

Перейдем к ферми-жидкости. Сравним формулы (10.17) и (18.11). В области малых  $\varepsilon$  и  $|\mathbf{p}|$ , близких к  $p_0$ , согласно (18.1), гриновские функции по форме очень близки к функциям свободных частиц. Для того чтобы функцию  $G^{II'}$  можно было рассматривать как гриновскую функцию двух взаимодействующих квазичастиц, ее надо разделить на  $a^2$ . При этом свободный член будет иметь в точности такую нормировку, как для реальных частиц с энергией  $\varepsilon(\mathbf{p})$ .

Второй член в (10.17) соответствует рассеянию квазичастиц. Сравнивая его с выражением для реальных частиц, мы приходим к выводу, что величина

$$a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2; p_3 p_4)|_{\varepsilon_i = \varepsilon(p_i) - \mu} \quad (18.12)$$

играет роль амплитуды рассеяния квазичастиц.

В частности, если  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p_0$ , то все  $\varepsilon_i = 0$ . Амплитуда рассеяния с малой передачей импульса при этом

<sup>1)</sup> Во всех формулах мы опускаем постоянный множитель, сравнение с теорией возмущений (см. гл. I) показывает, что он равен  $4\pi/m$ .

равна  $a^2\Gamma(p_1 p_2, k)$  с  $\omega = 0$ , а амплитуда рассеяния на нулевой угол есть  $a^2\Gamma^k$ .

Соотношение (18.8), связывающее  $a^2\Gamma^k$  с функцией  $f = a^2\Gamma^\omega$ , может быть разрешено, если считать, что взаимодействие частиц, зависящее от их спинов, имеет чисто обменное происхождение. При этом мы можем записать  $a^2\Gamma^k$  в виде

$$\frac{p_0^2}{\pi^2 v} a^2\Gamma^k = A(n_1, n_2) + B(n_1, n_2) \sigma_1 \sigma_2, \quad (18.13)$$

а величину  $\frac{p_0^2}{\pi^2 v} f = F$  согласно (2.28). Уравнение для  $\Phi$  и  $Z$  (см. (2.28)) разделяются:

$$\begin{aligned} A(n_1, n_2) &= \Phi(n_1, n_2) - \int \Phi(n_1, n') A(n', n_2) \frac{d\Omega}{4\pi}, \\ B(n_1, n_2) &= Z(n_1, n_2) - \int Z(n_1, n') B(n', n_2) \frac{d\Omega}{4\pi}. \end{aligned} \quad (18.14)$$

В изотропной жидкости все величины на ферми-поверхности зависят только от  $\cos(\widehat{n_1 n_2}) = \cos \chi$ . Разложим их по полиномам Лежандра, например,  $A(\chi) = \sum A_l P_l(\cos \chi)$ . После этого сразу получаются соотношения между коэффициентами разложения:

$$A_l = \frac{\Phi_l}{1 + \frac{\Phi_l}{2l+1}}, \quad B_l = \frac{Z_l}{1 + \frac{Z_l}{2l+1}}. \quad (18.15)$$

## § 19. Эффективная масса. Связь граничного импульса с числом частиц<sup>1)</sup>. Бозевские ветви спектра. Теплоемкость

**1. Вспомогательные соотношения.** Прежде всего, получим несколько полезных соотношений для функции  $G$ . Предположим, что наша система находится в бесконечно малом поле  $\delta U(t)$ , однородном по пространству и слабо меняющемся со временем. Соответствующий гамильтониан взаимодействия имеет вид  $H_{int} = \int \psi_a^+(r) \delta U(t) \psi_a(r) dr$ . Если

<sup>1)</sup> Эти результаты получены Л. Д. Ландау и Л. П. Питаевским и частично опубликованы в [35].

перейти к представлению взаимодействия по отношению к  $H_{int}$ , то, разлагая  $G$ -функцию в ряд по  $\delta U$  с точностью до членов первого порядка, получаем:

$$\delta G_{\alpha\beta}(x, x') = - \int d^4y \delta U(t_y) \{ \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\gamma^+(y) \tilde{\psi}_\gamma(y) \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle - \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle \langle \tilde{\psi}_\gamma^+(y) \tilde{\psi}_\gamma(y) \rangle \}.$$

Здесь  $\tilde{\psi}$  — гайзенберговские операторы взаимодействующих частиц в отсутствие поля  $\delta U$ . Воспользовавшись формулой (10.17), получаем:

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha\beta}(x, x') &= \delta_{\alpha\beta} \int d^4y \delta U(t_y) G(x-y) G(y-x') - \\ &- i \int d^4y d^4x_1 \dots d^4x_4 \delta U(t_y) G(x-x_1) G(y-x_2) \times \\ &\times G(x_3-x') G(x_4-y) \Gamma_{\alpha\gamma; \beta\gamma}(x_1, x_2; x_3, x_4). \end{aligned}$$

Переходя к фурье-компонентам, имеем:

$$\begin{aligned} \delta G_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} G(p) \delta U(\omega) G(p+k_1) - i G(p) G(p+k_1) \times \\ &\times \int \Gamma_{\alpha\gamma; \beta\gamma}(p, q; k_1) G(q) \delta U(\omega) G(q+k_1) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}, \end{aligned}$$

где  $k_1 = (0, \omega)$ .

Ввиду того, что поле  $\delta U$  не влияет на спин частиц,  $\delta G_{\alpha\beta}$  должно быть пропорционально  $\delta_{\alpha\beta}$ . Взяв  $\frac{1}{2} \text{Sp}$ , получаем:

$$\begin{aligned} \delta G &= G(p) \delta U G(p+k_1) - i G(p) G(p+k_1) \times \\ &\times \frac{1}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta; \alpha\beta}(p, q; k_1) G(q) \delta U(\omega) G(q+k_1) \frac{d^4q}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

С другой стороны, если добавить в гамильтониан член

$$\delta U(t) \int \psi_\alpha^+(r) \psi_\alpha(r) dr = \delta U(t) \hat{N},$$

то в пределе  $\delta U \rightarrow \text{const}$  функция  $G$  просто умножится на  $e^{-i\delta U(t-t')}$ , что соответствует добавлению к  $\varepsilon$  члена  $-\delta U$ .

Таким образом, в пределе  $\omega \rightarrow 0$   $\frac{\delta G}{\delta U} \rightarrow -\frac{\delta G}{\delta \varepsilon}$ . Таким образом, находим:

$$\frac{\delta G}{\delta \varepsilon} = - \{G^2(p)\}_\omega \left[ 1 - \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta; \alpha\beta}^\omega(p, q) \{G^2(q)\}_\omega \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \right],$$

где  $\{G^2(p)\}_\omega = \varphi$  (см. (18.4)) означает предел  $G(p)G(p+k_1)$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Рассмотрим это соотношение вблизи полюса  $G(p)$ . В этом случае  $G(p)$  можно записать в форме (18.1). Поделив на  $-\{G^2(p)\}_\omega$ , получаем первое соотношение

$$\frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial \varepsilon} = \frac{1}{a} = 1 - \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega(p, q) \{G^2(q)\}_\omega \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (19.1)$$

Второе соотношение мы получим следующим образом. Допустим, что частицы обладают бесконечно малым зарядом  $\delta e$  и система помещена в слабо неоднородное по пространству и постоянное во времени магнитное поле. В гамильтониане к оператору импульса добавляется в этом случае член  $-\frac{\delta e}{c} \mathbf{A}$ . Если заряд  $\delta e$  очень мал, то изменение гамильтониана выражается членом  $-\frac{\delta e}{mc} \int \psi_\alpha^+(r) \hat{\mathbf{p}} \mathbf{A}(r) \psi_\alpha(r) dV$ , где  $\hat{\mathbf{p}}$  — оператор импульса. Изменение гриновской функции при этом получается так же, как и раньше:

$$\begin{aligned} \delta G = & -G(p) \frac{\delta e}{mc} (\mathbf{p} \mathbf{A}) G(p+k_2) + \frac{i}{2} G(p) G(p+k_2) \times \\ & \times \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}(p, q; k_2) G(q) \frac{\delta e}{mc} (q \mathbf{A}) G(q+k_2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \end{aligned}$$

где  $k_2 = (\mathbf{k}, 0)$  (мы считаем здесь  $\mathbf{k}$  малым). С другой стороны, в пределе  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  из градиентной инвариантности следует, что все функции, зависящие от импульса, должны перейти в функции от  $\mathbf{p} - \frac{\delta e}{c} \mathbf{A}$ . Таким образом, при  $\mathbf{k} \rightarrow 0$

$$\frac{\delta G}{\delta e \frac{\mathbf{A}}{c}} = -\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}.$$

Следовательно, в пределе  $\delta e \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{k} \rightarrow 0$  получаем для  $G(p)$  вблизи полюса второе соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mathbf{p}} = & -\frac{\mathbf{v}}{a} = -\frac{\mathbf{p}}{m^* a} = \\ = & -\frac{\mathbf{p}}{m} + \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^k(p, q) \frac{\mathbf{q}}{m} \{G^2(q)\}_k \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (19.2) \end{aligned}$$

Третье соотношение мы получим, рассматривая изменение  $G$ -функции в случае, когда система движется как целое с малой и медленно меняющейся скоростью  $\delta \mathbf{u}(t)$ .

Изменение гамильтониана системы заключается в добавлении члена

$$-\delta u \hat{P} = -\delta u \int \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{p} \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

где  $\hat{P}$  — оператор полного импульса системы. Изменение  $G$ -функции выражается следующим образом:

$$\delta G = -G(p) p \delta u(\omega) G(p + k_1) + \\ + \frac{i}{2} G(p) G(p + k_1) \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}(p, q; k_1) q \delta u(\omega) G(q) G(q + k_1) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4},$$

где  $k_1 = (0, \omega)$ . С другой стороны, при  $\omega = 0$  это преобразование означает переход в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью  $\delta u$ . Согласно формулам Галилея, энергия системы должна в этом случае измениться на величину  $-\delta u P$ . При этом частота  $\varepsilon$  заменяется на  $\varepsilon + \delta u p$ , и, следовательно, функция Грина изменится на величину  $\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} p \delta u$ .

Таким образом, в пределе  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\delta u \rightarrow 0$  вблизи полюса получаем:

$$p \frac{\partial G^{-1}}{\partial \varepsilon} = \frac{p}{a} = p - \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^{\omega}(p, q) q \{ G^2(q) \}_{\omega} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (19.3)$$

Наконец, последнее соотношение получается, если рассмотреть изменение  $G$ -функции под влиянием малого постоянного во времени поля  $\delta U(\mathbf{r})$ , слегка неоднородного в пространстве. Изменение  $G$  в этом случае равно

$$\delta G = G(p) \delta U(k) G(p + k_2) - \\ - \frac{i}{2} G(p) G(p + k_2) \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}(p, q; k_2) G(q) \delta U(k) G(q + k_2) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4},$$

где  $k_2 = (k, 0)$ .

С другой стороны, в постоянном внешнем поле должно выполняться условие равновесия

$$\mu + \delta U = \text{const.}$$

В пределе  $k \rightarrow 0$  химический потенциал меняется на малую константу  $-\delta U$ .



Таким образом, при  $k \rightarrow 0$ ,  $\delta U \rightarrow 0$  получаем:

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu} = 1 - \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^k(p, q) \{G^2(q)\}_k \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (19.4)$$

Эта формула справедлива при произвольных импульсах.

**2. Доказательство основных соотношений теории ферми-жидкости.** С помощью формул (19.1)—(19.4) и формулы (18.8), связывающей  $\Gamma^k$  с  $\Gamma^\omega$ , можно вывести основные соотношения теории ферми-жидкости. Отметим здесь кстати, что формула (18.8) годится для  $\Gamma$  с произвольными импульсами  $p_1$  и  $p_2$ , совсем не обязательно лежащими вблизи ферми-поверхности.

Начнем с того, что подставим соотношение (18.8) в формулу (19.2). При этом получим:

$$\begin{aligned} -\frac{p}{m^*a} + \frac{p}{m} &= \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega(p, q) \frac{q}{m} \{G^2(q)\}_k \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} - \\ &- \frac{1}{2} \frac{p_0^2 a^2}{(2\pi)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega(p, q) \left(-\frac{q}{m^*a} + \frac{q}{m}\right) d\Omega. \end{aligned}$$

Из формулы (18.4) следует:

$$\{G^2(p)\}_k = \{G^2(p)\}_\omega - \frac{2\pi i a^2}{v} \delta(\epsilon) \delta(|p| - p_0). \quad (19.5)$$

Подставим это в первый интеграл предыдущего соотношения и воспользуемся формулой (19.3). После сокращений получаем при  $|p| = p_0$ ,  $\epsilon = 0$ :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_0}{2(2\pi)^3} \int a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega(\chi) \cos \chi d\Omega. \quad (19.6)$$

Нетрудно видеть, что эта формула совпадает с (2.12), причем  $a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega = \text{Sp}_{\sigma\sigma'} f(\chi, \sigma, \sigma')$ .

Докажем формулу (2.1). Рассмотрим выражение (18.1) для функции  $G$  вблизи полюса, т. е. при  $|p| \rightarrow p_0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ . В этом выражении коэффициенты  $a$ ,  $v$  и импульс  $p_0$  зависят от химического потенциала  $\mu$ . Продифференцируем  $G$  по  $\mu$ . Легко видеть, что члены, происходящие от дифференцирования  $a$  и  $v$  по  $\mu$ , вблизи полюса малы ( $\sim (|p| - p_0)/\mu$ ).

или  $\epsilon/\mu$ ) по сравнению с членом, происходящим от дифференцирования  $p_0$ . Таким образом, получаем:

$$\frac{\partial G}{\partial \mu} \approx -G^2 \frac{v}{a} \frac{dp_0}{d\mu}.$$

Отсюда

$$v \frac{dp_0}{d\mu} = a \left( \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu} \right)_{\epsilon=0} \quad |p| = p_0.$$

Подставим сюда формулу (19.4) и выразим  $\Gamma^k$  по формуле (18.8). Это даст:

$$\begin{aligned} \frac{v}{a} \frac{dp_0}{d\mu} = 1 - \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^{\omega}(p, q) \{G^2(q)\}_k \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} - \\ - \frac{1}{2} \frac{p_0^2 a^2}{(2\pi)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^{\omega}(p, q) \left( \frac{v}{a} \frac{dp_0}{d\mu} - 1 \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\{G^2\}_k$ , согласно (19.5), и воспользовавшись формулой (19.1), находим после некоторых сокращений

$$v \frac{dp_0}{d\mu} = \left( 1 + \frac{p_0^2}{2(2\pi)^3 v} \int a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^{\omega}(p, q) d\Omega \right)^{-1}. \quad (19.7)$$

Полное число частиц в системе определяется формулой (7.37). Продифференцируем это соотношение по  $\mu$ . Это дает<sup>1)</sup>:

$$\frac{d(N/V)}{d\mu} = -2i \int \frac{\partial G(p)}{\partial \mu} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = 2i \int \frac{\partial G^{-1}(p)}{\partial \mu} \{G^2(p)\}_k \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Подставим сюда формулу (19.4) и выразим  $\Gamma^k$  через  $\Gamma^{\omega}$  с помощью (18.8). При этом получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d(N/V)}{d\mu} = 2i \int \{G^2(p)\}_k \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \\ + \int \{G^2(p)\}_k \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^{\omega}(p, q) \{G^2(q)\}_k \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} - \\ - \frac{i p_0^2 a^2}{(2\pi)^3 v} \int \{G^2(p)\}_k \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^{\omega}(p, q) \left( \frac{v}{a} \frac{dp_0}{d\mu} - 1 \right) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d\Omega. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Мы здесь для краткости опускаем под интегралом множитель  $e^{i\epsilon t}$  ( $t \rightarrow +0$ ).

Подставим сюда формулу (19.5) и воспользуемся соотношением (19.1). В результате находим:

$$\begin{aligned} \frac{d(N/V)}{d\mu} = & 2i \int \{G^2(p)\}_\omega \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \int \{G^2(p)\}_\omega \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega(p, q) \times \\ & \times \{G^2(q)\}_\omega \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + \frac{8\pi a p_0^2}{(2\pi)^3 v} - \frac{8\pi p_0^2(a-1)}{(2\pi)^3 v} v \frac{dp_0}{d\mu} - \\ & - 8\pi \left[ \frac{p_0^2 a^2}{(2\pi)^3 v} \right]^2 \frac{1}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}^\omega(p, q) d\Omega \frac{v}{a} \frac{dp_0}{d\mu}. \end{aligned}$$

Согласно соотношению (19.1), первые два члена в правой части этого соотношения есть не что иное, как

$$-2i \int \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} = -2i \int [G(\varepsilon = \infty) - G(\varepsilon = -\infty)] \frac{dp}{(2\pi)^4},$$

но это выражение равно нулю, так как, согласно формуле (7.11),  $G$  обращается в нуль при  $\varepsilon \rightarrow \pm\infty$ . Это очевидно и из того факта, что написанное выражение равно изменению числа частиц в системе при изменении начала отсчета энергии.

В последнем из оставшихся членов мы выразим  $\int a^2 \Gamma^\omega d\Omega$  согласно (19.7). При этом получаем:

$$\frac{d(N/V)}{d\mu} = \frac{8\pi p_0^2}{(2\pi)^3} \frac{dp_0}{d\mu}. \quad (19.8)$$

Ниже показано, что это соотношение можно проинтегрировать по  $\mu$ . Окончательно получим:

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \frac{p_0^3}{(2\pi)^3}.$$

Формула (19.7) дает возможность проверить выражение (2.19) для скорости звука. Для этого достаточно заметить, что благодаря формуле (19.8) соотношение (19.7) совпадает с формулой (2.18).

**3. Бозевские ветви спектра.** Рассмотрим теперь вопрос о звуковых возбуждениях. Для этой цели мы произведем анализ, аналогичный формулам (7.32)–(7.33). Рассмотрим, как меняется со временем состояние системы, которое

в момент времени  $t = t'$  описывается функцией

$$\Psi_0(t') = \sum_{p, \alpha} \psi_{p\alpha}(t') \psi_{p+k\alpha}^+(t') \Phi_i(t'). \quad (19.9)$$

Здесь  $|k| \ll p_0$ ;  $\psi_{p\alpha}$  — операторы частицы с импульсом  $p$  в представлении взаимодействия. Прodelывая все операции в той же последовательности, что и в (7.32)—(7.33), получаем амплитуду вероятности

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0^*(t) \Psi(t) \rangle &= \frac{1}{V^2} \sum_{p_1 p_2 \alpha \beta} \langle \tilde{\psi}_{p_2 \beta}(t) \tilde{\psi}_{p_2 - k \beta}^+(t) \tilde{\psi}_{p_1 \alpha}(t') \tilde{\psi}_{p_1 + k \alpha}^+(t') \rangle = \\ &= - \int G_{\alpha \beta, \alpha \beta}^{\text{II}}(p_1, t', p_2, t; p_1 + k, t', p_2 - k, t) \frac{d p_1}{(2\pi)^3} \frac{d p_2}{(2\pi)^3} = \\ &= - \int G_{\alpha \beta, \alpha \beta}^{\text{II}}(p_1, p_2; p_1 + k, p_2 - k) \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}, \\ &\quad k = (k, \omega). \end{aligned}$$

Подставим сюда формулу (10.17) для  $G^{\text{II}}$ . При этом получаем:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_0(t) \Psi(t) \rangle &= \int \left[ 2 \int G(p) G(p+k) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} - \right. \\ &\quad \left. - i \int G(p_1) G(p_1+k) \Gamma_{\alpha \beta, \alpha \beta}(p_1, p_2; k) \times \right. \\ &\quad \left. \times G(p_2) G(p_2-k) \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \right] e^{-i\omega(t-t')} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (19.10) \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках (мы обозначим его символом  $ia \Pi$ ), может быть преобразовано с помощью формул (18.4), (18.7) и (19.1). Целью этих преобразований является исключение членов, содержащих интегрирование вдали от  $\epsilon = 0$ ,  $|p| = p_0$ . Это делается в том же духе, что и все выводы, проделанные ранее в настоящем параграфе.

Вершинная часть  $\Gamma$  с помощью (18.7) выражается через  $\Gamma^\omega$ , а интеграл типа  $\int \Gamma^\omega \varphi$  заменяется согласно формуле (19.1).

В результате функция  $\Pi$  оказывается равной

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{2p_0^2}{(2\pi)^3 v} \int \frac{k v}{\omega - k v} d\Omega + \left( \frac{p_0^2}{(2\pi)^3 v} \right)^2 \int \frac{k v_1}{\omega - k v_1} \times \\ &\quad \times a^2 \Gamma_{\alpha \beta, \alpha \beta}(p_1, p_2; k) \frac{k v_2}{\omega - k v_2} d\Omega_1 d\Omega_2. \end{aligned}$$

Путем непосредственной проверки легко убедиться в том, что величина  $\Pi$  может быть записана в виде  $\frac{p_0^2}{(2\pi)^3 v} \int \Pi_{1\alpha\alpha} d\Omega$ , где  $\Pi_{1\alpha\gamma}$  удовлетворяет уравнению

$$(\omega - kv) \Pi_{1\alpha\gamma}(\omega, k, n) - \frac{p_0^2(kv)}{(2\pi)^3 v} \frac{1}{2} \int a^2 \Gamma_{\gamma\eta, \alpha\xi}^\omega(n, n') \times \\ \times \Pi_{1\eta\xi}(\omega, k, n') d\Omega' = (kv) \delta_{\alpha\gamma}. \quad (19.11)$$

Как и в § 7, из формулы (19.10) следует, что значение  $\langle \Psi_0^*(t) \Psi(t) \rangle$  при  $t \rightarrow \infty$  определяется полюсами функции  $\Pi$  по комплексной переменной  $\omega$ , лежащими в нижней полуплоскости. Уравнение для полюсов получается из (19.11), если отбросить правую часть. Сравнивая полученное уравнение с (18.9), мы видим, что величина  $\Pi_1$  соответствует  $\chi$ . Поскольку нас интересует не  $\Pi_1$ , а  $\text{Sp}_\pm \int \Pi_1 d\Omega$ , то из всех решений уравнения (18.9) рассматривается только изотропное в плоскости, перпендикулярной к вектору  $k$ . Выбирая иные функции  $\Psi_0(t)$ , мы можем таким же образом получить уравнения для всех компонент (как по углам, так и по спинам) величины  $\chi_{\alpha\gamma}$ .

Итак, было показано, что в ферми-жидкости могут существовать возбуждения, спектр которых определяется полюсами функции  $\Gamma$ , т. е. уравнением (18.9). Эти возбуждения подчиняются статистике Бозе, так как им соответствуют операторы, билинейные по фермиевским операторам (см. (19.9)). Как было показано в § 2, такого рода возбуждения представляют собой различные ветви спектра нулевого звука. Тем самым определяется физический смысл полюсов функции  $\Gamma$  в области малых передач энергии и импульса и доказывается тождество уравнений (18.9) и (2.24).

Из формул (19.9) следует, что звуковые возбуждения можно рассматривать как связанную пару из квазичастицы и дырки с близкими значениями импульсов.

**4. Другой вывод связи граничного импульса  $p_0$  с числом частиц<sup>1)</sup>.** Здесь мы изложим другой вывод соотношения (2.1). Этот вывод дает непосредственно формулу (2.1), а не дифференциальное соотношение (19.8).

<sup>1)</sup> В этом разделе использованы результаты работ Люттингера и Уорда [35а].

Запишем формулу (7.37) для плотности в следующем виде:

$$\frac{N}{V} = 2i \int \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln G(p) - G(p) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Sigma(p) \right] e^{i\varepsilon t} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}, \quad (19.12)$$

где  $t \rightarrow +0$ , а  $\Sigma$  — полная неприводимая собственно энергетическая часть ( $G = (\varepsilon - \xi - \Sigma)^{-1}$ ). Покажем, что интеграл от второго члена в квадратной скобке обращается в нуль. Для этого, прежде всего, продемонстрируем, что  $\Sigma(p)$  можно рассматривать как вариационную производную по  $G(p)$  от некоторого функционала относительно  $G$ , т. е.

$$\delta X = \int \Sigma(p) \delta G(p) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (19.13)$$

Вычислим вариационную производную  $\frac{\delta \Sigma(p)}{\delta G(q)}$ , для чего рассмотрим диаграммы, составляющие  $\Sigma$ , и в каждой диаграмме последовательно проварьируем все  $G$ -линии. Возьмем, например, собственно энергетическую часть на рис. 10, в. Если в ней последовательно выделить каждую из трех  $G$ -линий и каждый раз обозначать частоту и импульс, соответствующие этой  $G$ -линии, через  $\varepsilon_q$ ,  $q$ , то нетрудно видеть, что результат будет равен произведению этой  $G$ -функции на сумму двух диаграмм, которые представляют собой просто второе приближение к вершинной части  $\Gamma(p, q)$  с нулевой передачей энергии-импульса. Применяя эту процедуру ко всем диаграммам, составляющим  $\Sigma$ , получаем:

$$\delta \Sigma(p) = -\frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}(p, q) \delta G(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\delta \Sigma(p)}{\delta G(q)} = -\frac{i}{2} \Gamma_{\alpha\beta, \alpha\beta}(p, q). \quad (19.14)$$

Эта величина симметрична относительно перестановки  $p \leftrightarrow q$ , что, как известно, является достаточным условием существования функционала  $X$ .

Функционал  $X$  может быть представлен в виде совокупности диаграмм, включающих только полные  $G$ -линии. Из формулы (19.13) видно, что эти диаграммы получаются из диаграмм для  $\Sigma$  (скелетные диаграммы с полными  $G$ -линиями), если каждую диаграмму «замкнуть» полной  $G$ -линией. Для

того чтобы формула (19.13) получалась с правильной нормировкой, надо ввести численный коэффициент, зависящий от типа диаграммы (например, если имеется взаимодействие только одного типа, коэффициент равен  $\frac{1}{n}$ , где  $n$  — число вершин).

Диаграммы, составляющие  $X$ , не меняются, если все частоты в  $G$ -линиях сдвинуть на малую величину  $\delta\epsilon^{(0)}$ , так как пределы интегрирования по частотам суть  $(-\infty, +\infty)$ , а  $\delta$ -функции, стоящие в вершинах, содержат одинаковое количество  $\epsilon_i$  со знаком «плюс» и со знаком «минус». Отсюда получаем:

$$\frac{\delta X}{\delta\epsilon^{(0)}} = \int \Sigma(p) \frac{\partial G(p)}{\partial\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = 0.$$

Вернемся к выражению (19.12). Интеграл от второго члена в квадратной скобке можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -2i \int G(p) \frac{\partial}{\partial\epsilon} \Sigma(p) e^{ist} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} = \\ & = -2i \int G(p) \Sigma(p) \frac{dp}{(2\pi)^4} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2i \int \Sigma(p) \frac{\partial G(p)}{\partial\epsilon} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое здесь равно нулю. Что же касается первого слагаемого, то, согласно формуле (7.21), при  $\epsilon \rightarrow \infty$   $G(p, \epsilon) \approx G^{(0)}(p, \epsilon) \approx \frac{1}{\epsilon}$ , т. е.  $\Sigma(p)$  не может расти пропорционально  $\epsilon$  и  $G(p) \Sigma(p) \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Таким образом, мы доказали, что интеграл от второго члена в (19.12) равен нулю. Следовательно,

$$\frac{N}{V} = 2i \int \frac{\partial}{\partial\epsilon} \ln G(p) e^{ist} \frac{d^4p}{(2\pi)^4}. \quad (19.15)$$

Как уже отмечено в § 7,  $G$ -функция не является аналитической, однако функция  $G_R(\epsilon)$ , равная  $G(\epsilon)$  при  $\epsilon > 0$  и  $G^*(\epsilon)$  при  $\epsilon < 0$ , аналитична в верхней полуплоскости. Можно показать также, что функция  $G_R$  в верхней

полуплоскости не имеет нулей<sup>1)</sup>. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= 2i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln G_R(p) e^{i\varepsilon t} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} + 2i \int_{-\infty}^0 \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \frac{G(p)}{G^*(p)} = \\ &= 2i \int_{-\infty}^0 \frac{d\varepsilon}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \ln \frac{G(p)}{G^*(p)} = \frac{2i}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \frac{G(p)}{G^*(p)} \Big|_{-\infty}^0 \end{aligned}$$

(в интеграле с  $G_R$  контур можно сдвинуть в область  $\text{Im } \varepsilon = \infty$ , после чего интеграл обращается в нуль).

Если обозначить фазу  $G$ -функции через  $\varphi$ , то

$$\frac{N}{V} = -\frac{2}{\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\varphi(0) - \varphi(-\infty)].$$

Рассмотрим, как меняется фаза  $G$ -функции при переходе от  $\varepsilon = 0$  до  $\varepsilon = -\infty$ . Как известно из § 7, при  $\varepsilon < 0$   $\text{Im } G > 0$ , причем в точке  $\varepsilon = 0$   $\text{Im } G = 0$ . При  $\varepsilon \rightarrow -\infty$   $\text{Im } G$  убывает быстрее  $\text{Re } G$ , причем  $\text{Re } G \approx \frac{1}{\varepsilon} < 0$ . Ввиду того, что  $\text{Im } G$  имеет определенный знак, точка, соответствующая значениям  $\text{Im } G$  и  $\text{Re } G$  при заданном  $\varepsilon$  в комплексной плоскости  $G$ , перемещается только в верхней полуплоскости, т. е. фаза может меняться только от 0 до  $\pi$ . Поскольку при  $\varepsilon \rightarrow -\infty$   $\frac{\text{Im } G}{\text{Re } G} \rightarrow -0$ , то  $\varphi(-\infty) = \pi$ . Значение фазы при  $\varepsilon = 0$  определяется знаком  $\text{Re } G(0, \mathbf{p}) \equiv G(0, \mathbf{p})$ . Если  $G(0, \mathbf{p}) > 0$ , то  $\varphi(0) = 0$ . Если же  $G(0, \mathbf{p}) < 0$ , то  $\varphi(0) = \pi$ .

Таким образом, из формулы (19.15) получаем:

$$\frac{N}{V} = 2 \int_{G(0, \mathbf{p}) > 0} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (19.16)$$

Область  $G(0, \mathbf{p}) > 0$  ограничена некоторой поверхностью, на которой функция  $G$  обращается либо в нуль, либо в бесконечность. Обращение  $G(0, \mathbf{p})$  в нуль ( $\Sigma \rightarrow \infty$ ), по-видимому, соответствует сверхпроводимости (см. § 34). Что же касается обращения  $G(0, \mathbf{p})$  в бесконечность, то это имеет место у обычной ферми-жидкости и осуществляется на поверхности Ферми.

<sup>1)</sup> Это доказывается так же, как и отсутствие нулей комплексной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\omega)$  в верхней полуплоскости переменной  $\omega$  (см. [45], § 62).



В окрестности поверхности Ферми (в данном случае ферми-сферы  $|\mathbf{p}| = p_0$ )  $G(0, \mathbf{p}) = -\frac{a}{\xi}$ , где  $a > 0$ , т. е. область  $G(0, \mathbf{p}) > 0$  соответствует  $\xi < 0$  (внутренности ферми-сферы). Взяв интеграл в (19.16), получаем формулу (2.1).

**5. Теплоемкость.** До сих пор мы рассматривали ферми-жидкость при  $T = 0$ . Представляет интерес исследовать свойства ферми-жидкости и при отличной от нуля температуре. Довольно естественно ожидать, что в случае низких температур все величины будут определяться значениями основных характеристик ферми-жидкости при  $T = 0$ . Мы продемонстрируем это на примере вычисления теплоемкости. Метод выделения температурной добавки, применяемый для этой цели, может оказаться полезным и в других расчетах.

Мы будем исходить из выражения (16.12) для полного числа частиц в системе как функции  $\mu$  и  $T$ :

$$\frac{N(\mu, T)}{V} = 2T \sum_{\epsilon} \int_{\tau \rightarrow +0} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(\epsilon, \mathbf{p}) e^{i\epsilon\tau}. \quad (19.17)$$

Знание этой функции дает возможность определить энтропию с помощью термодинамического соотношения

$$\left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_{\mu} = \left( \frac{\partial S}{\partial \mu} \right)_T. \quad (19.18)$$

Рассмотрим  $\mathfrak{G}$ -функцию, стоящую в формуле для  $N$ . Если учесть, что это — полная  $\mathfrak{G}$ -функция, получающаяся в результате сложения всевозможных диаграмм, содержащих суммы по частотам, то становится ясным, что  $\mathfrak{G}(\epsilon, \mathbf{p})$  зависит от температуры не только через дискретную переменную  $\epsilon = \pi T(2n + 1)$ . Поэтому мы будем обозначать ее здесь как  $\mathfrak{G}(T; \epsilon, \mathbf{p})$ . Как известно из гл. III, функция  $\mathfrak{G}$  связана с собственно энергетической частью  $\Sigma$  соотношением

$$\mathfrak{G}^{-1}(T; \epsilon, \mathbf{p}) = \mathfrak{G}^{(0)-1}(\epsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(T; \epsilon, \mathbf{p}). \quad (19.19)$$

Отметим, что функция  $\mathfrak{G}^{(0)}(\epsilon, \mathbf{p})$  зависит от температуры только посредством  $\epsilon$ . Пусть теперь  $T \rightarrow 0$ , но при этом  $\epsilon = \text{const}$ . Тогда соотношение (19.19) приобретает вид

$$\mathfrak{G}^{-1}(0; \epsilon, \mathbf{p}) = \mathfrak{G}^{(0)-1}(\epsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(0; \epsilon, \mathbf{p}). \quad (19.20)$$

Из соотношений (19.19) и (19.20) находим:

$$\mathfrak{G}^{-1}(T; \varepsilon, \mathbf{p}) = \mathfrak{G}^{-1}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) - [\Sigma(T; \varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(0; \varepsilon, \mathbf{p})]. \quad (19.21)$$

Величина  $\Sigma(0; \varepsilon, \mathbf{p})$  отличается от  $\Sigma(T; \varepsilon, \mathbf{p})$  тем, что в ней все суммы по частотам заменены интегралами, согласно формуле

$$T \sum_{\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon.$$

Разность  $\Sigma(T) - \Sigma(0)$  при низких температурах можно найти следующим образом. Рассмотрим две одинаковые диаграммы для  $\Sigma(T)$  и  $\Sigma(0)$ , скажем,  $\Sigma_1(T)$  и  $\Sigma_1(0)$ . При вычислении разности  $\Sigma_1(T) - \Sigma_1(0)$  в первом приближении будут существенны такие области частот, в которых какая-то одна из  $\mathfrak{G}$ -линий имеет частоту порядка  $T$ , а все остальные имеют гораздо большие частоты. Случай, когда две частоты являются малыми, имеет малый статистический вес и приводит к членам более высокого порядка. Ввиду этого можно выделить  $\mathfrak{G}$ -линию с малой частотой, а во всех остальных местах суммы заменить интегралами. В таком особом положении может находиться каждая из  $\mathfrak{G}$ -линий, входящих в диаграмму  $\Sigma_1$ .

Таким образом, нам необходимо проварьировать диаграмму  $\Sigma_1$  по всем входящим в нее линиям  $\mathfrak{G}$ . Вычисление здесь совершенно аналогично тому, что было проделано в предыдущем параграфе.

Применяя эту процедуру ко всем диаграммам, составляющим  $\Sigma$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma(T; \varepsilon, \mathbf{p}) - \Sigma(0; \varepsilon, \mathbf{p}) &\approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left[ T \sum_{\varepsilon_1} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon_1 \right] \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(0; \varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \mathfrak{G}(0; \varepsilon_1, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (19.22)$$

Отсюда, согласно (19.21), получаем первое приближение для  $\mathfrak{G}(T)$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(T; \varepsilon, \mathbf{p}) &= \mathfrak{G}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) + \frac{1}{2} \mathfrak{G}^2(0; \varepsilon, \mathbf{p}) \times \\ &\times \left[ T \sum_{\varepsilon_1} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon_1 \right] \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(0; \varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \mathfrak{G}(0; \varepsilon_1, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Подставим это выражение в (19.17) и вычтем отсюда  $\frac{1}{V} N(\mu, 0)$ . Очевидно, что с точностью до членов первого порядка мы можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} [N(\mu, T) - N(\mu, 0)] &= 2 \left[ T \sum_{\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \right] \mathfrak{G}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}^2(0; \varepsilon, \mathbf{p}) \left[ T \sum_{\varepsilon_1} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon_1 \right] \times \\ &\times \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(0; \varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \mathfrak{G}(0; \varepsilon_1, \mathbf{q}) = \\ &= 2 \left[ T \sum_{\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \right] \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{2} \int \frac{d\varepsilon_1}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(0; \varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \mathfrak{G}^2(0; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \right]. \end{aligned} \quad (19.23)$$

В последнем равенстве использовано свойство симметрии

$$\mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) = \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(\varepsilon_1, \mathbf{q}; \varepsilon, \mathbf{p}).$$

Это выражение можно несколько преобразовать. Совершенно аналогично тому, как была выведена формула (19.4), мы можем получить соответствующую формулу в температурной технике:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{G}^{-1}(T; \varepsilon, \mathbf{p})}{\partial \mu} &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} T \sum_{\varepsilon_1} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(T; \varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \mathfrak{G}^2(T; \varepsilon_1, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

В пределе  $T \rightarrow 0$  при  $\varepsilon = \text{const}$  получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \mathfrak{G}^{-1}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) &= \\ &= 1 + \frac{1}{2} \int \frac{d\varepsilon_1}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \alpha\beta}(0; \varepsilon, \mathbf{p}; \varepsilon_1, \mathbf{q}) \mathfrak{G}^2(0; \varepsilon_1, \mathbf{q}). \end{aligned}$$

Подставляя в (19.23), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} [N(\mu, T) - N(\mu, 0)] &= \\ &= 2 \left[ T \sum_{\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \right] \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \mathfrak{G}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) \frac{\partial}{\partial \mu} \mathfrak{G}^{-1}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) = \\ &= -2 \left[ T \sum_{\varepsilon} - \frac{1}{2\pi} \int d\varepsilon \right] \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \mathfrak{G}(0; \varepsilon, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Дифференцируя это соотношением по температуре при  $\mu = \text{const}$  и сравнивая с (19.18), находим:

$$\frac{S}{V} = -2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ T \sum_{\varepsilon} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \mathfrak{G}(0; \varepsilon, \mathbf{p}) \right]. \quad (19.24)$$

Дальнейшие вычисления мы можем провести следующим образом. Пользуясь связью температурной функции  $\mathfrak{G}$  с запаздывающей и опережающей функциями Грина, запишем выражение (19.24) для энтропии в виде суммы двух контурных интегралов

$$\begin{aligned} \frac{S}{V} &= -2 \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{1}{4\pi i} \int_{C_1} \text{th} \frac{\varepsilon}{2T} \ln G_R(\varepsilon, \mathbf{p}) d\varepsilon + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{4\pi i} \int_{C_2} \text{th} \frac{\varepsilon}{2T} \ln G_A(\varepsilon, \mathbf{p}) d\varepsilon \right] \right\} = \\ &= 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i T} \left[ \int_{C_1} \varepsilon \left( -\frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) \ln G_R(\varepsilon, \mathbf{p}) d\varepsilon + \right. \\ &\quad \left. + \int_{C_2} \varepsilon \left( -\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon} \right) \ln G_A(\varepsilon, \mathbf{p}) d\varepsilon \right], \end{aligned}$$

где  $n_F$  — функция Ферми, а контуры  $C_1$  и  $C_2$  изображены на рис. 59, а. Функция  $G_R$  не имеет нулей в верхней полуплоскости, а  $G_A$  — в нижней<sup>1)</sup>. Пользуясь этим свойством, а также аналитичностью  $G_R$  и  $G_A$  в соответствующих полуплоскостях и быстрым убыванием  $\frac{\partial n_F}{\partial \varepsilon}$  при  $\varepsilon \rightarrow \pm \infty$ , можно

<sup>1)</sup> См. сноску на стр. 226.

развернуть контуры  $C_1$  и  $C_2$  вдоль действительной оси (см. рис. 59, б). При этом получаем:

$$\frac{S}{V} = 2 \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i T} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon \left( -\frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right) [\ln G_R(\varepsilon, \mathbf{p}) - \ln G_A(\varepsilon, \mathbf{p})] d\varepsilon.$$

Применяя обычное правило взятия интегралов с фермиевской функцией<sup>1</sup>, находим:

$$\begin{aligned} \frac{S}{V} &= \frac{2\pi^2 T}{3} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left[ G_R^{-1} \frac{\partial G_R}{\partial \varepsilon} - G_A^{-1} \frac{\partial G_A}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{2\pi^2 T}{3} \frac{1}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} 2 \operatorname{Im} \left[ G_R^{-1} \frac{\partial G_R}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Последнее равенство связано с тем обстоятельством, что на действительной оси  $G_R^* = G_A$ . Нетрудно видеть, что интеграл по  $\mathbf{p}$  берется вблизи поверхности Ферми. Под-

ставляя  $G_R \approx \frac{a}{\varepsilon - \xi + i\delta}$ , получаем:

$$\frac{S}{V} = \frac{\rho_0 m^*}{3} T. \quad (19.25)$$

Очевидно, что теплоемкость равна энтропии.

Отметим, что при вычислении температурной поправки для нас была существенна только окрестность точки  $\varepsilon=0$ ,  $\xi=0$ , т. е. действительные полюсы функции  $G_R$  (или  $G$ ) при  $T=0$ . Это положение, по-видимому, является общим для любых температурных добавок. А именно, в первом приближении температурные добавки всегда должны определяться полюсами функции  $G$  (или  $\Gamma$ ) при  $T=0$ , иными словами, они определяются спектром элементарных возбуждений.

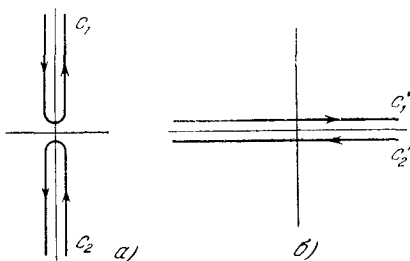


Рис. 59.

<sup>1</sup>)  $\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) \frac{\partial n_F(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = -f(0) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \varepsilon^2} \right]_{\varepsilon=0} + \dots$

## § 20. Особенности вершинной части в случае малого суммарного импульса сталкивающихся частиц<sup>1)</sup>

Кроме особенности при малых передачах энергии и импульса, вершинная часть имеет еще одну особенность, представляющую, как будет видно из дальнейшего (гл. VII), интерес для теории сверхпроводимости. Рассмотрим случай, когда сумма  $p_1 + p_2$  является малой, причем малы энергии  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  и сумма импульсов  $p_1 + p_2 = s$ .

Рассмотрим диаграммы на рис. 57. Нетрудно видеть, что в данном случае особой диаграммой будет 57, а. Именно в этой диаграмме полюсы обеих  $G$ -функций под интегралом сближаются.

Мы поступим с этой вершинной частью аналогично § 18. Введем обозначение

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3, s) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, -p_1 + s; p_3, -p_3 + s).$$

Далее, обозначим через  $\Gamma^{(2)}$  сумму всех «неособенных» диаграмм. В  $\Gamma^{(2)}$  мы можем положить  $s = 0$ . Для получения полной  $\Gamma$  надо просуммировать «лестничные» диаграммы типа рис. 58. Прежде чем это сделать, продифференцируем  $\Gamma$  по четвертой компоненте  $s$ , которую мы обозначим через  $\lambda$ . Каждая лестничная диаграмма даст при этом сумму членов, в каждом из которых дифференцируется одна из «ступенек». Если зафиксировать дифференцируемую ступеньку, то легко видеть, что все диаграммы разделяются на две независимые лестницы слева и справа, причем сумма таких лестниц с каждой стороны есть полная вершинная часть. Таким образом, получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) = \frac{i}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, q; s) G(q) \frac{\partial}{\partial \lambda} G(-q + s) \times \\ \times \Gamma_{\xi\eta, \gamma\delta}(q, p_3; s) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}. \quad (20.1) \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Этот параграф основывается на неопубликованных результатах А. А. Абрикосова, Л. П. Горькова, Л. Д. Ландау и И. М. Халатникова.

Состоящее под интегралом выражение  $G(q) \frac{\partial}{\partial \lambda} G(-q+s)$  вблизи  $\varepsilon = 0$ ,  $|q| = p_0$  имеет вид

$$-\frac{a^2}{[\varepsilon - v(|q| - p_0) + i\delta \operatorname{sign}(|q| - p_0)]} \times \\ \times \frac{1}{[\varepsilon - \lambda + v(|q-s| - p_0) - i\delta \operatorname{sign}(|q-s| - p_0)]^2} \quad (20.2)$$

Отсюда ясно, что интеграл по  $\frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{p_0^2 d|q| d\Omega d\varepsilon}{(2\pi)^4}$  берется в основном по окрестности  $|q| = p_0$ ,  $\varepsilon = 0$ . Если предположить, что  $\Gamma$  в интеграле не являются быстропеременными в этой области, то при интегрировании по  $d|q|$  и  $d\varepsilon$  можно считать эти  $\Gamma$  константами и интегрировать только выражение (20.2). В результате получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) = \\ = \frac{a^2 p_0^2}{2(2\pi)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1 q; s) \Gamma_{\xi\eta, \gamma\delta}(q p_3; s) \frac{\lambda}{\lambda^2 - (vs)^2 + i\delta} d\Omega. \quad (20.3)$$

Теперь возьмем градиент  $\Gamma$  по  $s$ . При дифференцировании второй из  $G$ -функций не надо забывать, что  $vs$  не только входит непосредственно в знаменатель, но, кроме того, определяет знак мнимой части. Ввиду этого вблизи  $\varepsilon = 0$ ,  $|q| = p_0$  выражение  $G(q) \frac{\partial}{\partial s} G(-q+s)$  имеет вид

$$-\frac{a^2 v}{[\varepsilon - v(|q| - p_0) + i\delta \operatorname{sign}(|q| - p_0)]} \times \\ \times \frac{1}{\left[ \varepsilon - \lambda + v(|q| - p_0) - vs - i\delta \operatorname{sign}\left(|q| - p_0 - \frac{(vs)}{v}\right) \right]^2 +} \\ + \frac{2\pi i a^2 \delta (\varepsilon - \lambda) \delta (vs - v(|q| - p_0)) v}{\lambda - vs + i\delta \operatorname{sign}(vs)}.$$

Интеграл по  $d\varepsilon d|q|$  от этого выражения приводит к следующему соотношению для  $\Gamma$ :

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) = -\frac{a^2 p_0^2}{2(2\pi)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, q; s) \times \\ \times \Gamma_{\xi\eta, \gamma\delta}(q, p_3; s) \frac{v(vs)}{\lambda^2 - (vs)^2 + i\delta} d\Omega. \quad (20.4)$$

Комбинируя уравнения (20.3) и (20.4), получаем:

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) + s \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) = \\ = \frac{a^2 p_0^2}{2(2\pi)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, q; s) \Gamma_{\xi\eta, \gamma\delta}(q, p_3; s) d\Omega. \quad (20.5)$$

Если не рассматривать магнитных взаимодействий, то силы между частицами зависят только от взаимной ориентации спинов. Если при этом учесть, что при взаимодействии частиц сохраняется полный спин, то уравнение (20.5) разделится на два независимых. Одно из них отвечает взаимодействию двух частиц с противоположными спинами (т. е., например,  $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}$ ), а другое — взаимодействию частиц с параллельными спинами. Эти уравнения будут совершенно одинаковыми. Разница происходит от начальных условий (т. е. от  $\Gamma^{(2)}$ ). Ввиду этого мы будем дальше всюду писать просто  $\Gamma$ , подразумевая под этим какую-нибудь из двух различных компонент.

Сделаем предположение, оправдывающееся в дальнейшем, что  $\Gamma(p_1, p_3; s)$  не зависит от углов  $(\widehat{p_1}, s)$  и  $(\widehat{p_3}, s)$ . Тогда эта величина может быть разложена по полиномам Лежандра, зависящим от  $\cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между  $p_1$  и  $p_3$ :

$$\Gamma(p_1, p_3; s) = \sum_l \Gamma_l P_l(\cos \theta). \quad (20.6)$$

Заметим, что  $\Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, p_3; s)$  для противоположных спинов антисимметрична по спинам, а для параллельных — симметрична. Перестановка импульсов начальных частиц соответствует замене  $\cos \theta$  на  $-\cos \theta$ . Ввиду того, что  $\Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  должна быть антисимметричной относительно перестановки  $p_1 \alpha \leftrightarrow p_2 \beta$ , в разложении (20.6) для параллельных спинов участвуют лишь нечетные гармоники, а для антипараллельных — только четные.

Уравнения (20.5) для отдельных  $\Gamma_l$  разделяются и приобретают вид

$$\lambda \frac{\partial \Gamma_l}{\partial \lambda} + s \frac{\partial \Gamma_l}{\partial s} = \frac{4\pi a^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v} \frac{\Gamma_l^2}{2l+1} \quad (20.7)$$



(взятие суммы по спинам в (20.5) приводит к появлению множителя 2).

Решение уравнения (20.7) равно

$$\Gamma_l(\lambda, |s|) = - \frac{(2\pi)^3 v (2l+1)}{2\pi a^2 p_0^2} \cdot \frac{1}{\ln \lambda |s| + f_l\left(\frac{\lambda}{|s|}\right)}, \quad (20.8)$$

где  $f_l$  — произвольная функция.

Уравнения (20.3) и (20.4) дают возможность получить предельные выражения для  $f_l(x)$  при  $x \rightarrow 0$  и  $x \rightarrow \infty$ . Посмотрим уравнение (20.3) в пределе  $|s| \rightarrow 0$ . Разложив  $\Gamma$  по сферическим гармоникам, находим:

$$\lambda \frac{d\Gamma_l}{d\lambda} = \frac{4\pi a^2 p_0^2}{(2\pi)^3 v (2l+1)} \Gamma_l^2. \quad (20.9)$$

Решением этого уравнения является:

$$\Gamma_l(\lambda, 0) = - \frac{(2\pi)^3 v (2l+1)}{4\pi a^2 p_0^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{\lambda}{c_1^l}}, \quad (20.10)$$

где  $c_1$  — константа. Таким образом, при  $x \rightarrow \infty$ ,  $f_l(x) \rightarrow \ln \frac{x}{(c_1^l)^2}$ .

Аналогичным образом из уравнения (20.4) при  $\lambda \rightarrow 0$  получаем:

$$\Gamma_l(0, |s|) = - \frac{(2\pi)^3 v (2l+1)}{4\pi a^2 p_0^2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{v |s|}{c_2^l}}. \quad (20.11)$$

Таким образом, при  $x \rightarrow 0$ ,  $f_l(x) \rightarrow \ln \frac{v^2}{(c_2^l)^2 x}$ .

Константы  $c_1^l$  и  $c_2^l$  имеют размерность энергии и могут быть комплексными. Если, например, константа  $c_1^l$  имеет порядок фермиевской энергии, то из выражения (20.10) следует, что при  $\lambda \rightarrow 0$   $\Gamma_l(\lambda, 0)$  обращается в нуль по закону  $1/\ln \frac{c_1^l}{\lambda}$ . Однако возможен особый случай, когда эта константа является малой. Тогда  $\Gamma_l(\lambda, 0)$  имеет полюс при каком-то значении  $\lambda$  (вообще говоря, комплексном). Смысл этого обстоятельства, тесно связанного с явлением сверхпроводимости, будет выяснен в гл. VII.

\* \* \*

Исследованием  $\Gamma$  в случае малого суммарного импульса сталкивающихся частиц мы заканчиваем микроскопическое рассмотрение изотропной ферми-жидкости.

В настоящее время известна только одна изотропная ферми-жидкость — жидкий  $\text{He}^3$ . Класс анизотропных ферми-жидкостей значительно шире — это электроны в металлах. Однако, помимо анизотропии, у электронной жидкости в металлах имеются такие специфические особенности, как дальнедействующие кулоновские силы, взаимодействие с колебаниями решетки и др. Некоторые из этих особенностей будут рассмотрены в двух следующих параграфах на примерах изотропной модели электронов, взаимодействующих с фононами, и вырожденной плазмы.

Общее рассмотрение электронной ферми-жидкости в металлах, несомненно, принадлежит к числу важнейших задач, которые должны быть решены с помощью методов квантовой теории поля. В частности, здесь надлежит произвести более углубленное исследование явления сверхпроводимости, которое пока было изучено только на примере простейшей модели (см. гл. VII).

## § 21. Взаимодействие электронов с фононами при $T = 0$ <sup>1)</sup>

В этом параграфе на примере изотропной модели будет рассмотрено взаимодействие электронов с фононами в металле. При этом мы будем предполагать, что металл не является сверхпроводником. Такое предположение, строго говоря, лишает эту модель физического смысла. Как будет показано в гл. VII, в модели, где взаимодействие электронов обусловлено только обменом фононами, при  $T = 0$  обязательно имеется сверхпроводимость. Однако условие  $T = 0$  не следует понимать слишком буквально. По сути дела, речь идет о температурах, заметно более низких, чем температура вырождения электронов и дебаевская температура фононов. Если характер электронно-фононного взаимодействия таков, что температура сверхпроводящего перехода заметно ниже

<sup>1)</sup> Результаты, изложенные в этом параграфе, были получены А. Б. Мигдалом [36].

дебаевской температуры, то рассматриваемая модель не является внутренне противоречивой.

Конечно, эта модель значительно отличается от реального металла. Это связано с тем, что реальный металл анизотропен, и, кроме того, между электронами имеется кулоновское взаимодействие, которое тоже имеет существенное значение. Ввиду этого мы в дальнейшем отметим те качественные изменения, которые происходят от кулоновского взаимодействия электронов.

**1. Вершинная часть.** Уравнения Дайсона для электронов и фононов уже были получены нами в числе примеров в § 10. Рассмотрим в первую очередь треххвостую вершинную часть  $\Gamma$ , входящую в эти уравнения. Покажем, что эта величина отличается от своего нулевого значения, равного  $g$ , на малые величины порядка  $\sqrt{\frac{m}{M}}$ , где  $m$  — масса электрона, а  $M$  — масса ядра. Вычислим поправку первого порядка к  $\Gamma$ , изображенную на рис. 31, *a*. При этом будем считать, что импульсы электронов порядка  $p_0$ , энергия  $\varepsilon$  порядка  $\mu \sim p_0 v$ , а импульс и энергия фонона таковы, что  $\omega \leq \omega(\mathbf{k})|_{|\mathbf{k}|=2p_0} \equiv \omega'_D \sim \omega_D$  (так как  $k_D \sim p_0$ ). Именно такие значения энергий и импульсов будут для нас наиболее существенны в дальнейшем.

Согласно § 9, диаграмма на рис. 31, *a* равна

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)}\left(p + \frac{q}{2}, p - \frac{q}{2}; q\right) = \\ = ig^3 \int D^{(0)}(p - p_1) G^{(0)}\left(p_1 + \frac{q}{2}\right) G^{(0)}\left(p_1 - \frac{q}{2}\right) \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4}, \quad (21.1) \\ q = (\mathbf{k}, \omega)^1, \end{aligned}$$

где, согласно § 7,  $D^{(0)}$  и  $G^{(0)}$  определяются формулами

$$G^{(0)}(\mathbf{p}, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \mu + i\delta \operatorname{sign}(|\mathbf{p}| - p_0)}, \quad (21.2)$$

$$\text{где } \varepsilon_0(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}, \quad \mu = \frac{p_0^2}{2m};$$

$$D^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_0(\mathbf{k})}{2} \left\{ \frac{1}{\omega - \omega_0(\mathbf{k}) + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_0(\mathbf{k}) - i\delta} \right\}. \quad (21.3)$$

<sup>1)</sup> В этом параграфе 4-импульс фононов мы будем обозначать буквой  $q = (\mathbf{k}, \omega)$ . Просто буквой  $k$  мы обозначим  $|\mathbf{k}|$ .

Мы будем полагать, что фононный спектр ограничен, т. е.  $k < k_D \sim p_0$ . При больших импульсах  $D^{(0)}$  обращается в нуль. Физически это ограничение означает отсутствие колебаний с длиной волны, меньшей межатомных расстояний.

Функция  $D^{(0)}$ , стоящая в интеграле (21.1) при  $|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1| \sim p_0$  и  $\varepsilon - \varepsilon_1 \ll \omega_D$  может быть заменена константой  $D^{(0)} \approx -1$ . В области  $\varepsilon - \varepsilon_1 \gg \omega_D$  функция  $D^{(0)}$  убывает по закону  $(\varepsilon - \varepsilon_1)^{-2}$ . Это дает возможность оценить интеграл для  $\Gamma^{(1)}$

$$\Gamma^{(1)} \approx -\frac{ig^3}{16\pi^4} \int_{|\varepsilon_1 - \varepsilon| < \omega_D} d\varepsilon_1 \int_{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_1| < k_D} G^{(0)}\left(\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{k}}{2}, \varepsilon_1 + \frac{\omega}{2}\right) \times \\ \times G^{(0)}\left(\mathbf{p}_1 - \frac{\mathbf{k}}{2}, \varepsilon_1 - \frac{\omega}{2}\right) d\mathbf{p}_1. \quad (21.4)$$

Интегрирование по  $\varepsilon_1$  дает множитель  $\omega_D \sim up_0 \sim \mu \sqrt{\frac{m}{M}}$  ( $u$  — скорость звука). В результате  $\Gamma^{(1)}$  оказывается порядка (см. § 9)

$$\Gamma^{(1)} \sim g^3 \frac{p_0^2}{v} \sqrt{\frac{m}{M}} \sim g\zeta \sqrt{\frac{m}{M}}$$

( $\zeta \sim 1$ ), если только интегрирование по  $\mathbf{p}$  не вносит множителей порядка  $\frac{1}{\omega_D}$ .

Подозрительным в этом смысле является только случай малых передач  $k \ll p_0$  и  $\omega \ll \omega_D$ . В этом случае полюсы двух  $G$ -функций в интеграле для  $\Gamma^{(1)}$  сближаются. Легко убедиться в том, что интегрирование будет происходить по области импульсов вблизи  $|\mathbf{p}_1| = p_0$  и энергий вблизи  $\varepsilon_1 = 0$ . В этом случае  $G^{(0)}$  можно заменить на

$$G^{(0)} = \frac{1}{\varepsilon - v(|\mathbf{p}| - p_0) + i\delta \operatorname{sign}(|\mathbf{p}| - p_0)}, \quad (21.5)$$

где  $v = \frac{p_0}{m}$ . Положение здесь очень напоминает рассмотренное в § 18; однако здесь имеется некоторое существенное отличие. Как мы знаем из § 18, произведение двух  $G$ -функций имеет резкий максимум вблизи  $|\mathbf{p}_1| = p_0$  и  $\varepsilon_1 = 0$  и поэтому может быть заменено на  $A\delta(\varepsilon)\delta(|\mathbf{p}_1| - p_0)$ , где  $A$  — константа. Интеграл от произведения двух  $G$ -функ-

ций (21.5) по  $\xi = v(|\mathbf{p}| - p_0)$  и  $\epsilon$ , взятый в бесконечных пределах (он определяет константу  $A$ , см. § 18), формально расходится, а потому существенно зависит от порядка интегрирования. В § 18 мы брали сначала интеграл по  $\epsilon$ , а уже затем по  $\xi$ . Это было связано с тем, что интеграл по  $\epsilon$  действительно берется в бесконечных пределах, а интегрирование по  $\xi$ , по сути дела, ограничено пределами  $|\xi| < \mu$ . В данном случае присутствие  $D$ -функции в интеграле делает его, согласно (21.1), сходящимся. Ввиду этого порядок интегрирования произволен, и нам будет удобнее сначала интегрировать по  $\xi_1$ , а затем по  $\epsilon_1$ . В результате интегрирования получается:

$$- \int d\Omega \frac{i\omega}{\omega - kv} \frac{p_0 m}{(2\pi)^3}.$$

Эта величина не является малой только в случае  $\omega \gtrsim vk$ . Как мы увидим ниже, этот случай не представляет интереса для дальнейшего.

Учет диаграмм для  $\Gamma$  более высокого порядка не меняет произведенной оценки. Таким образом,

$$\Gamma = g \left[ 1 + O\left(\sqrt{\frac{m}{M}}\right) \right]. \quad (21.6)$$

**2. Гриновская функция фононов.** Теперь рассмотрим фоновую гриновскую функцию. Уравнение Дайсона дается формулой (10.9). Прежде всего, необходимо вычислить интеграл

$$\Pi(\mathbf{k}, \omega) = -2ig^2 \int G\left(p + \frac{q}{2}\right) G\left(p - \frac{q}{2}\right) \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}. \quad (21.7)$$

Как будет видно в дальнейшем,  $G(\mathbf{p}, \epsilon)$  существенно отличается от  $G^{(0)}$  лишь в узкой области  $||\mathbf{p}| - p_0| \sim \frac{\omega_D}{v}$ ,  $|\epsilon| \sim \omega_D$ , а в интеграле (21.7) существенно гораздо более широкая область. Ввиду этого мы можем с точностью до членов порядка  $\sqrt{\frac{m}{M}}$  заменить в (21.7) функцию  $G$  на  $G^{(0)}$ .

Нас интересует случай, когда  $\omega \sim \omega(\mathbf{k}) \leq \omega_D \ll vk$ . При этом  $k$ , вообще говоря, не всегда мало по сравнению с  $p_0$ , а потому мы не можем пользоваться формулой

(21.5). Производя интегрирование в (21.7), находим:

$$\Pi = -\frac{g^2 m p_0}{2\pi^2} \left[ h\left(\frac{k}{2p_0}\right) + i\pi \frac{m|\omega|}{p_0 k} \theta(2p_0 - k) \right], \quad (21.8)$$

где  $h(x) = 1 + \frac{1-x^2}{2x} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$ ,  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Подставляя  $\Pi$  в уравнение Дайсона для функции  $D$ , находим:

$$D^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = D_0^{-1} - \Pi = \frac{1}{\omega_0^2(\mathbf{k})} \left\{ \omega^2 - \omega_0^2(\mathbf{k}) \left[ 1 - \zeta h\left(\frac{k}{2p_0}\right) - \zeta \frac{i\pi m|\omega|}{p_0 k} \theta(2p_0 - k) \right] \right\} \quad (21.9)$$

(вместо  $g^2$  введена константа  $\zeta = g^2 p_0 m / 2\pi^2 \sim 1$ ). Полюс функции  $D$  определяет истинную энергию фононов и их затухание:

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega_0(\mathbf{k}) \sqrt{1 - \zeta h\left(\frac{k}{2p_0}\right)}, \quad (21.10)$$

$$\gamma_1(\mathbf{k}) = \frac{\pi}{2} \frac{\zeta \omega_0^2(\mathbf{k}) m}{p_0 k} \theta(2p_0 - k). \quad (21.11)$$

Согласно (21.10) при  $k \ll p_0$   $\omega(\mathbf{k}) \approx \omega_0(\mathbf{k}) \sqrt{1 - 2\zeta}$ . Вблизи  $k = 2p_0$  производная  $\frac{d\omega(\mathbf{k})}{dk}$  имеет логарифмическую особенность

$$\frac{d\omega(\mathbf{k})}{dk} = \frac{\zeta}{1-\zeta} \frac{\omega_0'}{4p_0} \ln \frac{2p_0}{|2p_0 - k|}, \quad (21.12)$$

связанную с исчезновением затухания при  $k > 2p_0$ .

Из формул (21.11) и (21.10) видно, что в том случае, если  $\zeta$  не слишком близко к  $1/2$ , затухание  $\gamma_1(\mathbf{k})$  является относительно слабым. Действительно,

$$\frac{\gamma_1(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k})} = \frac{\pi}{2} \frac{\zeta \omega_0^2(\mathbf{k}) m}{p_0 k \omega(\mathbf{k})} \sim \frac{\pi}{2} \zeta \frac{u}{v} \frac{1}{1-2\zeta} \sim \sqrt{\frac{m}{M}} (1-2\zeta)^{-1}. \quad (21.13)$$

Гриновскую функцию  $D(\mathbf{k}, \omega)$  можно записать в виде, аналогичном (21.3):

$$D(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega_0^2(\mathbf{k})}{2\omega(\mathbf{k})} \left( \frac{1}{\omega - \omega(\mathbf{k}) + i\gamma_1(\omega)} - \frac{1}{\omega + \omega(\mathbf{k}) - i\gamma_1(\omega)} \right), \quad (21.14)$$

где  $\gamma_1(\omega) = \frac{\zeta \pi m}{2p_0} \frac{\omega_0^2(k)}{k\omega(k)} |\omega| \theta(2p_0 - k)$ . Отсюда видно, что функция  $D$  отличается от  $D^{(0)}$  изменением частоты и постоянным множителем.

**3. Гриновская функция электронов.** Теперь перейдем к гриновской функции электрона. Из уравнения Дайсона (10.4) мы находим:

$$G = \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0(p) + \mu - \Sigma(p, \varepsilon)}, \quad (21.15)$$

где  $\Sigma(p, \varepsilon)$  удовлетворяет уравнению

$$\Sigma(p, \varepsilon) = ig^2 \int \frac{D(p - p_1, \varepsilon - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0(p_1) + \mu - \Sigma(p_1, \varepsilon_1)} \frac{dp_1 d\varepsilon_1}{(2\pi)^4}. \quad (21.16)$$

Из (21.16) следует, что  $\Sigma$  имеет порядок  $\omega_D$ . Это значит, что  $G$  отличается от  $G^{(0)}$  только при  $|\varepsilon - \varepsilon_0(p) + \mu| \lesssim \omega_D$ . Таким образом, спектр электронных возбуждений меняется лишь при  $\varepsilon_0(p) - \mu \approx v(|p| - p_0) \sim \omega_D$ .

В формуле (21.16) удобно перейти к интегрированию по новым переменным:  $\omega = \varepsilon_1 - \varepsilon$ ,  $k = |p_1 - p|$ . Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma(p, \varepsilon) = & \frac{ig^2}{(2\pi)^3 |p|} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{k_D \sim p_0} k dk \int_{||p|-k|}^{|p|+k} |p_1| d|p_1| \times \\ & \times \frac{D(k, \omega)}{\varepsilon + \omega - \varepsilon_0(p_1) + \mu - \Sigma(p_1, \varepsilon + \omega)}. \end{aligned} \quad (21.17)$$

Импульс  $|p|$  перед интегралом можно положить равным  $p_0$ .

Интегрирование по  $|p_1|$  разобьем на две области. В первой области  $|\xi_1| = |v(|p_1| - p_0)| \leq v$ , во второй  $|\xi_1| > v$ , где  $\omega_D \ll v \ll \mu$ . В интеграле по первой области можно заменить  $\varepsilon_0(p_1) - \mu$  на  $v(|p_1| - p_0)$ , а во всех остальных местах положить  $|p_1| = p_0$ .

При интегрировании по второй области надо учесть, что  $D$  убывает как  $\frac{1}{\omega^2}$  при  $\omega \gg \omega_D$ . Поэтому в знаменателе подынтегрального выражения величины  $\varepsilon$  и  $\Sigma$  будут малы по

сравнению с  $\varepsilon_0(\mathbf{p}_1) - \mu$ . Отсюда следует, что интеграл по этой области дает вклад в  $\Sigma(\mathbf{p}, \varepsilon)$ , не зависящий от  $\mathbf{p}$  и  $\varepsilon$ . Эту константу мы обозначим через  $\Sigma_0$ . Таким образом,

$$\Sigma_0 = - \frac{t g^2}{(2\pi)^3 p_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{k_D} k dk D(k, \omega) \oint_{|p_0 - k|}^{p_0 + k} \frac{|\mathbf{p}_1| d|\mathbf{p}_1|}{\varepsilon_0(\mathbf{p}_1) - \mu}.$$

Интеграл по  $|\mathbf{p}_1|$  берется здесь в смысле главного значения. В результате интегрирования по  $|\mathbf{p}_1|$  и  $\omega$  получаем:

$$\Sigma_0 = - \frac{m g^2}{2 (2\pi)^2 p_0} \int_0^{k_D} k dk \frac{\omega_0^2(k)}{\omega(k)} \ln \left| \frac{2p_0 + k}{2p_0 - k} \right|. \quad (21.18)$$

Эта величина является чисто вещественной.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_0(\mathbf{p}) - \mu = v(|\mathbf{p}| - p_0) = \xi, \quad \varepsilon - \Sigma_0 = \eta, \quad (21.19)$$

$$\Sigma(\xi, \eta) = \Sigma_0 - f(\xi, \eta).$$

В этих обозначениях  $G$  имеет вид

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta - \xi + f(\xi, \eta)}. \quad (21.20)$$

Ввиду того, что  $\Sigma_0$  вещественно, из формулы (21.19) следует  $\text{Im } \Sigma(\xi, \eta) = -\text{Im } f(\xi, \eta)$ . Ниже мы увидим, что  $f(\xi, 0) = 0$ . Отсюда следует, что мнимая часть  $G$ -функции (21.18) обращается в нуль при  $\eta = \varepsilon - \Sigma_0 = 0$ . Таким образом,  $\Sigma_0$  представляет собой просто добавку к химическому потенциалу.

Вычитая из левой и правой частей уравнения (21.17)  $\Sigma_0$ , получаем уравнение для  $f(\xi, \eta)$ :

$$f(\xi, \eta) = - \frac{t m g^2}{(2\pi)^3 p_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\nu}^{\nu} d\xi_1 \int_0^{k_1} \frac{D(k, \omega) k dk}{\eta + \omega - \xi_1 + f(\xi_1, \eta + \omega)}. \quad (21.21)$$

Здесь  $k_1 = \min(k_D, 2p_0)$ . Из уравнения (21.21) следует, что  $f(\xi, \eta)$  не зависит от  $\xi$ . Поэтому мы будем впредь писать просто  $f(\eta)$ . Величина  $f$  всегда по порядку величины не превышает  $\omega_D$ , согласно же нашему предположению,  $\eta \sim \omega_D$ . В интеграле существенна область  $\omega \leq \omega_D$ . Поэтому в знаменателе подынтегрального выражения (21.21) все величины, кроме  $\xi_1$ , порядка  $\omega_D \ll \nu$  и можно положить  $\nu \rightarrow \infty$ ,



Интегрирование по  $\xi_1$  дает:

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_{-v}^v \frac{d\xi_1}{\xi_1 - \eta - \omega - f(\eta + \omega)} = \\ = i\pi \operatorname{sign} \operatorname{Im} [\eta + \omega + f(\eta + \omega)] = i\pi \operatorname{sign} (\eta + \omega).$$

Последнее равенство написано на основании следующих соображений. Как мы увидим ниже,  $f(0) = 0$ . Следовательно, и  $\operatorname{Im} f(0) = 0$ . Но это значит, что мнимая часть функции  $f(\eta)$  меняет знак в точке  $\eta = 0$ . Согласно общим свойствам функции Грина, при  $\eta > 0$  знак  $f$  должен быть положительным (см. § 7). Ввиду этого

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} f(\eta) = \operatorname{sign} \eta. \quad (21.22)$$

Подставляя все это в (21.21), найдем:

$$f(\eta) = -\frac{mg^2}{8\pi^2 p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \operatorname{sign} (\eta + \omega) D(k, \omega) = \\ = \frac{mg^2}{8\pi^2 p_0} \int_0^{k_1} k dk \int_{-\eta}^{\eta} D(k, \omega) d\omega.$$

Здесь использовано то, что  $D$  — симметричная функция от  $\omega$ . Действительная и мнимая части функции  $f$  равны

$$\operatorname{Re} f = -\frac{mg^2}{8\pi^2 p_0} \int_0^{k_1} \omega_0^2(k) k dk \int_{-\eta}^{\eta} \frac{d\omega}{\omega^2 - \omega^2(k)}, \quad (21.23)$$

$$\operatorname{Im} f = \frac{mg^2}{8\pi^2 p_0} \int_0^{k_1} \omega_0^2(k) k dk \int_{-\eta}^{\eta} \frac{2\gamma_1(k) |\omega| d\omega}{[\omega^2 - \omega^2(k)]^2 + 4\gamma_1^2(k) \omega^2}. \quad (21.24)$$

В случае, если  $\eta \gg \omega_D \sqrt{\frac{m}{M}}$ , выражение под интегралом в (21.24) можно заменить на  $\pi \delta[\omega^2 - \omega^2(k)]$ . Интегрируя (21.23) и (21.24) по  $\omega$  и обозначая опять  $g^2 = \frac{2\zeta\pi^2}{p_0 m}$ ,

получаем:

$$\operatorname{Re} f = \frac{\zeta}{4p_0^2} \int_0^{k_1} \frac{\omega_0^2(k)}{\omega(k)} \ln \left| \frac{\eta + \omega(k)}{\eta - \omega(k)} \right| k dk,$$

$$\operatorname{Im} f = \frac{\pi\zeta}{4p_0^2} \int_0^{k_2} \frac{\omega_0^2(k)}{\omega(k)} k dk \cdot \operatorname{sign} \eta,$$

где  $k_2$  определяется из условия  $\omega(k_2) = |\eta|$ , если  $|\eta| < \omega_D$ , и  $k_2 = k_1$ , если  $|\eta| > \omega_D$ .

Введем вместо  $k$  новую переменную  $t = \frac{\omega(k)}{\omega'_D}$ . Согласно нашему определению,  $\omega(2p_0) = \omega'_D$ . Если учесть, что  $\omega_0(k) = u_0 k$ , где  $u_0$  — «затравочная» скорость звука, то нетрудно найти, что  $u_0^2 = \frac{\omega_D'^2}{4p_0^2(1-\zeta)}$ , и, следовательно<sup>1)</sup>,

$$t^2 = \frac{1}{1-\zeta} \left( \frac{k}{2p_0} \right)^2 \left[ 1 - 2\zeta + \zeta \left( \frac{k}{2p_0} \right)^2 \right].$$

Для  $\operatorname{Re} f$  мы получаем следующий интеграл:

$$\operatorname{Re} f = \frac{\omega'_D}{2} \int_0^1 dt \ln \left| \frac{t + \eta/\omega'_D}{t - \eta/\omega'_D} \right| \left( 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right), \quad (21.25)$$

где  $s^2 = \frac{\left( \frac{1}{2} - \zeta \right)^2}{\zeta(1-\zeta)}$ .

Из (21.25) следует, что при  $\eta \ll \omega'_D \sim \omega_D$

$$\operatorname{Re} f \approx \eta \ln \frac{1-\zeta}{1-2\zeta} = b\eta, \quad (21.26)$$

а при  $\eta > \omega_D$   $\operatorname{Re} f$  убывает по закону  $\frac{1}{\eta}$ . Аналогичным образом для мнимой части находим:

$$\operatorname{Im} f = \frac{\pi\omega'_D}{2} \int_0^{t_1} \left[ 1 - \frac{s}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right] dt =$$

$$= \pi\omega'_D \left\{ t_1 - s \ln \frac{t_1 + \sqrt{s^2 + t_1^2}}{s} \right\}, \quad (21.27)$$

<sup>1)</sup> Во всей области  $0 < x < 1$  функцию  $h(x)$  с хорошей точностью можно представить в виде  $h(x) \approx 2 - x^2$ .

где  $t_1 = \frac{\eta}{\omega_D}$  при  $|\eta| < \omega'_D$  и  $t_1 = 1$  при  $|\eta| > \omega'_D$ . При

$\omega_D \sqrt{\frac{m}{M}} \ll \eta \ll 1$  получаем:

$$\gamma = \text{Im } f = \frac{\pi \eta^3}{12 s^2 \omega_D'^2} = \frac{\pi}{12} \frac{\zeta(1-\zeta)}{\left(\frac{1}{2} - \zeta\right)^2} \frac{\eta^3}{\omega_D'^2}. \quad (21.28)$$

Эта формула неприменима в случае, когда  $|\eta| \ll \ll \omega_D \sqrt{\frac{m}{M}}$ . Но в этом случае в знаменателе подынтегрального выражения в (21.24) можно пренебречь членами с  $\omega$ . В результате получаем:

$$\gamma = \text{Im } f = \frac{\pi \zeta^2 m}{4 p_0^3} \int_0^{k_1} \frac{dk}{\left[1 - \zeta h\left(\frac{k}{2p_0}\right)\right]^2} \eta |\eta|. \quad (21.29)$$

Формулы (21.28) и (21.29) соответствуют двум различным механизмам затухания. Первая из них определяет затухание, происходящее от излучения электроном фононов. Однако в том случае, когда энергии квазичастиц очень близки к поверхности Ферми:  $|\eta| \ll \omega \sqrt{\frac{m}{M}}$ , становится существенным взаимодействие электронов благодаря обмену фононами, которое обеспечивает затухание (21.29). Из того, что говорилось раньше (§§ 2 и 7), нетрудно увидеть, что затухание, возникающее от взаимодействия ферми-частиц, должно иметь именно такую форму.

Энергию электронных возбуждений можно определить из действительной части полюса функции  $G$ . Подставив (21.26) в (21.20), находим:

$$\eta + \text{Re } f(\eta) = \xi. \quad (21.30)$$

В случае малых  $\eta$  с помощью (21.26) получаем:

$$\eta = \frac{v}{1+b} (|\mathbf{p}| - p_0). \quad (21.31)$$

Таким образом, скорость квазичастиц на поверхности Ферми уменьшается (последнее следует из того, что согласно (21.26)  $b > 0$ ). Кроме того, вблизи полюса  $G$ -функция приобретает вид (18.1), где  $a = (1+b)^{-1} < 1$ . Из формулы

(21.28) следует, что затухание квазичастиц сравнивается с их энергией при  $\eta \sim \omega_D$ . Однако нетрудно видеть (см. (21.27)), что при дальнейшем росте энергии возбуждений затухание перестает расти и становится опять меньше энергии квазичастиц. Таким образом, имеются две области, в которых понятие квазичастиц имеет смысл:  $|\eta| \ll \omega_D$  и  $|\eta| \gg \omega_D$ . В обеих областях энергия электронов имеет вид  $v(|p| - p_0)$ , но скорости  $v$  являются различными.

Отметим теперь качественно, к чему привел бы учет непосредственного кулоновского взаимодействия электронов. Благодаря экранировке кулоновских сил на расстояниях порядка периода решетки (т. е. порядка  $\frac{1}{p_0}$ ) их тоже можно рассматривать в данном случае как короткодействующие. Учет этих сил приведет к изменению скорости на ферми-поверхности и коэффициента  $a$  в  $G$ -функции вблизи полюса.

Качественное отличие возникнет в величине затухания. Очевидно, затухание от кулоновского взаимодействия будет иметь порядок  $\frac{\eta|\eta|}{\mu}$ . В области  $|\eta| \ll \omega_D \sqrt{\frac{m}{M}}$  оно будет складываться с затуханием (17.29), имеющим ту же структуру и тот же порядок величины, но в области  $|\eta| \gg \omega_D \sqrt{\frac{m}{M}}$  фононное затухание (17.28) становится преобладающим. Как уже отмечалось выше, при  $|\eta| > \omega_D$  фононное затухание становится константой. Его порядок, очевидно, равен  $\omega_D$ . Кулоновское затухание также присутствует в этой области и начинает доминировать при

$$|\eta| \gg \sqrt{\mu \omega_D} \sim \omega_D \sqrt[4]{\frac{M}{m}} > \omega_D.$$

Отсюда следует, что, в то время как спектр возбуждений в области  $|\eta| \gg \omega_D$  определяется кулоновским взаимодействием электронов, фононное затухание некоторое время продолжает доминировать над электронным.

## § 22. Некоторые свойства вырожденной плазмы

**1. Постановка задачи.** В качестве примера системы с кулоновским взаимодействием мы рассмотрим плазму, т. е. смесь электронного и ионного газов. Гамильтониан взаимо-

действия имеет вид

$$H_{int} = \frac{e^2}{2} \int \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{+}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' - \\ - Ze^2 \int \psi_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) \Phi^{+}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Phi(\mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}' + \\ + \frac{Z^2 e^2}{2} \int \Phi^{+}(\mathbf{r}) \Phi^{+}(\mathbf{r}') \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Phi(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}', \quad (22.1)$$

где  $\psi_{\alpha}(\mathbf{r})$  — оператор электронного поля, а  $\Phi$  — ионного. Газ электронов мы будем считать вырожденным, а ионный газ — бoльцмановским. Для этого необходимо, чтобы температура удовлетворяла неравенствам

$$\frac{1}{m} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \gg T \gg \frac{1}{M} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (22.2)$$

При расчетах мы можем условно рассматривать ионы как ферми-газ, так как бoльцмановский предел для обеих статистик одинаков.

Далее, предположим, что эффект кулоновского взаимодействия является малым. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{e^2}{\bar{E} \bar{r}} \ll 1,$$

где  $\bar{E}$  — некоторая средняя энергия, а  $\bar{r}$  — среднее расстояние между частицами. Для ионов  $\bar{E} \sim T$ , а для электронов  $\bar{E} \sim \frac{p_0^2}{2m}$ . Таким образом, наше условие эквивалентно следующим требованиям:

$$\frac{T}{e^2} \gg \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3} \gg e^2 m. \quad (22.3)$$

Нетрудно видеть, что условия (22.3) не противоречат предположению о вырождении электронного газа.

При соблюдении условий (22.3) кулоновское взаимодействие почти всегда будет мало влиять на свойства плазмы. Исключение представляет случай, когда существенны столкновения частиц с малой передачей импульса. Благодаря тому,

что фурье-компонента кулоновского потенциала имеет вид<sup>1)</sup>

$$U(k) = \frac{4\pi e^2}{k^2}, \quad (22.4)$$

роль столкновений с малыми передачами становится очень существенной.

Прежде всего, следует рассмотреть одну кажущуюся трудность, связанную с кулоновским взаимодействием. Диаграммы для  $G$ -функции в § 8 включают диаграммы типа рис. 5, б, содержащие  $U(0)$ . Аналогичные диаграммы возникают и для температурной  $\mathcal{G}$ -функции. Согласно (22.4), такие диаграммы обращаются в бесконечность. Перейдем от заданных химических потенциалов к заданным числам частиц

и заменим кулоновский потенциал потенциалом  $U(r) = e^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r}$ .

Величину  $\alpha$  мы будем считать малой и в окончательном ответе положим ее равной нулю. Для того чтобы избежать трудностей, возникающих при задании чисел частиц, мы будем проводить рассмотрение в пространстве  $\mathbf{r}$ ,  $\tau$ .

Возьмем, к примеру, электронную линию  $\mathcal{G}_e$ . Просуммируем все неприводимые собственно энергетические части типа изображенных на рис. 4, а и рис. 8, д, е, которые присоединяются к основной  $\mathcal{G}$ -линии одной волнистой линией. Нетрудно видеть, что все эти диаграммы в сумме дадут:

$$\begin{aligned} \Sigma'(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau - \tau') &= 2e^2 \int d\mathbf{r} [\mathcal{G}_e(0, -0) - Z\mathcal{G}_i(0, -0)] \times \\ &\times \frac{e^{-\alpha|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau - \tau') = \\ &= \frac{N_e - ZN_i}{V} \frac{4\pi e^2}{\alpha^2} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\tau - \tau') \equiv 0 \quad (22.5) \end{aligned}$$

в силу условия электронейтральности:  $N_e = ZN_i$ .

Таким же образом обращаются в нуль аналогичные поправки для  $\mathcal{G}_i$ -линий. Это означает, что все диаграммы, содержащие интеграл по объему от кулоновского потенциала (нулевая фурье-компонента), следует просто положить равными нулю.

<sup>1)</sup> В этом параграфе мы не пользуемся 4-векторами, и поэтому светлым латинским шрифтом мы будем обозначать абсолютные величины трехмерных векторов.

После этого можно перейти обратно к представлению с заданным  $\mu$  с помощью следующего формального приема. Представим все  $\mathfrak{G}^{(0)}$ -функции в диаграммах в виде

$$\mathfrak{G}_N^{(0)} = \mathfrak{G}_\mu^{(0)} e^{-\mu(\tau_1 - \tau_2)}. \quad (22.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что результирующая  $\mathfrak{G}$ -функция просто будет изображаться диаграммами с  $\mathfrak{G}_\mu^{(0)}$ , умноженными на один и тот же множитель  $e^{-\mu(\tau_1 - \tau_2)}$ . Разделив на этот множитель, мы переходим к  $\mathfrak{G}_\mu$ .

Отсюда видно, что рецепт оперирования с кулоновским потенциалом заключается просто в отбрасывании всех диаграмм с  $U(0)$ . Тут, однако, необходимо учесть, что получаемые при этом результаты будут правильны только при таком выборе химических потенциалов, когда выполнено условие  $N_e(\mu_e, \mu_i) = ZN_i(\mu_e, \mu_i)$  или, что то же самое,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_e} = Z \frac{\partial \Omega}{\partial \mu_i}. \quad (22.7)$$

## 2. Вершинная часть для малых передач импульса.

Прежде всего, рассмотрим вершинную часть с малыми передачами импульса. Ввиду того, что ионы здесь весьма существенны, мы применим температурную технику. Поправка первого порядка к выражению (22.4) изображается двумя диаграммами типа рис. 60, а. В одной из них петля образована электронами, а в другой — ионами. Хотя эта поправка

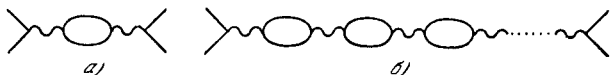


Рис. 60.

содержит добавочный множитель  $e^2$ , но в нее входит также  $\left(\frac{1}{k^2}\right)^2$ . Поэтому при малых передачах она может стать существенной, и нам необходимо просуммировать цепочку диаграмм, изображенных на рис. 60, б, с любым количеством электронных и ионных петель<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Такое суммирование для системы с кулоновским взаимодействием было впервые сделано Гелл-Манном и Бракнером [37].

В результате оказывается, что все вершины — электрон-электронная, ион-ионная и ион-электронная — множатся на один и тот же множитель, т. е.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{12}(\mathbf{k}, \omega_m) &= \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 \left[ 1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} (\mathcal{P}_e(\mathbf{k}, \omega_m) + Z^2 \mathcal{P}_i(\mathbf{k}, \omega_m)) \right]} = \\ &= \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + 4\pi e^2 [\mathcal{P}_e(\mathbf{k}, \omega_m) + Z^2 \mathcal{P}_i(\mathbf{k}, \omega_m)]}; \quad (22.8) \end{aligned}$$

здесь  $\omega_m = 2\pi Tm$ , где  $m$  — целое число,  $\mathcal{P}_e$  соответствует электронной петле, а  $\mathcal{P}_i$  — ионной.

Как уже отмечалось, ионы мы условно можем считать ферми-газом. Поэтому вычисление  $\mathcal{P}_e$  и  $\mathcal{P}_i$  на первом этапе идентично:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -2T \sum_n \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\varepsilon_n - \varepsilon_0(p) + \mu)(i\varepsilon_n + i\omega_m - \varepsilon_0(p+k) + \mu)} = \\ &= -2T \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_0(p+k) + \varepsilon_0(p)} \sum_n \left[ \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_0(p) + \mu} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{i(\varepsilon_n + \omega_m) - \varepsilon_0(p+k) + \mu} \right] = \\ &= 2T \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_0(p+k) + \varepsilon_0(p)} \times \\ &\quad \times \sum_{n>0} \left[ \frac{2(\varepsilon_0(p) - \mu)}{\pi^2 T^2 (2n+1)^2 + (\varepsilon_0(p) - \mu)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(\varepsilon_0(p+k) - \mu)}{\pi^2 T^2 (2n+1)^2 + (\varepsilon_0(p+k) - \mu)^2} \right] = \\ &= \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{1}{i\omega_m - \varepsilon_0(p+k) + \varepsilon_0(p)} \times \\ &\quad \times \left[ \operatorname{th} \frac{\varepsilon_0(p) - \mu}{2T} - \operatorname{th} \frac{\varepsilon_0(p+k) - \mu}{2T} \right] = \\ &= 2 \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{n(p+k) - n(p)}{i\omega_m - \varepsilon_0(p+k) + \varepsilon_0(p)}, \quad (22.9) \end{aligned}$$



где для электронов  $n(p) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0(p) - \mu}{T}} + 1}$ , а для ионов

$2n(p) = e^{\frac{\mu - \varepsilon_0(p)}{T}}$ . Здесь была использована формула

$$\sum_{n>0} \frac{1}{(2n+1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2}. \quad (22.10)$$

Мы будем предполагать, что  $|k| \ll p_0$ . Средний импульс иона имеет порядок  $\sqrt{MT}$  и, согласно (22.2), значительно больше  $p_0$ . Благодаря этому, разлагая выражение (22.9) по  $k$ , его можно упрощенно записать в виде

$$\mathcal{K}(k, \omega_m) = 2 \int \frac{dp}{(2\pi)^3} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \frac{vk}{i\omega_m - vk}. \quad (22.11)$$

Рассматриваемая вершинная часть зависит только от  $k$  и  $\omega_m$ . Благодаря этому ей можно сопоставить некоторую  $\mathfrak{D}$ -функцию, передающую электромагнитное взаимодействие между частицами. Действительно, рассмотрим, например, следующую величину:

$$\mathfrak{D}(r_1 - r_2, \tau_1 - \tau_2) = \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(r_1\tau_1) \tilde{\psi}_\beta(r_2\tau_2) \tilde{\psi}_\alpha(r_1\tau_1) \tilde{\psi}_\beta(r_2\tau_2)) \rangle,$$

где  $\langle \dots \rangle$  употребляется в смысле обычного температурного усреднения. Нетрудно убедиться в том, что фурье-образ этой величины по переменным  $\tau_1 - \tau_2$  и  $r_1 - r_2$  обладает всеми свойствами бозевской температурной гриновской функции. С другой стороны, этот фурье-образ, очевидно, равен

$$\mathfrak{D}(k, \omega_m) = \mathcal{K}_e(k, \omega_m) \mathcal{J}_{ee}(k, \omega_m) \mathcal{K}_e(k, \omega_m).$$

То же самое относится и к другим вершинам с малыми передачами.

Отсюда делается понятным, как перейти от температурных функций к временным. Как известно, для такого перехода в случае гриновской функции достаточно найти функцию, аналитичную в верхней полуплоскости переменной  $\omega$  и совпадающую в точках  $i\omega_m = i \cdot 2\pi Tm$  с температурой гриновской функции. Так определяется запаздывающая функция  $D_R$ . Настоящая гриновская функция равна  $D_R$  при  $\omega > 0$  и  $D_R^*$  при  $\omega < 0$ .

Эта процедура легко может быть проделана для функций  $\mathcal{P}_e$  и  $\mathcal{P}_i$ . (Получающиеся при этом функции мы обозначим  $\Pi_e$ ,  $\Pi_i$ .) Из интеграла (22.11) следует, что для этого необходимо произвести замену  $i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta \operatorname{sign} \omega$ . Поскольку в диаграммах, составляющих функцию  $\mathfrak{D}(\mathbf{k}, \omega_m)$ , зависящими от  $\omega_m$  являются только множители  $\mathcal{P}^n$ , то таким же способом мы можем получить функцию  $D(\mathbf{k}, \omega)$ . То же самое, очевидно, относится и к функциям  $\Gamma(\mathbf{k}, \omega)$ <sup>1)</sup>. Таким образом, временные вершинные части  $\Gamma(\mathbf{k}, \omega)$  выражаются теми же формулами (22.8), (22.10), где, однако, сделана замена  $i\omega_m \rightarrow \omega + i\delta \operatorname{sign} \omega$ . Появление добавки к  $k^2$  в знаменателе  $\Gamma$  есть не что иное, как дебаевская экранировка кулоновского взаимодействия. В общем случае она делает взаимодействие запаздывающим (т. е.  $\Gamma$  зависит от  $\omega$ ).

Рассмотрим теперь поведение  $\Gamma$  в зависимости от соотношения между  $\omega$  и  $k$ . В случае  $\omega \ll v_i k$  формула (22.11) дает:

$$\mathcal{P}_e = \Pi_e = \frac{1}{V} \frac{\partial N_e}{\partial \mu_e}, \quad \mathcal{P}_i = \Pi_i = \frac{1}{V} \frac{\partial N_i}{\partial \mu_i}. \quad (22.12)$$

По порядку величины  $\frac{1}{V} \frac{\partial N}{\partial \mu} \sim \frac{N}{V\mu}$ . Для электронов  $\mu_e \sim \frac{p_0^2}{m}$ , а для ионов  $\mu_i \sim T \ln T$ . Поэтому  $\Pi_i \gg \Pi_e$ .

Из формул (22.8) и (22.11) получаем:

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + \kappa_i^2}, \quad (22.13)$$

где  $\kappa_i = \sqrt{\frac{4\pi Z^2 e^2 N_i}{VT}}$  — обратный дебаевский радиус ионов.

В области  $|\omega| \gg v_i k$   $\Pi_i$  имеет вид

$$\Pi_i = -\frac{k^2}{\omega^2} \frac{N}{MV}. \quad (22.14)$$

Поскольку при  $|\omega| \ll v_e k$   $\Pi_e \sim \frac{N}{V\mu_e} \sim p_0 m$ , то ионная петля будет преобладать над электронной до тех пор, пока

<sup>1)</sup> Такая процедура, правильная для отдельных членов ряда, может быть неприменимой к его сумме. Однако в данном случае можно убедиться, что она приводит к правильному результату.

$k \gg \frac{|\omega|}{p_0} \sqrt{Mm}$ . Подставляя выражение для  $\Pi_i$  в формулу для  $\Gamma_{12}(k, \omega)$ , мы получаем:

$$\Gamma_{12} = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2 \omega^2}{k^2 \left( \omega^2 - \frac{4\pi Z^2 e^2 N}{MV} \right)}. \quad (22.15)$$

Эта функция имеет полюс при

$$\omega = \omega_{p1} = \sqrt{\frac{4\pi Z^2 e^2 N}{MV}}, \quad (22.16)$$

соответствующем частоте так называемых плазменных колебаний ионов. Это совершенно особый тип колебаний, характерный для плазмы. Частота плазменных колебаний в первом приближении не зависит от импульса. Для получения этой зависимости необходимо взять следующее приближение формулы (22.11) по  $\frac{v_i k}{\omega}$ . При этом получаем полюс  $\Gamma$  при

$$\omega^2 = \omega_{p1}^2 + 3 \frac{T}{M} k^2 = \omega_{p1}^2 \left[ 1 + 3 \left( \frac{k}{x_i} \right)^2 \right], \quad (k/x_i) \ll 1. \quad (22.17)$$

Затухание плазменных колебаний можно получить, если учесть вклад от обхода полюса в преобразованном интеграле (22.11). Оно оказывается экспоненциально малым:

$$\gamma = \omega_{p1} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left( \frac{x_i}{k} \right)^3 e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x_i}{k} \right)^2}. \quad (22.18)$$

В области  $k \ll \frac{|\omega|}{p_0} \sqrt{Mm}$  электронная петля преобладает над ионной. Это положение естественно сохраняется при  $v_e k \ll |\omega|$  ( $v_e = \frac{p_0}{m}$ ). Из (22.10) находим:

$$\Pi_e = \frac{p_0^2}{\pi^2 v_e} \left[ 1 - \frac{\omega}{2k v_e} \ln \left| \frac{\omega + k v_e}{\omega - k v_e} \right| + \frac{i\pi |\omega|}{2k v_e} \theta(k v_e - |\omega|) \right], \quad (22.19)$$

где  $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

В области  $\frac{|\omega| m}{p_0} \ll k \ll \frac{|\omega|}{p_0} \sqrt{Mm}$  имеем  $\Pi_e = \frac{p_0 m}{\pi^2}$  и, следовательно,

$$\Gamma_{12}(k, \omega) = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 + \kappa_e^2}, \quad (22.20)$$

где  $\kappa_e$  — обратный дебаевский радиус электронов,

$$\kappa_e = \sqrt{\frac{4p_0 m e^2}{\pi}}. \quad (22.21)$$

В области  $\omega \gg k v_e$  находим:

$$\Pi_e = -\frac{p_0^3}{\pi^2 m} \frac{k^2}{3\omega^2} \left[ 1 + \frac{3}{5} \frac{v_e^2 k^2}{\omega^2} \right]. \quad (22.22)$$

Подставляя это в (22.8), получаем:

$$\Gamma_{12}(k, \omega) = \frac{4\pi e^2 Z_1 Z_2}{k^2 \left\{ 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\omega^2 V} \left[ 1 + \frac{3}{5} \frac{v_e^2 k^2}{\omega^2} \right] \right\}}. \quad (22.23)$$

Это выражение имеет полюс в точке

$$\omega^2 = \omega_{p2}^2 + \frac{3}{5} v_e^2 k^2, \quad (22.24)$$

где

$$\omega_{p2}^2 = \frac{4\pi e^2 N_e}{mV}, \quad v_e k \ll \omega_{p2}. \quad (22.25)$$

Полюс соответствует так называемым плазменным колебаниям электронов. Так же как и в случае плазменных колебаний ионов, частота почти не зависит от длины волны. Дисперсия колебаний выражается малой добавкой. Затухание колебаний может быть получено так же, как и в предыдущем случае, если учесть экспоненциально малый вклад от обхода полюса в преобразованном интеграле (22.11). Оно оказывается про-

порциональным  $e^{-\frac{m\omega_{p2}^2}{2k^2 T}}$ . При очень низких температурах это выражение оказывается неправильным, так как в затухании имеются большие члены, происходящие от следующих приближений по  $e^2$ .

Из формулы (22.23) следует, что в пределе  $\frac{k}{\omega} \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\Gamma \rightarrow -\infty$ . Таким образом, на данном примере видно,

что  $\Gamma^\omega$  при кулоновском взаимодействии содержит бесконечную константу.

**3. Электронный спектр.** Поскольку мы рассматриваем температуры, которые для электронов являются очень низкими, можно поставить вопрос о спектре электронных возбуждений. Как и в предыдущем параграфе, мы ограничимся здесь случаем, когда возбуждения находятся на расстояниях от ферми-поверхности, значительно превышающих  $T$ . Это дает нам возможность использовать технику при  $T=0$ .

Как известно из § 7, для получения спектра необходимо найти полюсы электронной гриновской функции. Запишем  $G_e$  в виде  $G_e = (\varepsilon - \xi + \Delta\mu - \Sigma)^{-1}$ , где  $\Delta\mu$  — возможная поправка к химическому потенциалу. Добавка первого порядка к собственно энергетической части  $\Sigma$  изображена на рис. 61.



Рис. 61.

Аналитическое выражение для этой добавки имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= 4\pi e^2 i \int \frac{1}{(p-p_1)^2} e^{i\varepsilon_1 t} G_e^{(0)}(\varepsilon_1, p_1) \frac{d\varepsilon_1 dp_1}{(2\pi)^4} = \\ &= -\frac{4\pi e^2}{(2\pi)^3} \int_{|p_1| < p_0} \frac{dp_1}{(p-p_1)^2} = \frac{e^2}{\pi} \left( \frac{p^2 - p_0^2}{2p} \ln \left| \frac{p_0 + p}{p_0 - p} \right| - p_0 \right). \end{aligned} \quad (22.26)$$

Виду того, что это выражение не зависит от  $\varepsilon$ , оно представляет собой поправку к энергии квазичастиц. Поскольку граничный импульс Ферми не меняется от взаимодействия и в то же время он связан с химическим потенциалом соотношением  $\varepsilon(p_0) = \mu$ , то выражение  $\Sigma_1$  при  $p = p_0$  надо рассматривать как изменение химического потенциала

$$\Delta\mu = -\frac{e^2}{\pi} p_0. \quad (22.27)$$

Однако выражение (22.26) не вполне корректно. Поправка к скорости возбуждений  $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial p}$  обращается в бесконечность на ферми-границе. Этот результат связан с тем, что при  $p \rightarrow p_0$  в интеграле (22.26) становятся существенными малые передачи импульса в вершине. При этом необходимо учесть все петли, нанизанные на основной пунктир,

иначе говоря, заменить  $\frac{4\pi e^2}{(p-p_1)^2}$  на выражение для  $\Gamma_{ee}(p_1-p, \varepsilon_1-\varepsilon)$ , соответствующее (22.8)<sup>1)</sup>.

Нам будет удобнее вычислить не всю величину  $\Sigma$ , а разность между  $\Sigma$  и уже вычисленной выше частью  $\Sigma_1$ . Эта разность изображена интегралом (22.26), в котором вместо

$$\frac{4\pi e^2}{(p-p_1)^2} \text{ стоит } \Gamma_{ee} - \frac{4\pi e^2}{(p-p_1)^2}.$$

Сделаем теперь ряд преобразований наподобие тех, которые были применены в предыдущем параграфе. Введем новые переменные:  $\varepsilon_1 - \varepsilon = \omega$  вместо  $\varepsilon_1$ ,  $k = |p_1 - p|$  вместо  $\cos(\widehat{p_1 p})$ . При этом наш интеграл преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Sigma - \Sigma_1 = & - \frac{i}{(2\pi)^3 p} \int_0^\infty k dk \int_{|p-k|}^{p+k} p_1 dp_1 \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{4\pi e^2}{k^2} \times \\ & \times \frac{4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_i)}{k^2 + 4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_i)} \frac{1}{\varepsilon + \omega - \xi(p_1) + i\delta \operatorname{sign}(p_1 - p_0)}. \end{aligned}$$

В этом интеграле существенны только малые значения  $k$  ( $k^2 \leq 4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_i)$ ). Если мы будем интересоваться значениями  $p$  в окрестности  $p_0$ , то интеграл по  $p_1$  берется в узкой области вблизи  $p_0$ . Введем вместо  $p_1$  переменную  $\xi_1 = v(p_1 - p_0)$  (ниже мы обозначаем  $v = v_e = \frac{p_0}{m}$ ). Тогда интеграл для  $\Sigma - \Sigma_1$  может быть записан в виде

$$\begin{aligned} \Sigma - \Sigma_1 = & - \frac{i}{(2\pi)^3 v} \int_0^\infty k dk \int_{\xi-vk}^{\xi+vk} d\xi_1 \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{4\pi e^2}{k^2} \times \\ & \times \frac{4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_i)}{k^2 + 4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_i)} \frac{1}{\varepsilon + \omega - \xi_1 + i\delta \operatorname{sign} \xi_1}. \end{aligned} \quad (22.28)$$

Из предыдущего (см. (22.22)) следует, что подынтегральное выражение убывает при больших  $\omega$  как  $\omega^{-3}$ , т. е.

<sup>1)</sup> Кроме того, функцию  $G_e^{(0)}$  надо заменить на полную  $G_e$ -функцию. Однако ввиду того, что величина  $\Sigma - \Delta\mu$  оказывается малой по сравнению с  $\xi$ , ее можно заменить на  $i\delta \operatorname{sign}(p - p_0)$ , иначе говоря, оставить  $G_e^{(0)}$ .

интеграл по  $\omega$  и  $\xi_1$  является сходящимся. Ввиду этого мы можем проинтегрировать сначала по  $\xi_1$ . При этом получаем:

$$\Sigma - \Sigma_1 = - \frac{l}{(2\pi)^3 v} \int_0^\infty k dk \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_l)}{k^2 + 4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_l)} \times \\ \times \left\{ \ln \left| \frac{\xi - \varepsilon - \omega - vk}{\xi - \varepsilon - \omega + vk} \right| - i\pi \operatorname{sign}(\varepsilon + \omega) \right\}_{\xi - vk < \varepsilon + \omega < \xi + vk}.$$

Ввиду того, что вся величина  $\Sigma - \Delta\mu$  дает лишь малую поправку к энергии возбуждений, полюс  $G$ -функции будет лежать вблизи  $\varepsilon \approx \xi$ . Поэтому при нахождении полюса мы можем положить в  $\Sigma - \Sigma_1$   $\varepsilon = \xi$ . Это сразу приводит к исчезновению логарифма в фигурной скобке, так как он становится нечетной функцией  $\omega$ , и интеграл по  $\omega$  берется в симметричных пределах. Таким образом, от всего интеграла по  $\xi_1$  остается только обход вокруг полюса. После небольших преобразований, учитывая симметрию  $\Pi_e$  и  $\Pi_l$  относительно изменения знака  $\omega$ , получаем:

$$\Sigma - \Sigma_1 = - \frac{\pi}{(2\pi)^3 v} \left[ \operatorname{sign} \xi \int_0^{\frac{|\xi|}{v}} k dk \int_{\xi - vk - \varepsilon}^{\xi + vk - \varepsilon} d\omega + \right. \\ \left. + \int_{\frac{|\xi|}{v}}^\infty k dk \left( \int_{-\varepsilon}^{vk + \xi - \varepsilon} d\omega + \int_{vk - \xi + \varepsilon}^{\varepsilon} d\omega \right) \right] \times \\ \times \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_l)}{k^2 + 4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_l)}.$$

Полагая  $\varepsilon = \xi$  и опять используя симметрию  $\Pi$ , получаем:

$$\Sigma - \Sigma_1 = - \frac{\operatorname{sign} \varepsilon}{(2\pi)^2 v} \int_0^{\frac{|\varepsilon|}{v}} d\omega \int_{\frac{\omega}{v}}^\infty k dk \frac{4\pi e^2}{k^2} \frac{4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_l)}{k^2 + 4\pi e^2 (\Pi_e + Z^2 \Pi_l)}. \quad (22.29)$$

Вычислить это выражение в общем случае довольно затруднительно из-за сложности  $\Pi_e$  и  $\Pi_l$ . Поэтому мы рассмотрим некоторые предельные случаи.

Из условий (22.2) и (22.3) следует, что мы можем все не рассматривать области  $|\varepsilon| \ll \kappa_i v_i \sim \omega_{p1}$ . Как уже отмечено, мы ограничиваемся случаем  $|\varepsilon| \gg T$ . Если считать  $\omega_{p1} \gg T$ , то невозможно удовлетворить одновременно условиям (22.2) и (22.3). Ввиду этого мы вычислим выражение (22.29) при  $|\varepsilon| \gg \kappa_i v_i$ . Нетрудно видеть, что в интеграле по  $\omega$  не будет существенна область  $\omega \leq \kappa_i v_i$ . Поскольку

при  $\omega \gg \kappa_i v_i$  величина  $\frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{M}{m}} \gg \kappa_e$ , то интеграл по  $k$

будет браться по области  $\frac{\omega}{v} \leq k \leq \kappa_e \ll \frac{\omega}{v} \sqrt{\frac{M}{m}}$ . При этом ионная петля дает меньший вклад, чем электронная.

Рассмотрим область  $|\varepsilon| \ll \kappa_e v$ . При этом в области  $k \sim \kappa_e$   $\omega \ll kv$ , а в области  $k \ll \kappa_e$   $\Pi_e$  не входит в интеграл (22.29) и, следовательно, можно подставить  $4\pi e^2 \Pi_e \approx \approx \kappa_e^2 \left(1 + \frac{i\pi|\omega|}{2kv}\right)$ , где второй (мнимый) член значительно меньше первого. Подставляя это выражение в интеграл (22.29), находим:

$$\Sigma - \Sigma_1 = -\frac{e^2}{v} \left[ \frac{\varepsilon}{\pi} \left( \ln \frac{\kappa_e v}{|\varepsilon|} + 1 \right) + \frac{i\pi}{16} \frac{\varepsilon |\varepsilon|}{\kappa_e v} \right]. \quad (22.30)$$

Теперь предположим  $|\varepsilon| \gg \kappa_e v$ . В интеграле будет существенна область  $k \sim \kappa_e$ ,  $\omega \sim v\kappa_e$ . Поэтому верхний предел интеграла по  $\omega$  можно положить равным  $\infty$ . При этом и действительная и мнимая части  $\Sigma - \Sigma_1$  будут (не считая множителя  $\text{sign } \varepsilon$ ) константами порядка  $e^2 \kappa_e$ :

$$\Sigma - \Sigma_1 = -e^2 \kappa_e \text{sign } \varepsilon (\beta_1 + i\beta_2), \quad (22.31)$$

где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — действительная и мнимая части интеграла

$$\frac{1}{2} \int_0^1 du \left[ 1 - u \left( \text{arth } u - \frac{i\pi}{2} \right) \right]^{1/2} \quad (22.32)$$

(здесь берется значение корня с положительной мнимой частью).



Из уравнения  $\varepsilon - \xi - \Sigma = 0$  находим энергетический спектр и затухание электронных возбуждений в разных областях:

$$a) \omega_{p1} \ll \xi(p) \ll \omega_{p2},$$

$$\varepsilon(p) = \xi(p) \left[ 1 + \frac{e^2}{\pi v} \left( \ln \frac{2p_0}{\kappa_e} - 1 \right) \right],$$

$$\gamma(p) = \frac{\pi}{16} \frac{e^2}{v} \frac{\xi |\xi|}{\kappa_e v};$$

$$b) \xi(p) \gg \omega_{p2}, \quad (22.33)$$

$$\varepsilon(p) = \xi(p) \left[ 1 + \frac{e^2}{\pi} \frac{m}{p} \ln \left| \frac{p_0 + p}{p_0 - p} \right| \right],$$

$$\gamma(p) = e^2 \kappa_e \operatorname{sign} \xi \beta_2.$$

**4. Термодинамические функции.** Последнее, что мы рассмотрим, — это термодинамические функции вырожденной плазмы<sup>1)</sup>. Согласно формуле (10.22), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 = & \frac{1}{2} \int_0^{e^2} d(e^2) \int dr d^4x' \frac{\delta(\tau - \tau')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left[ \langle \tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(x') \times \right. \\ & \times \tilde{\psi}_\beta(x') \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle - 2Z \langle \tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\Phi}(x') \tilde{\Phi}(x') \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle + \\ & \left. + Z^2 \langle \tilde{\Phi}(x) \tilde{\Phi}(x') \tilde{\Phi}(x') \tilde{\Phi}(x) \rangle \right]. \quad (22.34) \end{aligned}$$

Выражения в скобках  $\langle \dots \rangle$  можно выразить через функции  $\mathfrak{G}$  и  $\mathcal{J}$ ; например:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(x') \tilde{\psi}_\beta(x') \tilde{\psi}_\alpha(x) \rangle = & -2\mathfrak{G}_e^{(0)}(x - x') \mathfrak{G}_e^{(0)}(x' - x) + \\ & + \left( \frac{N_e}{V} \right)^2 - \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 \mathfrak{G}_e^{(0)}(x - x_1) \mathfrak{G}_e^{(0)}(x' - x_2) \times \\ & \times \mathfrak{G}_e^{(0)}(x_3 - x) \mathfrak{G}_e^{(0)}(x_4 - x') \mathcal{J}_{\alpha\beta\alpha\beta}^{ee}(x_1 x_2, x_3 x_4). \end{aligned}$$

Член  $\left( \frac{N_e}{V} \right)^2$  можно отбросить, так как в (22.34) он сокращается с аналогичными членами от электронно-ионного и ионного взаимодействий вследствие условия электронейтральности плазмы. При расписывании средних от четырех операторов поля, происходящих от электрон-ионного и ион-

<sup>1)</sup> Термодинамические функции вырожденной плазмы были вычислены А. А. Веденовым [38].

ионного взаимодействия, не надо писать также член с двумя  $\mathfrak{G}$ -функциями. Дело в том, что этот член имеет обменное происхождение. Обмен ионов с электронами невозможен, а обмен между ионами дает очень малый эффект, так как ионы образуют больцмановский газ.

Таким образом, получающееся выражение состоит из двух членов. Один из них происходит от произведения двух электронных  $\mathfrak{G}$ -функций (он соответствует обменной энергии электронов), другой представляет сумму членов с различными  $\mathcal{S}$ .

Рассмотрим сначала первый член. В импульсном представлении он равен

$$\frac{\Delta\Omega_1}{V} = -4\pi e^2 T^2 \sum_{\tau_1, \tau_2 \rightarrow +0} \int_{n_1 n_2} \frac{dp_1 dp_2}{(2\pi)^6} \frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \times \\ \times \frac{e^{i\varepsilon_{n_1}\tau_1}}{i\varepsilon_{n_1} - \varepsilon_0(p_1) + i\mu} \frac{e^{i\varepsilon_{n_2}\tau_2}}{i\varepsilon_{n_2} - \varepsilon_0(p_2) + i\mu}.$$

Множители  $e^{i\varepsilon n\tau}$  учитывают порядок операторов  $\psi$  в гамильтониане (18.1). Суммирование по  $n_1$  и  $n_2$  независимы. Вспомогая определение фурье-компонент функции  $\mathfrak{G}$  получаем:

$$T \sum_{\substack{n \\ \tau \rightarrow +0}} \frac{e^{i\varepsilon n\tau}}{i\varepsilon_n - \varepsilon_0(p) + i\mu} = \mathfrak{G}_e^{(0)}(-\tau, p) = n(p).$$

Отсюда находим:

$$\frac{\Delta\Omega_1}{V} = -4\pi e^2 \int \frac{dp_1 dp_2 n(p_1) n(p_2)}{(2\pi)^6 (p_1 - p_2)^2}. \quad (22.35)$$

Для больцмановского газа такой член мал, так как в него входят числа заполнения  $n \ll 1$ . Это оправдывает пренебрежение ионным обменом.

Теперь рассмотрим остальные члены. В импульсном представлении получаем:

$$\frac{\Delta\Omega_2}{V} = -\frac{4\pi}{2} \int_0^{e^2} d(e^2) T^3 \sum_{n_1 n_2 m} \int \frac{dk dp_1 dp_2}{(2\pi)^9} \frac{1}{k^2} \times \\ \times \{4\mathfrak{G}_{n_1}^e(p_1) \mathfrak{G}_{n_1+m}^e(p_1+k) \mathfrak{G}_{n_2}^e(p_2) \mathfrak{G}_{n_2+m}^e(p_2+k) \mathcal{J}_{ee}(k, \omega_m) - \\ - 8Z \mathfrak{G}_{n_1}^i(p_1) \mathfrak{G}_{n_1+m}^i(p_1+k) \mathfrak{G}_{n_2}^e(p_2) \mathfrak{G}_{n_2+m}^e(p_2+k) \mathcal{J}_{ei}(k, \omega_m) + \\ + 4Z^2 \mathfrak{G}_{n_1}^i(p_1) \mathfrak{G}_{n_1+m}^i(p_1+k) \mathfrak{G}_{n_2}^i(p_2) \mathfrak{G}_{n_2+m}^i(p_2+k) \mathcal{J}_{ii}(k, \omega_m)\}.$$

Ввиду того, что вершинные части  $\mathcal{J}$  сами по себе имеют порядок  $e^2$ , это выражение формально четвертого порядка по  $e^2$ . Однако здесь важно то, что в интеграле по  $k$  и сумме по  $m$  существенны малые  $k$  и  $m$ . Сравнивая с формулой (22.9), мы можем написать:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega_2}{V} = & -2\pi \int_0^{e^2} d(e^2) T \sum_m \int \frac{dk}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2} \{ \mathcal{P}_e^2(\omega_m, k) \mathcal{J}_{ee}(\omega_m, k) + \\ & + 2Z \mathcal{P}_i(\omega_m, k) \mathcal{P}_e(\omega_m, k) \mathcal{J}_{ei}(\omega_m, k) + \\ & + Z^2 \mathcal{P}_i^2(\omega_m, k) \mathcal{J}_{ii}(\omega_m, k) \} = -8\pi^2 \int_0^{e^2} e^2 d(e^2) T \times \\ & \times \sum_m \int dk \frac{1}{k^2} \frac{\mathcal{P}_e^2 + 2Z^2 \mathcal{P}_i \mathcal{P}_e + Z^4 \mathcal{P}_i^2}{k^2 + 4\pi e^2 (\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i)} = \\ = & -\frac{1}{\pi} \int_0^{e^2} e^2 d(e^2) T \sum_m \int dk \frac{1}{k^2} \frac{(\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i)^2}{k^2 + 4\pi e^2 (\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i)}. \end{aligned} \quad (22.36)$$

Существенные здесь значения  $k^2$  имеют порядок  $4\pi e^2 (\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i)$ . Нам необходимо определить соотношение между значениями  $v_e k$ ,  $v_i k$  и  $\omega_m = 2m\pi T$ . Нетрудно видеть, что интеграл по  $k$  в (22.36) растет с увеличением  $4\pi e^2 (\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i)$ . Рассмотрим формулу (22.11) для  $\mathcal{P}$ . Если предположить, что  $v k \ll T$ , то наибольшее значение  $\mathcal{P}(\omega_m, k)$  получается при  $\omega_m = 0$ . При этом наиболее существенна ионная петля, для которой  $\mathcal{P}_i \sim \frac{N_i}{TV}$  и, следовательно,  $4\pi e^2 (\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i) \sim \frac{e^2}{V} \frac{N_i Z^2}{T}$ . Отсюда следует  $(v_i k)^2 \sim \frac{T}{M} \frac{N_i}{V} \frac{e^2}{T} \sim \frac{e^2 N_i}{VM} \ll T^2$ . Таким образом, наше предположение является оправданным. Мы можем в (22.36) брать только слагаемое с  $m = 0$  и положить  $\mathcal{P}_e + Z^2 \mathcal{P}_i \approx \frac{Z^2}{V} \frac{\partial N_i}{\partial \mu}$ . После этого интегрирование по  $k^2$  дает:

$$\frac{\Delta\Omega_2}{V} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3} (Ze)^3 T \left( \frac{\partial N_i}{V \partial \mu} \right)^{3/2} = -\frac{2\sqrt{\pi}}{3} (Ze)^3 \frac{(N_i/V)^{3/2}}{T^{1/2}}. \quad (22.37)$$

При наших предположениях (22.2), (22.3) этот член мал по сравнению с (22.35). Однако это единственный член порядка  $e^3$ , ибо поправка к члену  $\Delta\Omega_1$  должна быть порядка  $e^4$ .

Если не накладывать на электронный газ условия сильной вырожденности, то  $\Delta\Omega_2$  может стать порядка  $\Delta\Omega_1$ . При этом, однако, надо учесть и электронную петлю. Таким образом, получаем:

$$\frac{\Delta\Omega}{V} = -4\pi e^2 \int \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6} \frac{n(\mathbf{p}_1) n(\mathbf{p}_2)}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)^2} - \\ - \frac{2V\pi}{3} e^3 T \left( \frac{Z^2}{V} \frac{\partial N_i}{\partial \mu} + \frac{1}{V} \frac{\partial N_e}{\partial \mu} \right)^{3/2}.$$

Эта формула пригодна при выполнении условий

$$e^2 m \left( \frac{V}{N} \right) \ll 1, \quad T \gg \max \left\{ e^2 \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3}, \frac{1}{M} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \right\}. \quad (22.38)$$

## СИСТЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗЕ-ЧАСТИЦ

### § 23. Применение методов теории поля к системе частиц Бозе при абсолютном нуле температур

Обобщение методов квантовой теории поля на случай системы бозе-частиц при температурах ниже температуры «бозе-конденсации» представляет большие трудности. Тем не менее соответствующий формализм разработан (Беляев [39]), и эту главу мы посвятим его изучению. Как всегда, сначала будет рассмотрен случай абсолютного нуля температур.

Повсюду в предыдущем изложении основой построения диаграммной техники служило то обстоятельство, что усреднение произведения нескольких невзаимодействующих  $\psi$ -операторов можно свести к произведениям попарных средних от операторов  $\psi\psi^+$ . Это являлось следствием теоремы Вика, согласно которой среднее от хронологизированного произведения любого числа операторов поля разбивается на сумму произведений попарных и нормальных произведений. Для системы ферми-частиц основное состояние — «вакуум» (мы рассматриваем пока только случай абсолютного нуля температур) — таково, что, изменяя определение операторов рождения и уничтожения, можно было добиться, чтобы среднее от нормальных произведений стало равным нулю. Совершенно иная ситуация имеет место для системы бозе-частиц. По свойствам статистики в бозе-газе при низких температурах в состоянии с импульсом, равным нулю, может быть сосредоточено сколь угодно большое число частиц. В идеальном газе при температуре  $T=0$  число частиц на нижнем уровне просто равно полному числу частиц в

системе. Таким образом, характерным для состояния бозе-конденсации является то, что плотность числа частиц на основном уровне, с импульсом, равным нулю, стремится к конечному пределу, когда полное число частиц  $N$  и объем всей системы стремятся к бесконечности. Поэтому средние от нормального произведения операторов  $a_0^+$  и  $a_0$  вида  $(a_0^+)^n a_0^n$  не только не равны нулю, но могут быть сколь угодно велики.

Предположим для начала, что система находится при температуре абсолютного нуля. Как мы только что говорили, в идеальном бозе-газе все частицы находятся на уровне с импульсом, равным нулю. Выделим в операторах  $\psi(x)$  и  $\psi^+(x)$  в представлении взаимодействия операторы, соответствующие рождению и уничтожению частиц в состоянии с  $p=0$ :

$$\psi(x) = \xi_0 + \psi'(x); \quad \psi^+(x) = \xi_0^+ + \psi'^+(x) \quad (23.1)$$

(ниже мы будем использовать обозначения  $\xi_0 = \frac{a_0}{\sqrt{V}}$ ,  $\xi_0^+ = \frac{a_0^+}{\sqrt{V}}$ ).

Полное число частиц  $N = V \xi_0^+ \xi_0$  сколь угодно велико при  $V \rightarrow \infty$ . Поэтому, если в соотношении коммутации

$$\xi_0 \xi_0^+ - \xi_0^+ \xi_0 = \frac{1}{V}$$

пренебречь правой частью, операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  в первом приближении можно рассматривать как числа, что и делалось в гл. II. Мы увидим, однако, что последнее имеет смысл только для сколь угодно слабого взаимодействия.

Полный гамильтониан системы будем писать в виде

$$H = H_0 + H_{int},$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2m} \int \nabla \psi^+(x) \nabla \psi(x) dr,$$

а  $H_{int}$  — гамильтониан взаимодействия, вид которого мы пока не конкретизируем. Все известные соотношения теории поля, связывающие операторы в гайзенберговском представлении и в представлении взаимодействия с помощью

$S$ -матрицы, остаются в силе, так же как и само определение  $S$ -матрицы:

$$S = T \exp \left\{ -i \int H_{int}(x) d^4x \right\}. \quad (23.2)$$

Одночастичная функция Грина  $G(x, x')$  определяется через операторы в гайзенберговском представлении

$$G(x - x') = -i \langle T(\tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}^+(x')) \rangle \quad (23.3)$$

и в представлении взаимодействия

$$G(x - x') = - \frac{i \langle T(\psi(x) \psi^+(x') S) \rangle}{\langle S \rangle} \quad (23.3')$$

(средние в формулах подразумеваются по основному состоянию  $N$  взаимодействующих частиц в (23.3) и по основному состоянию  $N$  невзаимодействующих частиц в (23.3')). Оказывается удобным вместо (23.3) рассматривать две части функции Грина  $G(x - x')$ :

$$G'(x - x') = -i \langle T(\tilde{\psi}'(x), \tilde{\psi}'^+(x')) \rangle = \frac{-i \langle T(\psi'(x), \psi'^+(x') S) \rangle}{\langle S \rangle}, \quad (23.4)$$

и

$$G_0(t - t') = -i \langle T(\tilde{\xi}_0(t), \tilde{\xi}_0^+(t')) \rangle = \frac{-i \langle T(\xi_0(t) \xi_0^+(t') S) \rangle}{\langle S \rangle}; \quad (23.5)$$

$G'(x - x')$  есть функция Грина «надконденсатных» частиц;  $G_0(t - t')$  — функция Грина частиц конденсата. Очевидно,  $G_0(t - t')$  не зависит от разности пространственных координат и может поэтому быть определена как компонента Фурье с нулевым импульсом от полной функции Грина

$$G_0(t - t') = \int G(r - r', t - t') dr'.$$

Плотность числа частиц, находящихся в конденсате, равна,

$$n_0 = i G_0(t - t'), \\ t' = t + 0.$$

Что же касается плотности полного числа частиц, она всегда

равна

$$n = n' + n_0 = i(G'(0, t - t') + G_0(t - t')), \quad t' = t + 0. \quad (23.6)$$

В соответствии с § 4 отметим еще раз то обстоятельство, что при наличии взаимодействия число частиц в конденсате отлично от полного числа частиц.

Перейдем теперь непосредственно к построению диаграммной техники теории возмущений для взаимодействующих частиц. В соответствии с особой ролью, которую играют частицы конденсата, будем считать, что в выражении для гамильтониана  $H_{int}$  произведена подстановка (23.1) и  $H_{int}$  приведен к виду, в котором фигурируют отдельно операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ ,  $\psi'$  и  $\psi'^+$ . Аналогично будем считать, что в определении  $S$ -матрицы (23.2) подразумевается  $H_{int}(x)$  именно в такой форме. Наше последующее изложение применимо для гамильтониана  $H_{int}(x)$ , имеющего вид произведения любого числа операторов  $\psi$  и  $\psi^+$  с произвольным законом взаимодействия между частицами.

После указанного разделения операции хронологического упорядочения  $T$  и взятия среднего по основному состоянию невзаимодействующих частиц можно представить каждую в виде двух последовательных операций, отдельно по отношению к частицам в конденсате и к надконденсатным частицам:

$$T = T^0 \cdot T', \quad \langle \dots \rangle = \langle \langle \dots \rangle' \rangle^0, \quad (23.7)$$

где  $T^0$  и  $\langle \dots \rangle^0$  применяются к операторам  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . Разложение  $S$ -матрицы по степеням взаимодействия содержит в каждом члене набор различных произведений операторов  $\xi_0$ ,  $\xi_0^+$ ,  $\psi'$  и  $\psi'^+$ . Что касается свободных операторов  $\psi'$  и  $\psi'^+$ , то применительно к ним можно пользоваться обычной теоремой Вика, поскольку средние от нормальных произведений надконденсатных частиц равны нулю. Хронологизированные попарные средние от  $\psi'\psi'^+$ , которые мы обозначим как  $G^{(0)}(x - x')$ , отличны от нуля и равны

$$\begin{aligned} G^{(0)}(x - x') &= -i \langle T'(\psi'(x) \psi'^+(x')) \rangle' \equiv \\ &\equiv -i \langle T(\psi'(x) \psi'^+(x')) \rangle. \end{aligned} \quad (23.8)$$



Соответствующие компоненты Фурье имеют вид

$$G^{(0)}(x - x') = (2\pi)^{-4} \int G^{(0)}(p) e^{ip(x-x')} d^4 p, \quad (23.9)$$

$$G^{(0)}(p) = \frac{1}{\omega - \frac{p^2}{2m} + i\delta}.$$

Поэтому, если рассматривать операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  как некоторые параметры (числовые), они играли бы роль внешнего поля в различных вершинах диаграмм.

Рассмотрим вопрос о вычислении функции Грина для произвольного числа надконденсатных частиц. Функция Грина имеет вид

$$G_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n) = \frac{(-i)^n \langle T(\psi'(x_1) \dots \psi'(x_n); \psi'^+(x'_1) \dots \psi'^+(x'_n) S) \rangle}{\langle S \rangle}. \quad (23.10)$$

Разобьем операции  $T$  и  $\langle \dots \rangle$  на операции  $T'$ ,  $T^0$  и  $\langle \dots \rangle'$ ,  $\langle \dots \rangle^0$ , согласно (23.7), и сначала изучим ряд теории возмущений для величины

$$\bar{G}_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n) = (-i)^n \langle T'(\psi'(x_1) \dots \psi'(x_n); \psi'^+(x'_1) \dots \psi'^+(x'_n) S) \rangle'. \quad (23.11)$$

Поскольку операции  $T'$  и  $\langle \dots \rangle'$  не затрагивают операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ , последние относительно этих операций представляют собой параметры, никак не влияющие на хронологизацию и усреднение различных произведений операторов надконденсатных частиц. Поэтому соответствующий матричный элемент может быть написан по обычным правилам построения фейнмановских диаграмм и содержит произведения хронологических средних (23.8) и степеней операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . Число последних в данном порядке разложения  $S$ -матрицы по степеням  $H_{int}$  зависит от вида гамильтониана взаимодействия  $H_{int}$  и от выбора тех или иных членов в  $H_{int}$  после подстановки (23.1). Например, взаимодействие (см. § 25)

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int \psi^+(x) \psi^+(x') U(r - r') \psi(x') \psi(x) dr dr' \quad (23.12)$$

после подстановки

$$\psi \rightarrow \xi_0 + \psi'; \quad \psi^+ \rightarrow \xi_0^+ + \psi'^+$$

распадается на восемь членов, начиная с члена четвертой степени по  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ :  $\frac{1}{2} (\xi_0^+)^2 (\xi_0)^2 \int U(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , и кончая членом

$$\frac{1}{2} \int \psi'^+(x) \psi'^+(x') U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi'(\mathbf{r}') \psi'(\mathbf{r}) d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

На рис. 62 изображена в качестве примера одна из диаграмм второго порядка для функции  $\bar{G}(x - x')$ . На этой диаграмме сплошная линия соответствует функции  $G^{(0)}(x - x')$  (23.9), волнистая линия между двумя точками есть  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — потенциал взаимодействия, а с помощью ломаной свободной линии мы изображаем здесь операторы  $\xi_0$

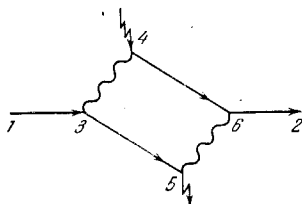


Рис. 62.

и  $\xi_0^+$ , причем линия, направленная к соответствующей вершине, есть  $\xi_0^+$ , от вершины —  $\xi_0$ . Матричный элемент этой диаграммы равен

$$\begin{aligned} \bar{G}(x_1 - x_2) = & i \int G^{(0)}(x_1 - x_3) G^{(0)}(x_3 - x_5) \xi_0(t_5) U(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \times \\ & \times \xi_0^+(t_4) G^{(0)}(x_4 - x_6) U(\mathbf{r}_6 - \mathbf{r}_5) G^{(0)}(x_6 - x_2) d^4x_3 \dots d^4x_6. \end{aligned} \quad (23.13)$$

В общем случае (23.10) матричный элемент  $m$ -го порядка в  $\bar{G}_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n)$  содержит произведение любого числа операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . Заметим только, что степени  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  обязательно совпадают. Это связано с тем, что взаимодействие  $H_{int}$  сохраняет полное число частиц. Поэтому если числа операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  не равны, то не равны друг другу числа операторов  $\psi$  и  $\psi'^+$  в среднем  $\langle \dots \rangle'$ , которое, следовательно, равно нулю.

Пусть  $M_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n)$  есть связанная диаграмма в (23.11), имеющая  $2m$  вершин, соответствующих  $m$  опера-

торам  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . Под связанной диаграммой мы, как обычно, подразумеваем диаграмму, которая не распадается на части, не соединенные хотя бы одной линией. Рассмотрим наряду с  $M_n$  все диаграммы, отличающиеся от нее наличием «вакуумных» петель — различных несвязанных диаграмм. Как хорошо известно из теории поля, вся совокупность таких диаграмм приводит к умножению каждого матричного элемента на среднее значение  $S$ -матрицы. В нашем случае  $M_n$  умножается на  $\langle S \rangle'$ . Таким образом, при построении ряда теории возмущений для величин (23.11) достаточно рассмотреть только связанные диаграммы, умножая соответствующий матричный элемент на  $\langle S \rangle'$ .

Перейдем теперь от вычислений  $\bar{G}_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n)$  к вычислению

$$G_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n) \equiv \frac{\langle T^0 \bar{G}_n(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n) \rangle^0}{\langle S \rangle}.$$

На этом этапе становится существенным операторный характер  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . До сих пор это обстоятельство можно было игнорировать, поскольку операции  $T'$  и  $\langle \dots \rangle'$  не затрагивают  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ , которые коммутируют с  $\psi'$  и  $\psi'^+$ . Каждый матричный элемент  $M_n$  в  $\bar{G}_n$ , подобно (23.13), содержит под интегралом определенное число операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ , умноженных на средние вида (23.8). Пусть в  $M_n$  содержатся

$$\xi_0(t_1) \dots \xi_0(t_m) \xi_0^+(t'_1) \dots \xi_0^+(t'_m).$$

Для окончательного нахождения  $G(x_1 \dots x_n; x'_1 \dots x'_n)$  необходимо вычислить средние  $\langle \dots \rangle^0$  вида

$$\frac{\langle T^0(\xi_0(t), \dots, \xi_0(t_m), \xi_0^+(t'_1) \dots \xi_0^+(t'_m) \langle S \rangle') \rangle^0}{\langle S \rangle}.$$

Поскольку в свою очередь операции  $T^0$  и  $\langle \dots \rangle^0$  не затрагивают надконденсатных частиц, мы видим, что искомые средние есть  $m$ -частичные функции Грина частиц конденсата:

$$\begin{aligned} G_{0m}(t_1 \dots t_m; t'_1 \dots t'_m) &= \\ &= \frac{\langle T(\xi_0(t_1) \dots \xi_0(t_m) \xi_0^+(t'_1) \dots \xi_0^+(t'_m) S) \rangle}{\langle S \rangle}. \end{aligned} \quad (23.14)$$

Следовательно, для определения функций Грина надконденсатных частиц через ряд теории возмущений необходимо знать точные  $m$ -частичные функции Грина частиц конденсата.

Сложность непосредственного вычисления этих величин из формул вида (23.14) через значения плотности  $n$  числа частиц в конденсате без взаимодействия связана с тем, что для произведения операторов  $\xi_0, \xi_0^+$  не имеет смысла разложение теоремы Вика на нормальные произведения, поскольку среднее по исходному состоянию от таких нормальных произведений типа  $N(a_0^+ \dots a_0 \dots)$  не только не равно нулю, но и очень велико. В то же время в (23.14) нельзя пренебречь некоммутативностью операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . В самом деле,  $\langle S \rangle'$  можно записать в виде <sup>1)</sup>

$$\langle S \rangle' = \exp \sigma, \quad (23.15)$$

где  $\sigma$  есть сумма всех односвязных (не разделяющихся на независимые части) «вакуумных» петель и функционал от  $\xi_0, \xi_0^+$ . Эта сумма пропорциональна объему (плотность числа частиц конденсата  $n_0 = \xi_0^+ \xi_0$  есть конечная величина). При формальном разложении  $\langle S \rangle'$  в ряд по степеням  $\sigma$  в (23.15) возникают любые степени  $V$ , поэтому хотя в соотношениях коммутации

$$\xi_0 \xi_0^+ - \xi_0^+ \xi_0 = \frac{1}{V}$$

правая часть имеет порядок  $1/V$ , пренебрежение ею было бы незаконно, поскольку малость величины  $1/V$  может быть компенсирована соответствующей степенью  $V$  при разложении (23.15).

Поэтому удобнее пойти по другому пути. Для этого заметим, что выражения (23.14) могут быть записаны непосредственно через гайзенберговские операторы

$$\begin{aligned} G_{0m}(t_1 \dots t_m; t'_1 \dots t'_m) &= \\ &= \langle T(\tilde{\xi}_0(t_1) \dots \tilde{\xi}_0(t_m) \tilde{\xi}_0^+(t'_1) \dots \tilde{\xi}_0^+(t'_m)) \rangle, \end{aligned} \quad (23.16)$$

<sup>1)</sup> В теории поля возможность представления  $\langle S \rangle$  в виде (23.15) доказывается в предположении, что  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  суть внешние параметры, не имеющие операторных свойств. Мы видим, однако, что в (23.14)  $\langle S \rangle'$  стоит под знаком хронологизации по операторам  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . Бозе-операторы, стоящие под знаком  $T$ -произведения, по самому смыслу этой операции можно переставлять между собой. Поэтому это предположение теории поля здесь выполнено.

где среднее значение произведения берется по основному состоянию взаимодействующих частиц. Рассмотрим сначала среднее  $V\langle\tilde{\xi}_0^+\tilde{\xi}_0\rangle$ , которое представляет собой точное число частиц, имеющих импульс, равный нулю. В идеальном газе это число при  $T=0$  попросту равно полному числу частиц  $N$  — все частицы находятся на уровне с  $p=0$ . Взаимодействие между частицами (отталкивательное на достаточно малых расстояниях — притяжение всюду сделало бы систему неустойчивой) приводит к уменьшению числа частиц с импульсом  $p=0$ . При этом, однако, как уже подчеркивалось в гл. I, конденсат не исчезает, т. е. среднее число частиц с нулевым импульсом остается сколь угодно большим для сколь угодно большого полного числа частиц в системе (плотность  $n_0$  числа частиц в конденсате остается конечной при любом взаимодействии частиц между собой, если  $V\rightarrow\infty$ ). Физически этот факт довольно очевиден, но логически нельзя исключить, конечно, возможности, что для некоторого взаимодействия  $n_0$  обращается в нуль. Мы не будем здесь заниматься доказательством нашего утверждения, тем более, что единственным физическим объектом в данном случае является гелий. Читатель найдет это доказательство в работе Беляева [39].

Изменение полного числа частиц, находящихся в конденсате, в результате взаимодействия и есть та причина, по которой нельзя было выше считать просто числом свободные операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ .

Построенный ряд теории возмущений надконденсатных функций Грина содержит средние от точных гайзенберговских операторов  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$ . Если конденсат не исчезает, то в свою очередь операторы  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$  по отношению к их действию на основное состояние взаимодействующих частиц также являются в первом приближении просто числами. Этим обстоятельством можно воспользоваться, чтобы упростить выражения для функций Грина частиц конденсата.

Не следует, конечно, забывать, что оператор  $\tilde{\xi}_0$  уничтожает, а оператор  $\tilde{\xi}_0^+$  рождает одну частицу. Поэтому, строго говоря, дело в том, что ниже всюду будут существенны только матричные элементы  $\tilde{\xi}_0$ ,  $\tilde{\xi}_0^+$  для переходов из основного состояния системы с  $N$  частицами ( $N\rightarrow\infty$ ) в основное же состояние системы с  $N\pm 1$  частицами: с физической

точки зрения, отнимая одну частицу из бесконечного их числа в бозе-конденсате или прибавляя туда одну частицу, мы практически не изменяем основного состояния системы, за исключением, скажем, увеличения его энергии на величину химического потенциала  $\mu$ . Называя, далее, операторы  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$  числами, мы всегда будем иметь в виду последнее обстоятельство.

Рассмотрим это более детально на примере одночастичной функции

$$G_0(t - t') = -i \langle T(\tilde{\xi}_0(t) \tilde{\xi}_0^+(t')) \rangle \approx -i \langle \tilde{\xi}_0(t) \tilde{\xi}_0^+(t') \rangle.$$

Последнее выражение представим в виде суммы произведений матричных элементов по промежуточным состояниям:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_N^* | \tilde{\xi}_0(t) \tilde{\xi}_0^+(t') | \Phi_N \rangle &= \langle \Phi_N^* | \tilde{\xi}_0(t) | \Phi_{N+1} \rangle \langle \Phi_{N+1}^* | \tilde{\xi}_0^+(t') | \Phi_N \rangle + \\ &+ \sum_s \langle \Phi_N^* | \tilde{\xi}_0(t) | \Phi_{N+1}^s \rangle \langle \Phi_{N+1}^{s*} | \tilde{\xi}_0^+(t') | \Phi_N \rangle, \end{aligned}$$

где  $\Phi_N$  и  $\Phi_{N+1}$  — основные состояния системы  $N$  и  $N+1$  взаимодействующих частиц, а  $\Phi_{N+1}^s$  — состояния системы  $N+1$  частиц, отличные от основного. В этом выражении член с суммой мал, поскольку, например,  $\tilde{\xi}_0^+ \Phi_N \simeq \Phi_{N+1}$ , а  $\Phi_{N+1}$  и  $\Phi_{N+1}^s$  ортогональны. Что же касается матричных элементов для переходов из основного состояния в основное, то зависимость их от времени может быть установлена с помощью обычной квантовомеханической формулы

$$-i \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi_N^* | \tilde{\xi}_0(t) | \Phi_{N+1} \rangle = \langle \Phi_N^* | [\hat{H}, \tilde{\xi}_0(t)] | \Phi_{N+1} \rangle$$

или

$$\tilde{\xi}_0(t) = \xi_0(0) e^{-it(E_{N+1} - E_N)}.$$

Воспользовавшись определением химического потенциала  $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$  и заменяя  $\xi_0(0) \rightarrow n_0^{1/2}$ , найдем:

$$iG_0(t - t') = n_0 e^{-i\mu(t - t')}. \quad (23.17)$$

Иными словами, функция  $G_0(t - t')$  распалась на произведение двух независимых множителей, причем  $\tilde{\xi}_0(t)$  соответствует множитель  $\sqrt{n_0} e^{-i\mu t}$ , а  $\tilde{\xi}_0^+(t') = \sqrt{n_0} e^{i\mu t'}$ . Очевидно, аналогичное положение имеет место для произвольной функ-

ции Грина частиц конденсата: при замене операторов  $\tilde{\xi}_0(t)$ ,  $\tilde{\xi}_0^+(t)$  числами надлежит каждому оператору сопоставить множитель указанного вида. Тем самым диаграммная техника для вычисления гриновских функций надконденсатных частиц сведена к обычной диаграммной технике, в которой операторы  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$  играют роль внешнего поля:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_0(t) &= \sqrt{n_0} e^{-i\mu t}, \\ \tilde{\xi}_0^+(t) &= \sqrt{n_0} e^{i\mu t}.\end{aligned}\tag{23.18}$$

Как обычно, при написании ряда теории возмущений следует учитывать только связанные графики. Учет несвязанных диаграмм сводится, как мы показали, к тому, что плотность числа частиц в конденсате идеального газа заменяется на точную величину плотности числа частиц в конденсате газа с взаимодействием между частицами, а также приводит к появлению частотных факторов (23.18). В остальном все диаграммы будут теми же, как если бы после подстановки в гамильтониан взаимодействия  $H_{int}$  операторов в виде (23.1) мы считали операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  в представлении взаимодействия внешними параметрами и при вычислении выражений (23.10) производили усреднение  $\langle \dots \rangle'$  и хронологизацию  $T'$  только по отношению к надконденсатным частицам (в связанных диаграммах). Чтобы получить окончательные выражения, необходимо произвести замену  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  в соответствии с (23.18). Еще раз отметим, что плотность числа частиц конденсата  $n_0$  в газе взаимодействующих частиц отлична от своей величины для идеального газа.

Вычисляя функцию Грина надконденсатных частиц с помощью развитой выше техники фейнмановских диаграмм, мы найдем для них выражения, в которых фигурируют два параметра, величина  $n_0$  и значение химического потенциала  $\mu$ . Вместо прямого вычисления по теории возмущений зависимости последних от плотности полного числа частиц в системе можно воспользоваться соотношениями общего порядка. Прежде всего, очевидное соотношение связывает плотность полного числа частиц в системе  $n_0$  и  $\mu$ :

$$n = n_0 + iG'(x - x'), \quad r = r'; \quad t' = t + 0. \tag{23.19}$$

Второе соотношение следует из условия минимальности энергии основного состояния относительно  $n_0$ . Вычисление энергии основного состояния  $E = \langle \hat{H} \rangle$  с помощью изложенной выше схемы приводит к некоторому выражению для  $E$  в зависимости от параметров  $n_0$  и  $\mu$ . Варьируя  $E$  по  $n_0$  при постоянном полном числе частиц (при постоянном  $n$ ), найдем второе условие

$$\left( \frac{\partial E}{\partial n_0} \right)_n = 0. \quad (23.20)$$

Два условия (23.19) и (23.20) в принципе решают задачу. Для практических вычислений оказывается более удобным вместо (23.20) использовать соотношение (24.17).

В заключение этого параграфа обсудим кратко вопрос о выборе термодинамических переменных. До сих пор в качестве независимой переменной мы пользовались полным числом частиц в системе. Это было связано с тем обстоятельством, что при построении теории возмущений нам пришлось исходить из характеристик идеального бозе-газа, в котором при конечном химическом потенциале бозе-конденсация отсутствует: как известно, химический потенциал идеального бозе-газа тождественно равен нулю на всем интервале температур от нуля до температуры конденсации  $T_0$ . Для системы взаимодействующих частиц химический потенциал  $\mu$  не равен нулю и поэтому является такой же равноправной термодинамической переменной, как и полное число частиц. Как обычно, значение  $\mu$  может быть найдено из условия, чтобы среднее число частиц в системе равнялось данному действительному числу частиц. По существу, именно это условие и выражает соотношение (23.19). Переход к химическому потенциалу  $\mu$  в качестве независимой переменной представляет то формальное удобство, что позволяет избавиться от дополнительных временных зависимостей в формулах (23.18), возникающих в матричных элементах от вершин с  $\tilde{\xi}_0(t)$  и  $\tilde{\xi}_0^+(t)$ .

Действительно, переход от переменной  $N$  к переменной  $\mu$ , как мы неоднократно видели, осуществляется заменой полного гамильтониана системы  $H$  на  $H - \mu N$ . Поскольку операторы  $\psi$  и  $\psi^+$  коммутируют с полным числом частиц  $N$  согласно

$$N\psi - \psi N = -\psi; \quad N\psi^+ - \psi^+ N = \psi^+,$$



изменение гамильтониана приведет к дополнительной временной зависимости операторов  $\psi$  и  $\psi^+$

$$\psi \rightarrow e^{i\mu t} \psi; \quad \psi^+ \rightarrow e^{-i\mu t} \psi^+. \quad (23.21)$$

Одновременно изменятся гриновские функции, например полная одночастичная функция Грина

$$G(x - x') \rightarrow e^{i\mu(t-t')} G(x - x'). \quad (23.22)$$

В компонентах Фурье такое преобразование означает замену в старых выражениях всех частот  $\omega$  на  $\omega + \mu$ . Поэтому и функции Грина частиц конденсата после преобразования (23.21) в новых термодинамических переменных не зависят от времени. Ввиду этого в соответствующих вершинах диаграмм можно опустить временные множители (23.18). Читатель может получить этот результат, переопределяя функции Грина согласно (23.22) и непосредственно исследуя ряды теории возмущений в связи с преобразованием (23.21) и (23.22). В дальнейшем всюду будет предполагаться выбор  $\mu$  в качестве независимой термодинамической переменной.

## § 24. Функция Грина

**1. Структура уравнений.** Остановимся несколько более подробно на структуре ряда теории возмущений для одночастичной функции Грина надконденсатных частиц. График любого порядка можно разделить на несколько неприводимых частей, соединенных между собой одной линией, соответствующей функции  $G^{(0)}(x - x')$ . Таким образом, любая диаграмма для функции Грина представляет собой цепочку собственно энергетических диаграмм, связанных нулевыми функциями Грина. На рис. 63 приведено несколько примеров, где кружками обозначены неприводимые собственно энергетические части, структуру которых мы не конкретизируем. Наличие конденсата приводит к тому, что среди собственно энергетических диаграмм появляются диаграммы нового типа, отсутствовавшие во всех рассмотренных в предшествующих главах задачах. Эти диаграммы возникают в результате взаимодействия надконденсатной частицы с частицами конденсата и содержат в некоторых вершинах операторы  $\tilde{\xi}_0$

и  $\tilde{\xi}_0^+$ , выступающие, согласно результатам предыдущего параграфа, в роли некоторого внешнего поля:  $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0^+ \rightarrow \sqrt{V n_0}$ . Легко заметить уже из рис. 63, что полное число линий, входящих в любую неприводимую собственно энергетическую диаграмму, и полное число выходящих линий всегда равны друг другу (в полное число линий мы включаем также все ломанные линии, соответствующие операторам рождения и уничтожения частиц конденсата). Поскольку все собственно

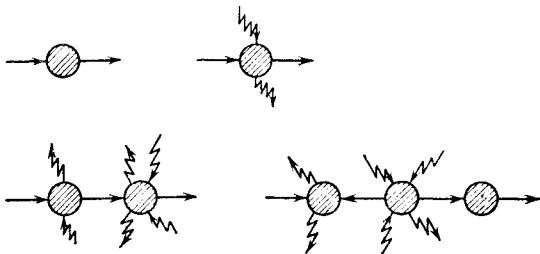


Рис. 63.

энергетические части связаны прямыми линиями, т. е. содержат две входящие или выходящие надконденсатные частицы, то указанное обстоятельство позволяет следующим образом классифицировать все неприводимые собственно энергетические диаграммы:

1. Диаграммы, имеющие один входящий и один выходящий концы, соответствующие надконденсатным частицам. В этих диаграммах числа входящих и выходящих ломанных линий (степени операторов  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$ ) должны быть равны. Мы обозначим сумму всех матричных элементов таких диаграмм в координатном представлении через  $\Sigma_{11}(x - x')$  и будем изображать ее заштрихованным кружком, как на рис. 64, а.

2. Диаграммы, из которых исходят две линии надконденсатных частиц. В таких диаграммах число входящих ломанных линий на две линии больше, чем число выходящих. Соответствующую сумму матричных элементов мы обозначим через  $\Sigma_{02}(x - x')$  и будем изображать ее заштрихованным кружком с двумя входящими ломаными линиями, как на рис. 64, б.

3. Диаграммы, в которые входят две линии надконденсатных частиц. В этих диаграммах, наоборот, число выходящих ломаных линий на две превышает число входящих. Сумму этих матричных элементов обозначим через  $\Sigma_{20}(x - x')$ ; на рис. 64, в сумма таких

собственно энергетических диаграмм изображена кружком с двумя выходящими ломаными линиями. Все три типа неприводимых собственно энергетических частей

могут комбинироваться в произвольном порядке на диаграммах для функции Грина  $G'(x - x')$ . Единственное очевидное условие состоит в том, что число раз, которое встречаются в рассматриваемой диаграмме матричные элементы  $\Sigma_{02}$ , равно соответствующему числу матричных элементов типа  $\Sigma_{20}$ .

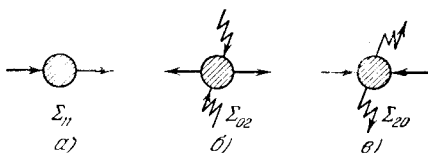


Рис. 64.

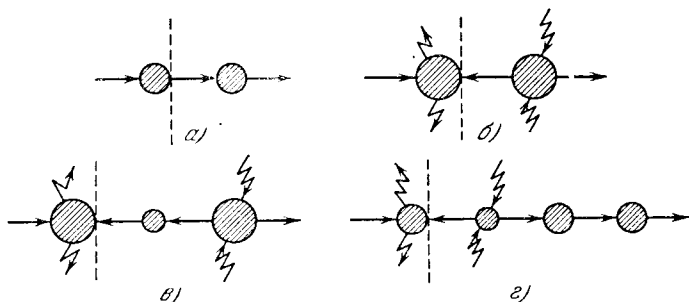


Рис. 65.

На рис. 65 приведено несколько примеров диаграмм для функции Грина надконденсатных частиц.

Теперь мы можем написать аналог уравнения Дайсона для гриновской функции надконденсатных частиц. Проведем этот вывод сначала графически. Для этого отделим первую неприводимую собственно энергетическую часть, встречающуюся на диаграмме, если двигаться вдоль цепочки слева направо. В отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих главах, такие неприводимые части могут быть двух типов:  $\Sigma_{11}$  и  $\Sigma_{20}$ . На рис. 65 пунктирной вертикальной

линией схематически изображено разделение некоторой произвольной диаграммы на две части. На рис. 65, а справа от разделяющего пунктира стоит цепочка линий и собственно энергетических частей, представляющая собой в сумме снова полную функцию Грина  $G'(x - x')$ . Образование же, стоящее справа от пунктира на рис. 65, б, в, г за собственно энергетической частью  $\Sigma_{20}$ , просуммированное по всем диаграммам, представляет собой некоторую новую функцию, которую мы обозначим через  $\hat{G}(x - x')$ . С графической

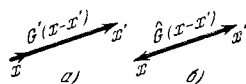


Рис. 66.

точки зрения она отличается тем, что на представляющих ее диаграммах имеются два выходящих надконденсатных конца. Ради удобства введем теперь на графике для каждой линии, соединяющей две точки  $x$  и  $x'$ , стрелки, показывающие, входит или выходит линия в каждой из этих точек. Функция Грина невзаимодействующих частиц  $G^{(0)}(x - x')$  представляет собой по определению среднее в представлении взаимодействия от  $T$ -произведения операторов  $\psi'(x)\psi'^+(x')$ .

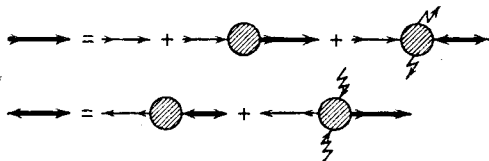


Рис. 67.

В точке  $x$  мы будем ставить вдоль линии стрелку в направлении от точки  $x$  (оператор  $\psi'(x)$ ), а в точке  $x'$  — стрелку в направлении к точке  $x'$  (оператор  $\psi'^+(x')$ ). Функция Грина  $G'(x - x')$ , очевидно, представляет собой жирную линию с двумя такими же стрелками, как и у нулевой (без взаимодействия) функции Грина (рис. 66, а). Что же касается функции  $\hat{G}(x - x')$ , то, как видно из рис. 65, б, в, г, на графике это будет жирная линия с двумя выходящими концами (рис. 66, б). Уравнения, связывающие между собой функции Грина  $G(x - x')$  и  $\hat{G}(x - x')$ , приведены на рис. 67. Структура этих уравнений понятна без дальнейших пояснений; мы отметим здесь лишь раз то об-

стоятельство, что функция  $\hat{G}(x - x')$  появляется в теории в результате взаимодействия надконденсатных частиц с частицами конденсата и поэтому не имеет аналога для невзаимодействующих частиц. Что же касается собственно энергетических частей  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{20}$  и  $\Sigma_{02}$ , то, как обычно, последние не могут быть написаны в замкнутом виде через функции  $G$  и  $\hat{G}$ . Техника фейнмановских диаграмм дает для них разложение в ряды, каждый член которых может быть сопоставлен

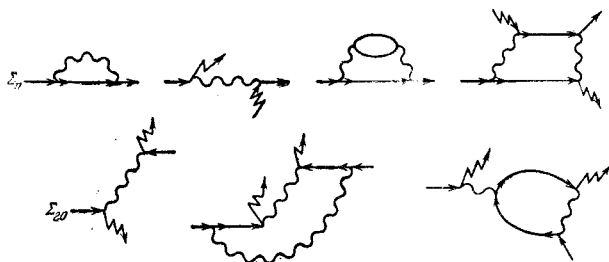


Рис. 68.

определенной диаграмме. Несколько диаграмм низшего порядка для  $\Sigma_{11}$  и  $\Sigma_{20}$  приведено на рис. 68 для гамильтониана взаимодействия (23.12).

Напишем уравнения рис. 67<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned}
 G'(x - x') &= G^{(0)}(x - x') + \\
 &+ \int \int G^{(0)}(x - y) [\Sigma_{11}(y - z) G'(z - x') + \\
 &+ \Sigma_{20}(y - z) \hat{G}(z - x')] d^4z d^4y, \quad (24.1) \\
 \hat{G}(x - x') &= \int \int G^{(0)}(y - x) [\Sigma_{11}(z - y) \hat{G}(z - x') + \\
 &+ \Sigma_{02}(y - z) G'(z - x')] d^4z d^4y.
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Такой выбор коэффициентов в уравнениях означает соответствующее определение собственно энергетических частей  $\Sigma_{ik}$  (см. § 25).

Переходя в этих уравнениях к компонентам Фурье для всех величин, получим:

$$\begin{aligned} G'(p) &= G^{(0)}(p) + G^{(0)}(p) \Sigma_{11}(p) G'(p) + \\ &\quad + G^{(0)}(p) \Sigma_{20}(p) \hat{G}(p), \\ \hat{G}(p) &= G^{(0)}(-p) \Sigma_{11}(-p) \hat{G}(p) + G^{(0)}(-p) \Sigma_{02}(p) G'(p). \end{aligned} \quad (24.2)$$

Используя выражение (23.9) для функции Грина невзаимодействующих частиц  $G^{(0)}(p)$ , можно представить уравнения (24.2) в более удобной форме:

$$\begin{aligned} (\omega - \varepsilon_0(p) + \mu - \Sigma_{11}(p)) G'(p) - \Sigma_{20}(p) \hat{G}(p) &= 1, \\ (-\omega - \varepsilon_0(p) + \mu - \Sigma_{11}(-p)) \hat{G}(p) - \Sigma_{02}(p) G'(p) &= 0 \end{aligned} \quad (24.3)$$

(здесь  $\varepsilon_0(p) = \frac{p^2}{2m}$ ). Введя обозначения

$$S(p) = \frac{\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{11}(-p)}{2}, \quad A(p) = \frac{\Sigma_{11}(p) - \Sigma_{11}(-p)}{2}$$

и выражая  $G'(p)$  и  $\hat{G}(p)$  из уравнений (24.3) через величины  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{02}$ ,  $\Sigma_{20}$ , получим  $G'(p)$  и  $\hat{G}(p)$ :

$$G'(p) = \frac{\omega + \varepsilon_0(p) + S(p) + A(p) - \mu}{(\omega - A(p))^2 - (\varepsilon_0(p) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p) \Sigma_{02}(p)}, \quad (24.4)$$

$$\hat{G}(p) = - \frac{\Sigma_{02}(p)}{(\omega - A(p))^2 - (\varepsilon_0(p) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p) \Sigma_{02}(p)}, \quad (24.5)$$

Эти формулы обобщают обычное выражение для одночастичной функции через ее собственно энергетическую часть.

**2. Аналитические свойства функции Грина.** До сих пор функция  $\hat{G}(p)$  фигурировала у нас как результат суммирования определенных графиков. Мы дадим сейчас ее определение через операторы  $\psi'^+$ . Для этого рассмотрим величину

$$-i \langle T(\tilde{\xi}_0 \tilde{\xi}_0 \tilde{\psi}'^+(x) \tilde{\psi}'^+(x')) \rangle$$

и убедимся, что ее разложение в ряд теории возмущений совпадает с разложением функции  $\hat{G}(x - x')$ . Будем считать, как это было сделано в конце предыдущего параграфа, что

все операторы определены с множителями  $e^{i\mu t}$  или  $e^{-i\mu t}$  (24.21), и перейдем к представлению взаимодействия

$$\frac{-i \langle T(\xi_0 \xi_0 \psi'^+(x) \psi'^+(x')) S \rangle}{\langle S \rangle}.$$

Разобьем операции  $T$  и  $\langle \dots \rangle$  на  $T = T^0 T'$  и  $\langle \langle \dots \rangle \rangle^0$ . Рассматривая  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  как внешние параметры, т. е. производя усреднение по надконденсатным частицам, получим, что диаграммы для этой величины совпадают с диаграммами функции  $\hat{G}(x - x')$ , тогда как матричные элементы отличаются наличием двух лишних операторов  $\xi_0$ . Усреднение по частицам конденсата, как было показано, сводится к замене операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  в представлении взаимодействия гайзенберговскими операторами  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$  и в свою очередь замене последних числами:  $\tilde{\xi}_0 \rightarrow \sqrt{N_0}$  и  $\tilde{\xi}_0^+ \rightarrow \sqrt{N_0}$ . Таким образом, для функции  $\hat{G}(x - x')$  можно использовать два эквивалентных определения:

$$\hat{G}(x - x') = \frac{-i}{N_0} \langle T(\tilde{\xi}_0 \tilde{\xi}_0 \tilde{\psi}'^+(x) \tilde{\psi}'^+(x')) \rangle \quad (24.6)$$

или

$$\tilde{G}(x - x') = -i \langle N + 2 | T(\tilde{\psi}'^+(x) \tilde{\psi}'^+(x')) | N \rangle, \quad (24.7)$$

где в последней формуле  $\hat{G}(x - x')$  выражена через матричный элемент от  $T(\tilde{\psi}'^+(x) \tilde{\psi}'^+(x'))$  между основными состояниями системы с  $N + 2$  и  $N$  частицами.

Исследуем свойства гриновских функций  $G'(x - x')$  и  $\hat{G}(x - x')$ . Используя определение функции  $G'(x - x')$  (23.4), представим ее, подобно тому как это делалось в гл. II, в виде суммы матричных элементов по промежуточным состояниям при  $t > t'$  и  $t < t'$ :

$$G'(x - x') = -i \sum_m \langle N | \tilde{\psi}'(x) | m \rangle \langle m | \tilde{\psi}'^+(x') | N \rangle,$$

при  $t < t'$

$$G'(x - x') = -i \sum_n \langle N | \tilde{\psi}'^+(x') | n \rangle \langle n | \tilde{\psi}'(x) | N \rangle.$$

Выделяя в матричных элементах обычным образом зависимость от координат и времени, получим:

$$G'(x - x') = \begin{cases} -i \sum_m |\psi_{Nm}|^2 \exp \{i\mathbf{p}_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega_{mN}(t - t') + i\mu(t - t')\}, & t > t', \\ -i \sum_n |\psi_{Nn}|^2 \exp \{i\mathbf{p}_n(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) - i\omega_{nN}(t' - t) - i\mu(t - t')\}, & t < t'; \end{cases} \quad (24.8)$$

здесь  $\mathbf{p}_m$  и  $\mathbf{p}_n$  — импульсы системы в промежуточном состоянии,  $\omega_{mN} = E_m - E_{N0}$ ,  $\omega_{nN} = E_n - E_{N0}$ , где  $E_n$ ,  $E_m$  — энергии системы в состояниях  $n$  и  $m$ ,  $E_{N0}$  — энергия основного состояния системы с числом частиц  $N$ . По свойствам операторов  $\tilde{\psi}'$  и  $\tilde{\psi}'^+$  в состояниях  $m$  система имеет  $N+1$  частиц, а в состоянии  $n$  число частиц равно  $N-1$ . С этим и связано появление в (24.8) множителей  $e^{\pm i\mu t}$ . Воспользовавшись определением  $\mu \simeq E_{N+10} - E_{N0}$ , представим (24.8) в следующем виде:

$$G'(x - x') = \begin{cases} -i \sum_m |\psi_{Nm}|^2 \exp \{i\mathbf{p}_m(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i(E_m - E_{N+10})(t - t')\} & (t > t'), \\ -i \sum_n |\psi_{Nn}|^2 \exp \{-i\mathbf{p}_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i(E_n - E_{N-10})(t - t')\} & (t < t'). \end{cases} \quad (24.9)$$

Разности энергий  $E_m - E_{N+10}$  и  $E_n - E_{N-10}$  представляют собой спектр, или энергии возбуждения, для систем с  $N+1$  и  $N-1$  частицами. При большом числе частиц спектры этих систем с точностью до членов порядка  $\frac{1}{N}$  совпадают.

Взяв компоненты Фурье по разности координат и времен от (24.9), получим в импульсном представлении для функции Грина результат:

$$G'(p) = (2\pi)^3 \left[ \sum_m \frac{\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_m) |\psi_{Nm}|^2}{\omega - (E_m - E_{N+10}) + i\delta} - \sum_n \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_n) |\psi_{Nn}|^2}{\omega + (E_n - E_{N-10}) - i\delta} \right]. \quad (24.10)$$



Полюсы функции  $G'(p)$  соответствуют значениям  $\omega = \pm (E_m - E_0)$ , т. е., как всегда, определяют с точностью до знака спектр системы; положение их относительно вещественной оси  $\omega$  ясно из правил обхода (24.10).

Аналогичное разложение по промежуточным состояниям проведем теперь для функции  $\hat{G}(x - x')$ , воспользовавшись ее представлением в форме (24.7):

$$\begin{aligned} \hat{G}(x - x') &= \\ &= \begin{cases} -i \sum_m \langle N+2 | \tilde{\psi}'^+(x) | m \rangle \langle m | \tilde{\psi}'^+(x') | N \rangle & (t > t'), \\ -i \sum_m \langle N+2 | \tilde{\psi}'^+(x') | m \rangle \langle m | \tilde{\psi}'^+(x) | N \rangle & (t < t') \end{cases} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} G(x - x') &= \\ &= \begin{cases} -i \sum_m \psi_{N+2m}^+ \psi_{mN}^+ e^{ip_m(r-r') - i(E_m - E_{N+20+\mu})t + i(E_m - E_{N0-\mu})t'} & (t > t'), \\ -i \sum_m \psi_{N+2m}^+ \psi_{mN}^+ e^{ip_m(r'-r) - i(E_m - E_{N+20+\mu})t' + i(E_m - E_{N0-\mu})t} & (t < t'). \end{cases} \end{aligned} \quad (24.11)$$

Состояния, отмеченные индексом  $m$ , соответствуют состояниям системы с числом частиц  $N+1$ . Вводя в формулы (24.11)  $E_{N+10}$  — основное состояние системы с числом частиц  $N+1$  и воспользовавшись опять определением химического потенциала, преобразуем (24.11) к виду

$$\begin{aligned} \hat{G}(x - x') &= \\ &= \begin{cases} -i \sum_m \psi_{N+2m}^+ \psi_{mN}^+ e^{ip_m(r-r') - i(E_m - E_{N+10})(t-t')} & (t > t'), \\ -i \sum_m \psi_{N+2m}^+ \psi_{mN}^+ e^{ip_m(r'-r) - i(E_m - E_{N+10})(t'-t)} & (t < t'). \end{cases} \end{aligned}$$

Компонента Фурье функции  $\hat{G}(x - x')$  равна

$$\begin{aligned} \hat{G}(p) &= (2\pi)^3 \sum_m \psi_{N+2m}^+ \psi_{mN}^+ \times \\ &\times \left[ \frac{\delta(p - p_m)}{\omega - (E_m - E_{N+10}) + i\delta} - \frac{\delta(p + p_m)}{\omega + (E_m - E_{N+10}) - i\delta} \right]. \end{aligned} \quad (24.12)$$

Сравнивая выражения (24.10) и (24.12), можно заключить, что полюсы функций Грина  $G'(x - x')$  и  $\hat{G}(x - x')$  совпадают. В частности, обращаясь к представлению  $G'(p)$  и  $\hat{G}(p)$  через неприводимые собственно энергетические части (24.4) и (24.5), мы видим, что спектр системы  $\omega = \varepsilon(p)$  определяется из уравнения

$$(\varepsilon(p) - A(p))^2 - (\varepsilon_0(p) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p) \Sigma_{02}(p) = 0$$

$$(p \equiv \{\varepsilon(p), p\}).$$

Наряду с функцией  $\hat{G}(x - x')$  (24.6), (24.7) имеет смысл ввести функцию

$$\check{G}(x - x') = -\frac{i}{n_0} \langle T(\tilde{\psi}'(x) \tilde{\psi}'(x') \tilde{\xi}_0^+ \tilde{\xi}_0^+) \rangle \equiv$$

$$\equiv \langle N | T(\tilde{\psi}'(x) \tilde{\psi}'(x')) | N + 2 \rangle. \quad (24.13)$$

Произведя в последнем выражении  $\check{G}(x - x')$  разложение по промежуточным состояниям, как это было сделано выше для функции  $\hat{G}(x - x')$ , найдем для компоненты Фурье  $\check{G}(p)$  выражение, аналогичное (24.12):

$$\check{G}(p) = (2\pi)^3 \sum_m \psi_{Nm} \psi_{mN+2} \times$$

$$\times \left[ \frac{\delta(p - p_m)}{\omega - (E_m - E_{N+10}) + i\delta} - \frac{\delta(p + p_m)}{\omega + (E_m - E_{N+10}) - i\delta} \right]. \quad (24.14)$$

Функция  $\check{G}(p)$  имеет, таким образом, полюсы (и обходы в этих полюсах), совпадающие с полюсами для функций  $\hat{G}(p)$  и  $G'(p)$ . Что же касается коэффициентов — вычетов в этих полюсах, то в функции  $G'(p)$  они вещественны, тогда как вычеты в одинаковых полюсах  $\hat{G}(p)$  и  $\check{G}(p)$  комплексно сопряжены друг с другом.

Графически функция  $\check{G}(x - x')$  представляется линией с двумя стрелками, направленными навстречу друг другу. Уравнения, связывающие  $\check{G}(x - x')$  с обычной функцией Грина, схематически изображены на рис. 69. В этих уравнениях фигурирует функция Грина  $G'(x' - x)$ , изображенная с обратным направлением стрелок. В компонентах Фурье

всех величин уравнения рис. 69 запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{G}(p) &= G^{(0)}(p) \Sigma_{11}(p) \dot{G}(p) + G^{(0)}(p) \Sigma_{20}(p) G'(-p), \\ G'(-p) &= G^{(0)}(-p) + G_0(-p) [\Sigma_{11}(-p) G'(-p) + \\ &\quad + \Sigma_{02}(p) \dot{G}(p)].\end{aligned}$$

Разрешая эти уравнения для  $\dot{G}(p)$ , найдем:

$$\dot{G}(p) = - \frac{\Sigma_{20}(p)}{(\omega - A(p))^2 - (\varepsilon_0(p) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{20}(p) \Sigma_{02}(p)}. \quad (24.15)$$

Выражения (24.5) и (24.15) для  $\hat{G}(p)$  и  $\dot{G}(p)$  отличаются друг от друга заменой в числителе  $\Sigma_{20}(p)$  на  $\Sigma_{02}(p)$ .

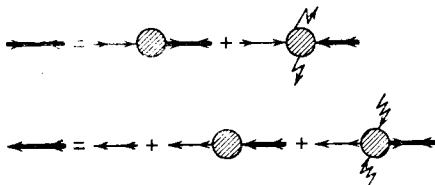


Рис. 69.

### 3. Поведение функций Грина при малых импульсах.

В заключение настоящего параграфа сделаем несколько замечаний общего характера относительно полученных результатов. По причине пространственной однородности все величины зависят от абсолютной величины вектора  $p$ . Как видно из (24.12) и (24.14), функции  $\hat{G}(p)$  и  $\dot{G}(p)$  есть четные функции частоты  $\omega$ . Легко видеть отсюда, что  $\Sigma_{20}(p) = \Sigma_{02}(p)$ . Действительно, поскольку гамильтониан взаимодействия сохраняет полное число частиц, то он симметричен по операторам  $\psi$  и  $\psi^+$ . Поэтому любому графику для  $\Sigma_{20}$  можно сопоставить точно такой же график для  $\Sigma_{02}$ , получающийся заменой всех входящих линий в графике  $\Sigma_{20}$  на исходящие, и наоборот; соответственно этому меняется на обратное направление обхода всех внутренних линий. Однако направление обхода всех внутренних линий можно изменить, заменяя в матричном элементе для данного графика  $\Sigma_{20}(p)$ .

значение  $p$  на  $-p$ . Поскольку из (24.15)  $\Sigma_{20}$  есть четная функция, то

$$\Sigma_{20}(p) = \Sigma_{02}(p) \quad \text{и} \quad \hat{G}(p) = \check{G}(p).$$

Рассмотрим уравнение, определяющее полюсы функций Грина:

$$(\omega - A(p))^2 - (\varepsilon_0(p) + S(p) - \mu)^2 + \Sigma_{02}^2(p) = 0. \quad (24.16)$$

Из физических соображений ясно, что это уравнение должно иметь решения при сколь угодно малых  $\omega$  и  $p$ . В самом деле, среди возможных решений для спектра энергии возбуждений при малых  $p$  должен содержаться звуковой спектр  $\omega = c|p|$ , т. е. спектр, соответствующий колебаниям плотности с большой длиной волны. Положим поэтому в уравнении (24.16)  $\omega$  и  $p$  равными нулю. В результате мы получаем условие, связывающее химический потенциал  $\mu$  с величинами  $\Sigma_{11}(0)$ ,  $\Sigma_{20}(0)$  и  $\Sigma_{02}(0)$ :

$$(\mu - \Sigma_{11}(0))^2 = \Sigma_{02}^2(0).$$

Как будет видно из результатов следующего параграфа, из двух корней этого уравнения надо выбрать

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{02}(0). \quad (24.17)$$

С целью получить вид функций Грина в окрестности малых  $\omega$  и  $p$  произведем разложение в знаменателях (24.4), (24.5) и (24.15), ограничиваясь всюду членами второго порядка по  $\omega$  и  $p$ . С помощью (24.17) найдем:

$$G'(p) = \frac{\Sigma_{11}(0) - \mu}{B(\omega^2 - c^2|p|^2)} = \frac{\Sigma_{20}(0)}{B(\omega^2 - c^2|p|^2)}, \quad (24.18)$$

$$\hat{G}(p) = \check{G}(p) = - \frac{\Sigma_{20}(0)}{B(\omega^2 - c^2|p|^2)},$$

где

$$B = \left(1 - \frac{\partial \Sigma_{11}(0)}{\partial \omega}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Sigma_{11}(0)}{\partial \omega^2} \Sigma_{20}(0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \Sigma_{20}^2(0),$$

$$Bc^2 = 2\Sigma_{20}(0) \left\{ \frac{1}{2m} + \frac{\partial \Sigma_{11}(0)}{\partial |p|^2} - \frac{\partial \Sigma_{20}(0)}{\partial |p|^2} \right\}.$$

Величина  $c$  есть, очевидно, скорость звука. Как и должно быть, она обращается в нуль, если  $\Sigma_{20}(0)$  равно нулю, поскольку для идеального бозе-газа скорость звука равна нулю.

Сравнивая результаты (24.18) с общими разложениями функций Грина (24.10), (24.12) и (24.14), находим, что отношение  $\frac{\Sigma_{20}(0)}{B}$  вещественно и положительно. Таким образом, при малых  $\omega$  и  $p$  ( $\omega \sim cp$ ) вид всех функций Грина  $G'(p)$ ,  $\hat{G}(p)$ ,  $\check{G}(p)$  совпадает:

$$G(p) = \frac{\text{const}}{\omega^2 - c^2 p^2}. \quad (24.19)$$

## § 25. Разреженный неидеальный бозе-газ

**1. Диаграммная техника.** Для иллюстрации изложенных методов займемся теперь более подробно тем частным случаем, когда взаимодействие между частицами сводится к парным силам (Беляев [40]). Гамильтониан взаимодействия равен

$$H_{int} = \frac{1}{2} \int \int \psi^+(r) \psi^+(r') U(r-r') \psi(r') \psi(r) dr dr'. \quad (25.1)$$

Выделим в  $H_{int}$  в явном виде операторы конденсатных частиц  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  согласно (23.1). В результате получим восемь различных слагаемых в сумме, через которую можно представить гамильтониан  $H_{int}$ :

$$\begin{aligned} H_a &= \frac{1}{2} \int \int \psi'^+(r) \psi'^+(r') U(r-r') \psi'(r') \psi'(r) dr dr', \\ H_b &= \frac{1}{2} V(\xi_0^+)^2 \xi_0^2 \int U(R) dR, \\ H_c &= \frac{1}{2} \int \int [\xi_0^+ \psi'^+(r') + \psi'^+(r) \xi_0^+] \psi'(r) \psi'(r') \times \\ &\quad \times U(r-r') dr dr', \\ H_d &= \frac{1}{2} \int \int \psi'^+(r) \psi'^+(r') [\psi'(r') \xi_0 + \xi_0 \psi'(r)] \times \\ &\quad \times U(r-r') dr dr', \\ H_e &= \frac{1}{2} \int \int [\xi_0^+ \psi'^+(r') \xi_0 \psi'(r) + \xi_0^+ \psi'^+(r) \xi_0 \psi'(r')] \times \\ &\quad \times U(r-r') dr dr', \\ H_f &= \frac{1}{2} \int \int [\xi_0^+ \psi'^+(r) \xi_0 \psi'(r) + \xi_0^+ \psi'^+(r') \xi_0 \psi'(r')] \times \\ &\quad \times U(r-r') dr dr', \\ H_{жс} &= \frac{1}{2} \int \int \xi_0^+ \xi_0^+ \psi'(r) \psi'(r') U(r-r') dr dr', \\ H_з &= \frac{1}{2} \int \int \xi_0 \xi_0 \psi'^+(r) \psi'^+(r') U(r-r') dr dr'. \end{aligned} \quad (25.2)$$

Элементарные процессы, соответствующие каждому из этих членов, представлены на рис. 70. Построение любого матричного элемента можно произвести обычным способом, применяя теорему Вика к операторам надконденсатных частиц. Согласно результатам предыдущих параграфов, необходимо брать только связанные диаграммы для изучаемого процесса, считая всюду операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  внешними параметрами, вместо которых надо подставить  $\xi_0$ ,  $\xi_0^+ \rightarrow \sqrt{V n_0}$  (если частоты всех участвующих в процессе частиц отсчитывать от значения химического потенциала). Мы ограничимся только тем, что сформулируем правила взаимного соответствия в импульсном представлении между матричными

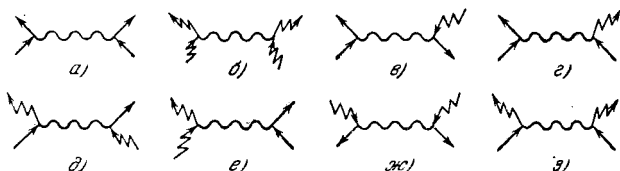


Рис. 70.

элементами и диаграммами для одночастичных функций Грина. Рассмотрим произвольную диаграмму  $m$ -го порядка теории возмущений для одной из функций Грина, скажем,  $G'(x - x')$ , содержащую  $s$  входящих и  $s$  выходящих конденсатных линий (как мы неоднократно отмечали, полные числа входящих и выходящих линий на любой диаграмме должны быть равны). Рассматриваемая диаграмма содержится в выражении

$$(-i) \frac{(-i)^m}{m!} \left\langle T \left( \psi'(x) \int H_{int}(t_1) \dots \dots H_{int}(t_m) \psi'^+(x') dt_1 \dots dt_m \right) \right\rangle.$$

Число возможных перестановок  $m$  гамильтонианов  $H_{int}(t_i)$ , не нарушающее порядка спариваний, определяемого данной диаграммой, равно  $m!$  Число операторов  $\psi'$  (равное числу операторов  $\psi'^+$ ), очевидно, равно  $2m - s + 1$ .

Согласно определению функции Грина  $G^{(0)}$ , на каждое спаривание  $\psi' \psi'^+$  приходится множитель  $-i$ . Будем сопо-

ставлять каждой прямой линии функцию Грина  $G^{(0)}$  и введем волнистую линию, соответствующую потенциалу

$$V(x - x') = U(r - r') \delta(t - t').$$

Полное число тройных вершин (т. е. вершин, из которых исходит волнистая линия), согласно формуле (25.1) и рис. 70, вдвое больше порядка теории возмущений. Нетрудно убедиться, что если ввести фурье-компоненты всех величин:

$$G'(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G'(p) e^{ip(x-x')} d^4p,$$

$$V(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int U(q) e^{iq(x-x')} d^4q \text{ и т. д.,}$$

то построение матричного элемента любой диаграммы  $m$ -го порядка теории возмущений для функции Грина может быть произведено по следующим правилам:

1) каждой прямой линии, идущей слева направо, соответствует в  $G'(p)$  функция  $G^{(0)}(p) = (\omega - \epsilon_0(p) + \mu + i\delta)^{-1}$  (линии, имеющей обратное направление, соответствует  $G^{(0)}(-p)$ );

2) каждой волнистой линии с импульсом  $q$  соответствует компонента Фурье потенциала взаимодействия  $U(q)$ ;

3) входящей или выходящей конденсатной линии соответствует множитель  $\sqrt{n_0}$ ;

4) в каждой тройной вершине импульс  $q$  волнистой линии равен разности импульсов линий частиц. По импульсам, не определяемым законами сохранения, производится интегрирование, причем каждому интегрированию отвечает множитель  $(2\pi)^{-4}$ ;

5) весь матричный элемент должен быть умножен на  $A_{s,m}(-i)^{s-m}$ , где  $A_{s,m}$  зависит от того, какие члены из (25.2) участвуют в диаграмме. Для функций Грина  $\hat{G}$  и  $\check{G}$  эти правила остаются без изменения, если под  $s$  понимать степень множителей  $n_0$ , фигурирующих в данной диаграмме порядка  $m$ . Действительно, если, например, в одной из диаграмм для  $\hat{G}$  число входящих конденсатных линий равно  $l$ , то, согласно определению  $\check{G}$  (24.7), число выходящих равно  $l + 2$ . Число

спариваний операторов  $\psi'$  и  $\psi'^+$  (число функций  $G^{(0)}$ ), очевидно, равно

$$2m - l.$$

Поскольку на каждую функцию Грина, по ее определению, приходится множитель  $-i$ , то множитель, на который следует умножать матричный элемент, равен

$$(-i)^{l+1-m}.$$

Но  $l+1$  как раз и есть степень  $s$  множителей  $n_0$ , происходящих от конденсатных линий.

**2. Связь химического потенциала с собственно энергетическими частями одночастичных функций Грина.** Перейдем теперь к доказательству формулы (24.17) для химического потенциала  $\mu$ . Рассмотрим оператор  $\tilde{\xi}_0(t)$  в гайзенберговском представлении (мы полагаем, что в полный гамильтониан включен член  $-\mu N$ ). В отношении зависимости от времени  $\tilde{\xi}_0(t)$  удовлетворяет обычному операторному квантовомеханическому уравнению

$$i \frac{\partial \tilde{\xi}_0(t)}{\partial t} = [\tilde{\xi}_0(t), H] = -\mu \tilde{\xi}_0(t) - [H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)].$$

С помощью этого уравнения для гриновской функции  $G_0(t-t')$  частиц конденсата найдем:

$$\frac{\partial G_0(t-t')}{\partial t} = i \mu G_0(t-t') - \langle T([ \tilde{\xi}_0(t), H_{int} ] \tilde{\xi}_0^+(t')) \rangle.$$

Но, согласно результатам предыдущих разделов,  $G_0(t-t')$  не зависит от времени и есть просто  $n_0$ . Отсюда следует:

$$\mu n_0 = -\langle T([H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)] \tilde{\xi}_0^+(t')) \rangle. \quad (25.3)$$

Вычислим среднее, стоящее в правой части этого соотношения. Переходя к представлению взаимодействия

$$\langle T([H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)] \tilde{\xi}_0^+(t')) \rangle = \frac{\langle T([H_{int}, \tilde{\xi}_0(t)] \tilde{\xi}_0^+(t') S) \rangle}{\langle S \rangle},$$

воспроизведем кратко аргументацию § 23. В операции  $T$  и  $\langle \dots \rangle$  выполним сначала усреднение и хронологизацию по надконденсатным частицам. Согласно общим рецептам, при этом надлежит учитывать только все связанные диаграммы,



полагая операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  внешними параметрами. Связанные диаграммы в рассматриваемом случае есть различные вакуумные петли; мы обозначим результат такого усреднения, которое затрагивает только операторы надконденсатных частиц в  $H_{int}$ , через  $\bar{H}_{int}^{связн}$ . Величина  $\bar{H}_{int}^{связн}$  зависит как от параметров от  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ . Для нахождения окончательного результата следует все операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ , фигурирующие в  $\bar{H}_{int}^{связн}$ , заменить на точные гайзенберговские операторы  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$ , после чего для (25.3) получим:

$$\mu n_0 = - \frac{\langle T^0 ([\bar{H}_{int}^{связн}, \xi_0] \xi_0^+ \langle S \rangle') \rangle^0}{\langle S \rangle} = \\ = - \langle T ([\tilde{H}_{int}^{связн}, \tilde{\xi}_0] \tilde{\xi}_0^+) \rangle. \quad (25.4)$$

Коммутация  $[\bar{H}_{int}^{связн}, \xi_0]$  содержит коммутации  $\xi_0$  с различными произведениями операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  в вакуумных средних  $\bar{H}_{int}^{связн}$ . При вычислении  $\bar{H}_{int}^{связн}$  производилось обычное усреднение по технике Вика операторов надконденсатных частиц. Поскольку это усреднение состоит в попарном усреднении операторов  $\psi'$  и  $\psi'^+$ , то равны также между собой числа операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$ .

Рассмотрим, например, вакуумную петлю  $m$ -го порядка теории возмущений, содержащую  $s$  операторов  $\xi_0$  и  $s$  операторов  $\xi_0^+$ . Результат коммутации  $\xi_0$  с одним оператором  $\xi_0^+$  есть  $[\xi_0^+, \xi_0] = -\frac{1}{V}$ , но  $\xi_0$  может коммутировать со всеми  $s$  операторами  $\xi_0^+$ . Поэтому, если мы обозначим добавку к энергии основного состояния, соответствующую данной вакуумной петле  $m$ -го порядка с  $n_0^s$ , через  $\langle H_{int} \rangle_{m, s}^{связн}$  (последняя величина получается из  $\bar{H}_{int}^{связн}$  заменой операторов  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  на  $\sqrt{n_0}$ ), то легко видеть, что выражение (25.4) есть

$$\mu n_0 = \sum_{s, m} \frac{s}{V} \langle H_{int} \rangle_{m, s}^{связн}$$

или

$$\mu = \sum_{m, s} \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\langle H_{int} \rangle_{s, m}^{связн}}{V} = \frac{\partial}{\partial n_0} \frac{\langle H_{int} \rangle}{V} \quad (25.5)$$

(вакуумное среднее  $\langle H_{int} \rangle$  является функцией параметров  $\mu$  и  $n_0$ ). Поэтому в правой части (25.5) имеется в виду частная производная по  $n_0$  при постоянном  $\mu$ ). Идея дальнейшего доказательства (Пайнс и Гугенгольтц [41]) основана на том, что операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  входят в гамильтониан взаимодействия

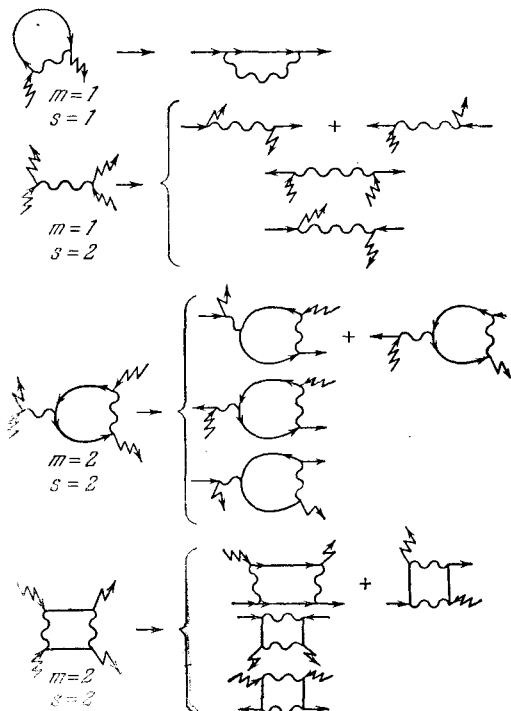


Рис. 71.

симметрично с операторами  $\psi'$  и  $\psi'^+$ . Поэтому каждой вакуумной петле  $\langle H_{int} \rangle$  с некоторым числом конденсатных линий на диаграмме можно формально сопоставить диаграммы для неприводимых собственно энергетических частей  $\Sigma_{11}(0)$ ,  $\Sigma_{20}(0)$ , заменяя в петле нужное количество входящих и выходящих конденсатных линий (операторов  $\xi_0^+$  и  $\xi_0$ ) на входящие и выходящие прямые линии (операторы  $\psi'^+$  и  $\psi'$ ). На рис. 71 приведено несколько простых примеров для

диаграмм низших порядков теории возмущений<sup>1)</sup>. Поскольку входящие и выходящие линии частиц конденсата несут 4-импульс  $p=0$ , то указанное соответствие будет иметь место также и для матричных элементов  $\Sigma_{11}(p)$ ,  $\Sigma_{20}(p) = \Sigma_{02}(p)$  при  $p=0$ .

Матричный элемент произвольной неприводимой диаграммы связи  $\langle H_{int} \rangle_{m,s}$  строится по тем же правилам соответствия, что и сформулированные выше правила для функций Грина; единственное отличие, как легко убедиться, состоит в том, что численный множитель, на который надо умножить весь интеграл, равен

$$(-i)^{s-m-2},$$

где  $m$  — порядок теории возмущений,  $s$  — степень  $n_0$  в данной диаграмме. Соответствующий множитель в матричном элементе для собственно энергетических частей имеет вид

$$(-i)^{s-m}.$$

При дифференцировании вакуумной петли по  $n_0$  степень  $n_0$  уменьшается на единицу. Рассмотрим все возможные диаграммы для  $\Sigma_{11}(0)$   $m$ -го порядка теории возмущений, содержащие  $s-1$  множителей  $n_0$  (и такое же число входящих и выходящих линий частиц конденсата). Все эти диаграммы могут быть получены из вакуумной петли  $(\bar{H}_{int}^{связн})_{m-1,s}$  заменой одного из  $s$  операторов  $\xi_0^+$  на входящую прямую линию, а оператора  $\xi_0$  — на выходящую, т. е. эти диаграммы могут быть получены  $s^2$  способами:

$$(\Sigma_{11}(0))_{m,s-1} = \frac{s^2}{n_0 V} \langle H_{int} \rangle_{m-1,s}^{связн}.$$

Что же касается диаграмм для  $\Sigma_{20}(0)$ , то последние получают из  $(\bar{H}_{int}^{связн})_{m-1,s}$  заменой двух входящих конденсатных линий на две входящие прямые линии. Таких диаграмм имеется всего  $s(s-1)$ , по числу способов, которыми может быть сделана эта замена. Таким образом,

$$(\Sigma_{20}(0))_{m,s-1} = \frac{s^2 - s}{n_0 V} \langle H_{int} \rangle_{m-1,s}^{связн}.$$

<sup>1)</sup> Некоторые из этих диаграмм равны нулю (см. ниже), но для иллюстрации наших рассуждений это не имеет значения.

Сравнивая разность  $\Sigma_{11}(0) - \Sigma_{20}(0)$  с выражением (25.5), непосредственно получаем:

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{20}(0). \quad (25.6)$$

Разумеется, правильность этого соотношения, как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, не ограничивается рассмотренным случаем парных сил взаимодействия между частицами.

Уравнение (25.6) вместе с уравнением (23.19), связывающим химический потенциал с плотностью полного числа частиц в системе, представляют собой совокупность двух

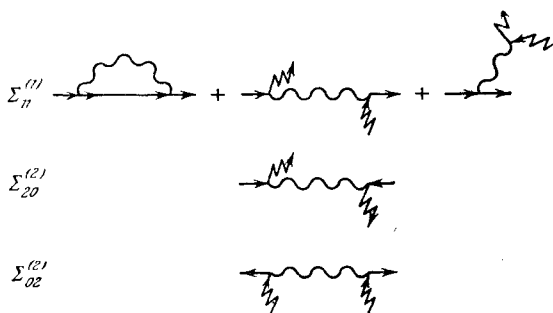


Рис. 72.

условий, из которых могут быть определены значения параметров  $\mu$  и  $n_0$ . Мы не станем здесь останавливаться на доказательстве эквивалентности условий (23.20) и (25.6); заметим только, что для вычислений по теории возмущений (т. е. для случая газа слабо взаимодействующих частиц) удобнее пользоваться условием (25.6), поскольку последнее выражает  $\mu$  непосредственно через известные нам величины идеального бозе-газа.

**3. Приближение малой плотности.** Применим развитую выше методику к газу взаимодействующих бозе-частиц с гамильтонианом (25.1). В гл. I этот пример был нами уже рассмотрен в предположении, что силы взаимодействия между частицами малы. Поэтому в выражение для спектра возбуждений (4.11) вошла компонента Фурье потенциала, в борновском приближении пропорциональная амплитуде рассеяния частиц друг на друге. Мы сейчас покажем, что этот результат

на самом деле справедлив в более общем случае, в котором не предполагается слабость взаимодействия, но зато малой считается плотность газа, т. е. малы размеры частиц по сравнению со средними расстояниями между частицами в газе (если характеризовать размеры частиц амплитудой  $S$ -рассеяния их друг на друге  $f_0$ , то малой величиной является комбинация  $f_0 n^{1/3} \ll 1$ ). Рассмотрим графики первого приближения теории возмущений для  $\Sigma_{11}(p)$ ,  $\Sigma_{20}(p)$  (рис. 72).

Из трех графиков  $\Sigma_{11}$  первый обязан усреднению члена  $H_a$  (25.2) гамильтониана взаимодействия (25.1). Этот график

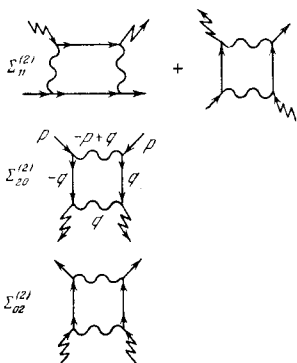


Рис. 73.

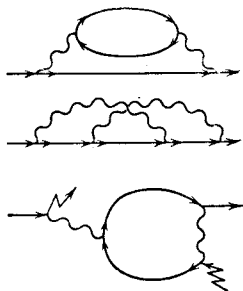


Рис. 74.

равен нулю, поскольку внутренняя линия в нем представляет собой среднее  $-i \langle \psi'^+ (\mathbf{r}') \psi' (\mathbf{r}) \rangle \equiv 0$  (напоминаем, что волнистая линия соответствует потенциалу взаимодействия  $V(x - x') = U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$ , порядок же операторов  $\psi'^+$  и  $\psi'$  в  $H_a$  задается (25.1)). Остальные члены дают:

$$\Sigma_{11}^{(1)}(p) = n_0 (U(0) + U(p)),$$

$$\Sigma_{20}^{(1)}(p) = \Sigma_{02}^{(1)}(p) = n_0 U(p),$$

где  $U(p)$  суть компоненты Фурье потенциала взаимодействия. Согласно (25.6),

$$\mu = n_0 U(0).$$

Из всех диаграмм второго порядка теории возмущений отличны от нуля только диаграммы, приведенные на рис. 73. Например, диаграммы  $\Sigma_{11}^{(2)}(p)$  рис. 74 равны нулю, поскольку

в каждой из них имеются произведения гриновских функций вида  $G^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t_1 - t_2) G^{(0)}(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}''', t_2 - t_1)$  (в координатном представлении). Между тем, как мы знаем,  $G^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2) \equiv 0$  при  $t_1 < t_2$ .

Для оценки графиков рис. 73 примем для простоты, что компонента Фурье от потенциала взаимодействия имеет следующий вид:

$$U(\mathbf{p}) = \begin{cases} U_0 & \text{при } |\mathbf{p}| \ll \frac{1}{a}, \\ 0 & \text{при } |\mathbf{p}| \gg \frac{1}{a}, \end{cases}$$

где  $a \sim f_0$  по порядку величины есть радиус частицы. В оценку любого графика могут войти следующие параметры, фигурирующие в задаче:  $U_0$  и  $a$ , характеризующие взаимодействие,  $m$  — масса и  $n_0$  — плотность числа частиц конденсата. Из этих параметров можно образовать две безразмерные комбинации:

$$\xi \sim \frac{mU_0}{a}, \quad \beta = \sqrt{n_0 a^3}.$$

Величина  $\xi$  есть параметр теории возмущений (разложение в борновский ряд), а  $\beta$  — «газовый» параметр. Формально теория возмущений есть разложение по степеням  $\xi \ll 1$ ; ниже мы будем, однако, полагать только  $\beta \ll 1$ .

Рассмотрим для большей простоты диаграмму  $\Sigma_{20}^{(2)}(p)$  на рис. 73. Для нее

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p) \sim n_0 \int G^{(0)}(q) G^{(0)}(-q) U(q) U(p - q) d^3q d\omega$$

или, подставляя значения функций Грина  $G^{(0)}$  (23.9) и интегрируя по  $\omega$ , получим:

$$\Sigma_{20}^{(2)}(p) \sim n_0 U_0^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{\mu - \varepsilon_0(\mathbf{q})}.$$

В последнем интеграле играют роль большие  $|\mathbf{q}| \sim \frac{1}{a}$ , при которых  $\mu/\varepsilon_q \sim mn_0 U_0 a^2 = \xi \beta^2 \ll 1$ , так что

$$\Sigma_{20}^{(2)} \sim \frac{mn_0 U_0^2}{a} \sim \Sigma_{20}^{(1)} \xi.$$

Подобная же оценка для графиков  $\Sigma_{11}^{(2)}$  показывает, что  $\Sigma_{11}^{(2)} \sim \Sigma_{11}^{(1)} \xi$ .

Рассмотрим теперь график третьего порядка  $\Sigma_{20}^{(3)}$  на рис. 75, а. Для него получаем:

$$\begin{aligned} \Sigma_{20}^{(3)} &\sim n_0^2 \int G^{(0)}(-q) [G^{(0)}(q)]^2 [U(q)]^2 U(p+q) dq d\omega \sim \\ &\sim n_0^2 U_0^3 \int \frac{dq}{(\mu - \varepsilon_0(q))^2}. \end{aligned}$$

Последний интеграл в отличие от предыдущего случая сходится на верхнем пределе, и в нем главную роль играет область  $|q| \sim \sqrt{m\mu} \sim \sqrt{n_0 U_0 m}$ , так что

$$\Sigma_{20}^{(3a)} \sim \frac{n_0^2 U_0^3 m^{3/2}}{\mu^{1/2}} \sim \Sigma_{20}^{(1)} \xi^{3/2} \beta. \quad (25.7)$$

В то же время диаграмма третьего порядка рис. 75, б имеет величину

$$\Sigma_{20}^{(3b)} \sim \Sigma_{20}^{(1)} \xi^2. \quad (25.8)$$

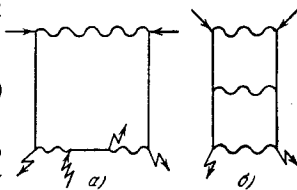


Рис. 75.

Из (25.7) и (25.8) видно, что  $\Sigma_{20}^{(3a)} \sim \beta \xi^{-1/2} \Sigma_{20}^{(3b)}$ . Этот результат есть следствие того факта, что  $\Sigma_{20}^{(3b)}$  содержит два интеграла от произведения двух  $G^{(0)}$ , формально расходящихся каждый на верхнем пределе, тогда как в  $\Sigma_{20}^{(3a)}$  интегрируются три функции  $G^{(0)}$ ; интеграл сходится без обрезания и определяется значениями подынтегрального выражения в области импульсов  $|q| \sim \sqrt{m\mu}$ . На графиках это отличие состоит в числе сплошных линий в замкнутой петле (образованной прямыми и волнистыми линиями).

Таким образом, каждая петля в  $\Sigma_{ik}$  с числом прямых линий больше двух вносит малый параметр  $\beta$ , петли же с двумя линиями не содержат  $\beta$ . В низшем приближении надо учесть поэтому графики только второго типа. Формально это означает, что из всех графиков для  $\Sigma_{11}$  и  $\Sigma_{20}$  надо выбрать только те, в которых содержатся две конденсатные линии, входящие или выходящие, т. е. графики первой степени по  $n_0$ . Действительно, из соображений размерности ясно, что все графики, содержащие большую степень  $n_0$ , содержат дополнительную малость по параметру  $\beta$ .

Все нужные графики принадлежат к лестничному типу (рис. 76). Обозначим совокупность графиков рис. 77 в импульсном представлении через  $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$ . Первое приближение по  $\beta$  отличается, таким образом, от первого приближения теории возмущений заменой компоненты Фурье потенциала  $U(q)$  (первая «перекладина лестницы») на  $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_1 - q, p_2 + q)$ . Разумеется, во всех более сложных графиках суммирование содержащихся в них «лестничных» петель также приводит к появлению в них  $\Gamma^{(0)}$  (для наших целей, однако, рассмотрение этих графиков излишне, поскольку, как указывалось, они дают члены более высокого порядка по  $\beta$ ). Таким

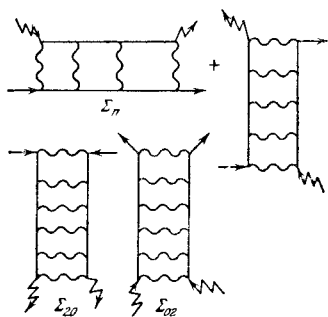


Рис. 76.

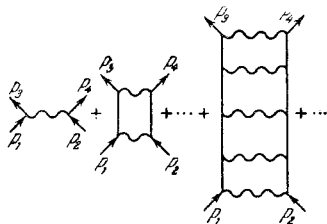


Рис. 77.

образом, потенциал  $U(q)$  исключается из задачи; роль эффективного потенциала играет  $\Gamma^{(0)}$ .

Интегральное уравнение для величины  $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  непосредственно следует из структуры графиков рис. 77:

$$\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4) = U(p_3 - p_1) + \frac{i}{(2\pi)^4} \int U(p_1 - k) G^{(0)}(k) \times \\ \times G^{(0)}(p_1 + p_2 - k) \Gamma^{(0)}(k, p_1 + p_2 - k; p_3, p_4) d^4k. \quad (25.9)$$

**4. Эффективный потенциал взаимодействия.** Займемся теперь изучением уравнения (25.9). Введем суммарный и относительные импульсы:

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = P; \quad p_1 - p_2 = 2k; \quad p_3 - p_4 = 2k'.$$



После этого уравнение (25.9) для  $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4) \equiv \equiv \Gamma^{(0)}(k, k'; P)$  преобразуется к следующему виду:

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) = U(k - k') + \frac{i}{(2\pi)^4} \int U(k - p) G^{(0)}\left(\frac{P}{2} + p\right) \times \\ \times G^{(0)}\left(\frac{P}{2} - p\right) \Gamma^{(0)}(p, k'; P) d^4 p. \quad (25.10)$$

Потенциал взаимодействия  $V(x - x')$  не содержит эффектов запаздывания  $V(x - x') = U(r - r') \delta(t - t')$ . Компонента Фурье  $V(q) \equiv U(q)$ , т. е. не зависит от четвертой компоненты 4-вектора  $q$ . Благодаря этому  $\Gamma^{(0)}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  зависит только от одной комбинации четвертых компонент  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \omega_4 = \Omega$ , где  $P = \{P, \Omega\}$ . Поэтому  $\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$  не зависит от четвертых компонент первых двух аргументов, что позволяет в интеграле уравнения (25.10) выполнить интегрирование по  $d\omega$ :

$$\int d\omega G^{(0)}\left(\frac{P}{2} + p\right) G^{(0)}\left(\frac{P}{2} - p\right) = - \frac{2\pi i}{\Omega - \frac{P^2}{4m} + 2\mu - \frac{p^2}{m} + i\delta}.$$

После подстановки в (25.10) уравнение для  $\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$  принимает вид

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) = U(k - k') + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p \frac{U(k - p) \Gamma^{(0)}(p, k'; P)}{\frac{x^2}{m} - \frac{p^2}{m} + i\delta} \quad (25.11)$$

$$\left(\frac{x^2}{m} = \Omega - \frac{P^2}{4m} + 2\mu\right).$$

При произвольном законе взаимодействия это уравнение нельзя решить в общем виде, однако его решение можно выразить через амплитуду рассеяния двух частиц друг на друге в пустоте.

Напомним читателю, как ставится задача о рассеянии частицы на некотором потенциале  $U(r)$ . Уравнение Шредингера частицы в поле  $U(r)$  может быть записано в виде

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_k(r) = 2m U(r) \psi_k(r),$$

где  $\frac{k^2}{2m}$  есть собственное значение энергии частицы,  $\psi_k(r)$  — ее волновая функция. Удобно представить это уравнение через решение уравнения Пуассона:

$$\psi_k(r) = -\frac{m}{2\pi} \int \frac{e^{i|k||r-r'|}}{|r-r'|} U(r') \psi_k(r') dr' + \psi_{0k}(r), \quad (25.12)$$

где  $\psi_{0k}$  есть волновая функция свободной частицы с той же энергией. Амплитуда рассеяния определяется из условия, чтобы на больших расстояниях от центра рассеяния волновая функция имела вид суммы плоской волны (свободная частица) и расходящейся<sup>1)</sup>:

$$\psi_k(r) = e^{ikr} - f(\theta) \frac{e^{i|k||r|}}{|r|},$$

где  $\theta$  — угол рассеяния по отношению к направлению вектора  $k$ . Сравнивая поведение (25.12) при больших  $|r|$  с этим определением, получим:

$$f(\theta) = \frac{m}{2\pi} \int e^{-ik'r'} U(r') \psi_k(r') dr',$$

где вектор  $k'$  направлен вдоль  $r$ . Переходя к импульсному представлению для волновой функции

$$\psi_k(r) = (2\pi)^{-3} \int \psi_k(p) e^{ipr} dp,$$

получим:

$$f(\theta) \equiv f(k, k') = \frac{m}{(2\pi)^4} \int U(k' - p) \psi_k(p) dp \quad (25.13)$$

(направление  $k$  — направление падения частицы). Обычно под амплитудой рассеяния понимают (25.13) для значений  $|k| = |k'|$ ; мы будем пользоваться обобщением амплитуды рассеяния  $f(k, k')$ , определяя ее, согласно (25.13), при произвольных векторах  $k$  и  $k'$ . Уравнение (25.12) в импульсном представлении имеет вид

$$\psi_k(p) = (2\pi)^3 \delta(k - p) + \frac{4\pi f(k, p)}{k^2 - p^2 + i\delta}. \quad (25.14)$$

<sup>1)</sup> Наше определение амплитуды рассеяния отличается знаком от общепринятого (см., например, [15]).

После подстановки (25.14) в (25.13) получаем:

$$\left[ \frac{2\pi}{m} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \right] = U(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{U(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) \left[ \frac{2\pi}{m} f(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \right]}{\frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\delta} d\mathbf{p}. \quad (25.15)$$

Вернемся теперь к уравнению (25.11). Рассеяние друг на друге частиц, взаимодействующих с потенциальной энергией  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ , сводится, как известно, к задаче о рассеянии одной частицы с приведенной массой  $m^* = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  на потенциале  $U(\mathbf{r})$ . Заменяя в уравнении (25.15) повсюду  $m \rightarrow m^* = \frac{m}{2}$ , перепишем это уравнение в виде

$$U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \left[ \frac{4\pi}{m} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \right] - \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \left[ \frac{4\pi}{m} f(\mathbf{k}', \mathbf{p}) \right] d\mathbf{p}}{\frac{\mathbf{k}'^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + i\delta} \equiv \hat{L} \left( \frac{4\pi}{m} f \right), \quad (25.16)$$

где через  $\hat{L}$  мы обозначили оператор, стоящий в правой части (25.16). Вычитая одно и то же выражение в левой и правой частях (25.11), приведем это уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(0)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'; P) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{U(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \Gamma^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}'; P)}{\frac{\mathbf{k}'^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + i\delta} d\mathbf{p} = \\ &= U(\mathbf{k} - \mathbf{k}') + \frac{1}{(2\pi)^3} \int U(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \left\{ \frac{1}{\frac{\mathbf{k}^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + i\delta} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\frac{\mathbf{k}'^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + i\delta} \right\} \Gamma^{(0)}(\mathbf{p}, \mathbf{k}'; P) d\mathbf{p}. \end{aligned}$$

В левой части этого уравнения стоит выражение  $\hat{L}(\Gamma^{(0)})$ . Подействовав на него оператором  $\hat{L}^{-1}$ , получим окончательно для  $\Gamma^{(0)}$  уравнение

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) = \frac{4\pi}{m} f(k', k) + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[ \frac{4\pi}{m} f(p, k) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\frac{\mathbf{x}^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + i\delta} - \frac{1}{\frac{\mathbf{k}'^2}{m} - \frac{\mathbf{p}^2}{m} + i\delta} \right\} \Gamma^{(0)}(p, k'; P) dp. \quad (25.17)$$

Как видно отсюда,  $\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$  в первом приближении равно  $\frac{4\pi}{m} f(k', k)$ . Интеграл в правой части (25.17) сходится, даже если считать постоянными  $f$  и  $\Gamma^{(0)}$ , и поэтому имеет порядок  $\sim \frac{|k|}{m} f^2$ . Как будет видно из дальнейшего, нужная область импульсов  $|k|$  есть  $|k| \sim \sqrt{m\mu} \sim \sqrt{n_0 f}$ , т. е.  $|k|f \ll 1$ , и для  $\Gamma^{(0)}(k, k'; P)$  достаточно ограничиться первым членом. Заметим, кроме того, что при этом можно в выражении для  $f(k, k')$  пренебречь зависимостью от  $k, k'$ . При малых энергиях эта зависимость имеет вид разложения по степеням отношения размеров частицы  $a$  к длине волны  $\lambda \sim 1/|k|$ . Поскольку  $a$  имеет порядок амплитуды рассеяния  $f$  и  $|k|f \ll 1$ , мы можем окончательно написать:

$$\Gamma^{(0)}(k, k'; P) \simeq \frac{4\pi}{m} f(0, 0) \equiv \frac{4\pi}{m} f_0. \quad (25.18)$$

**5. Функции Грина бозе-газа в приближении малой плотности. Спектр.** На основании изложенного выше мы имеем:

$$\Sigma_{11}(p) = \frac{8\pi}{m} f_0 n_0; \quad \Sigma_{20}(p) = \Sigma_{02}(p) = \frac{4\pi}{m} f_0 n_0; \quad \mu = \frac{4\pi}{m} f_0 n_0. \quad (25.19)$$

Подстановка этих выражений в (24.4) и (24.5) дает:

$$G(p) = \frac{\omega + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{4\pi n_0 f_0}{m}}{\omega^2 - \epsilon^2(p) + i\delta}, \\ \hat{G}(p) = - \frac{4\pi n_0 f_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \epsilon^2(p) + i\delta},$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{p}) &= \sqrt{\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{4\pi n_0 f_0}{m}\right)^2 - \frac{16\pi^2 n_0^2 f_0^2}{m^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mathbf{p}^4}{4m^2} + \frac{4\pi n_0 f_0}{m^2} \mathbf{p}^2} \quad (25.20)\end{aligned}$$

есть спектр системы при малых импульсах. Отличие (25.20) от полученного в гл. I выражения для спектра (4.11) состоит в замене борновской амплитуды на точную амплитуду  $S$ -рассеяния. Как следует из (25.20), квазичастицы при  $|\mathbf{p}| \ll \sqrt{4\pi n_0 f_0}$  имеют звуковую дисперсию  $\varepsilon(\mathbf{p}) \simeq |\mathbf{p}| \sqrt{\frac{4\pi n_0 f_0}{m^2}}$ , а при  $|\mathbf{p}| \gg \sqrt{4\pi n_0 f_0}$  переходят в «почти свободные» частицы  $\varepsilon(\mathbf{p}) \simeq \varepsilon_0(\mathbf{p}) + \frac{4\pi n_0 f_0}{m}$  (такой вид спектра соответствует частице, движущейся в сплошной среде с некоторым коэффициентом преломления). Переход в формуле для закона дисперсии от области фононов к области «свободных частиц» происходит при  $|\mathbf{p}| \sim \sqrt{4\pi n_0 f_0} \ll 1/f_0$ , так что обе области законно рассматривать в приближении постоянных амплитуд.

Отметим в заключение, что изученная модель никак не может быть сопоставлена свойствам реального гелия. Не говоря уже о том, что приближение малой плотности не соответствует жидкому He II, стоит еще подчеркнуть, что форма спектра (25.20) при малых  $\mathbf{p}$  на самом деле неустойчива. Действительно, при  $\mathbf{p} \neq 0$   $\frac{\partial \varepsilon}{\partial |\mathbf{p}|}$  — скорость возбуждения —

больше скорости звука  $\sqrt{\frac{4\pi n_0 f_0}{m^2}}$ , т. е. возбуждение может рождать фонон (см. следующий параграф). Это приводит к появлению затухания в спектре с временем жизни возбуждения, обратно пропорциональным  $|\mathbf{p}|^5$  при малых  $\mathbf{p}$ . Спектр гелия при малых  $\mathbf{p}$  такой неустойчивостью не обладает.

## § 26. Свойства спектра одночастичных возбуждений вблизи точки окончания спектра

**1. Постановка вопроса.** Спектр одночастичных возбуждений в реальной бозе-жидкости, т. е. в гелии, не может быть, конечно, вычислен теоретически. Линейная зависимость энергии от импульса (фононная часть спектра) имеет место только

при самых малых импульсах, при больших импульсах спектр отклоняется от линейного и дальнейший его ход зависит от конкретных свойств взаимодействий между частицами жидкости.

Характерным для спектра возбуждений в бозе-жидкости по сравнению со спектром ферми-жидкости является то, что бозе-возбуждения могут существовать как незатухающие. С математической точки зрения это означает, что решения уравнения (24.16) являются вещественными. При конечных температурах затухание возбуждений обусловлено возможностью их столкновений друг с другом. При абсолютном нуле реальных возбуждений нет. Поэтому единственным механизмом, приводящим к конечному времени жизни возбуждения, может явиться распад его на возбуждения меньшей энергии, если такой процесс допускается законами сохранения импульса и энергии. В ферми-жидкости всегда возможен распад с образованием частицы и дырки, что приводит к конечному времени жизни квазичастиц, обратно пропорциональному  $(|p| - p_0)^2$ . В бозе-жидкости при достаточно малых импульсах возбуждения существуют как незатухающие. Только с увеличением импульса энергия возбуждения достигает, в конце концов, некоторого порогового значения, выше которого возбуждение неустойчиво относительно распада на два или больше возбуждений с меньшей энергией. Такой порог мы назовем точкой окончания спектра. Она представляет собой особую точку кривой спектра. Ниже мы попытаемся выяснить характер этой особенности, причем, как это будет видно из дальнейшего, полное исследование может быть выполнено в общем виде без каких бы то ни было предположений о слабости взаимодействия (Питаевский [42]). Мы ограничимся только (надо думать, с достаточной физической общностью) предположением, что точка окончания спектра соответствует порогу распада на два (а не более) возбуждения.

В процессе распада возбуждения на два должны выполняться законы сохранения энергии и импульса. Это обстоятельство можно выразить уравнением

$$\epsilon(p) = \epsilon(q) + \epsilon(p - q). \quad (26.1)$$

Здесь  $p$  и  $\epsilon(p)$  — импульс и энергия распадающегося возбуждения,  $q$  и  $\epsilon(q)$  — импульс и энергия одного из возбужде-

ний, образующихся при распаде.  $p - q$  и  $\epsilon(p - q)$  — импульс и энергия второго из образовавшихся возбуждений. Если уравнение (26.1) при заданном  $p$  не имеет решений для  $q$ , это означает, что распад невозможен. Порог распада (импульс возбуждения в пороговой точке мы обозначим через  $p_c$  энергию — через  $\epsilon_c = \epsilon(p_c)$ ) характеризуется тем, что (26.1) не имеет решений для  $q$  при  $\epsilon < \epsilon_c$  и имеет решение при  $\epsilon = \epsilon_c$ . Для этого необходимо, чтобы правая часть (26.1) при  $|p| = p_c$  имела как функция вектора  $q$  минимум при некоторых значениях  $q$ . При  $|p| = p_c$  правая часть (26.1) зависит от двух переменных: от абсолютной величины вектора  $q$  и  $\cos \theta$ , где  $\theta$  — угол между векторами  $p$  и  $q$ . Указанное выражение может иметь минимум как при  $\theta$ , равном нулю, так и при конечном  $\theta$ .

Пусть правая часть (26.1) имеет минимум при некотором импульсе  $q$ . Произведем разложение до членов второго порядка по приращению  $\Delta q$ :

$$\begin{aligned} \epsilon(q + \Delta q) + \epsilon(p - q - \Delta q) \simeq & \epsilon(q) + \epsilon(p - q) + \frac{\partial \epsilon(q)}{\partial q_i} \Delta q_i - \\ & - \frac{\partial \epsilon(p - q)}{\partial p_i} \Delta q_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon(q)}{\partial q_i \partial q_k} \Delta q_i \Delta q_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon(p - q)}{\partial p_i \partial p_k} \Delta q_i \Delta q_k. \end{aligned}$$

В точке минимума линейные члены должны выпадать. Очевидно, имеются две возможности:

1)  $\frac{\partial \epsilon(q)}{\partial q} = \frac{\partial \epsilon(p - q)}{\partial p} \neq 0$ . Этот случай соответствует распаду на два возбуждения, распространяющихся в направлении вектора  $p$  с одинаковой скоростью  $v = \frac{\partial \epsilon}{\partial q}$ . При этом возможны два случая. Во-первых, одно из возбуждений может иметь импульс, сколь угодно близкий к нулю. Это соответствует случаю, когда в точке  $p_c$  скорость возбуждения сравнивается со скоростью звука  $c$  и возбуждение может родить фонon (случай *a*). Во-вторых, оба родившихся возбуждения могут иметь конечный импульс (случай *b*).

2)  $\frac{\partial \epsilon(q)}{\partial q} = 0$ ;  $\frac{\partial \epsilon(p - q)}{\partial p} = 0$ . Для этого нужно, чтобы каждое из возбуждений рождалось с импульсом, равным  $p_0$ , при котором энергия возбуждений  $\epsilon(p)$  минимальна. Для жидкого гелия такая точка на спектре соответствует

значению  $p_0 = 2 \cdot 10^{-19}$  гсм/сек. В окрестности этой точки спектр  $\varepsilon(\mathbf{p})$  имеет так называемый ротонный вид:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \Delta + \frac{(|\mathbf{p}| - p_0)^2}{2m^*} \quad (|\mathbf{p}| - p_0 \ll p_0). \quad (26.2)$$

Если  $\varepsilon_c = 2\Delta$ , возбуждение распадается на два ротона с импульсами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{q}_1$ , причем  $|\mathbf{q}|, |\mathbf{q}_1| = p_0$  и  $\varepsilon(\mathbf{q}), \varepsilon(\mathbf{q}_1) = \Delta$ . Угол  $\theta$ , под которым вылетают оба ротона, определяется из того условия, чтобы сумма их импульсов равнялась  $p_c$  (случай в). Три перечисленными случаями исчерпываются все типы порогов распада на два возбуждения.

**2. Система уравнений.** Для исследования вида спектра вблизи пороговой точки воспользуемся изложенными выше методами квантовой теории поля, т. е. будем искать вид гриновской функции вблизи точки окончания спектра, поскольку сам спектр определяется полюсами функции Грина. Физически

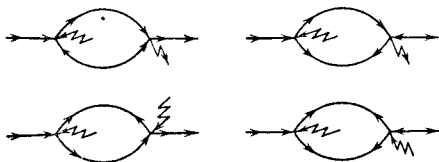


Рис. 78.

очевидно, что особенности функции Грина связаны с такими диаграммами, в которых одна линия раздваивается, изображая графически процесс распада возбуждения на два. Рассмотрим, например, графики, изображенные на рис. 78. В этих графиках фигурируют различные функции Грина  $G'$ ,  $\hat{G}$  и  $\check{G}$ . Каждая из петель на этом графике представляет собой собственно энергетическую часть, характеризующуюся тем, что она состоит из двух тройных вершин (если считать только число надконденсатных концов), соединенных двумя сплошными линиями. Соответствующий интеграл для такой петли есть:

$$\int d\omega' dq G(q) G(p - q) \Gamma_1 \Gamma_2, \quad (26.3)$$

где функции  $G$  могут означать любую из трех функций Грина  $G'$ ,  $\hat{G}$  или  $\check{G}$ , а  $\Gamma_1, \Gamma_2$  суть вершины, стоящие справа и слева на этих диаграммах. Предположим, что значения  $\omega$  и  $\mathbf{p}$  для



внешних концов лежат вблизи полюса  $\omega = \varepsilon(p)$  (выше мы показали, что полюсы всех трех функций Грина совпадают). Особенность интеграла (26.3), если она существует, связана с областью интегрирования по  $\omega'$  и  $q$ , в которой функции  $G(q)$  и  $G(p - q)$  находятся вблизи своего полюса. Согласно (24.10), (24.12) и (24.14), вблизи полюсов обе функции выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} G(q) &= \frac{A_1}{\omega' - \varepsilon(q) + i\delta} \quad \text{или} \quad \frac{A_2}{\omega' + \varepsilon(q) - i\delta}, \\ G(p - q) &= \frac{B_1}{\omega - \omega' - \varepsilon(p - q) + i\delta} \\ &\quad \text{или} \quad \frac{B_2}{\omega - \omega' + \varepsilon(p - q) - i\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (26.4)$$

в зависимости от того, около положительного или отрицательного полюса рассматриваем каждую функцию. Подставив эти выражения в (26.3), мы видим, что интерес для нас представляют перекрестные члены вида  $A_1 B_1$ . В этих членах интегрирование по  $\omega'$  можно произвести в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ , после чего остающийся интеграл по  $q$  в некоторой области значений  $q$  имеет вид

$$\int \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 A B dq}{\varepsilon(q) + \varepsilon(p - q) - \omega}. \quad (26.5)$$

Особенности последнего интеграла связаны с тем, обращается ли при каких бы то ни было значениях  $q$  в нуль знаменатель подынтегрального выражения. При  $\omega < \varepsilon(p_c)$ , согласно произведенному выше анализу, знаменатель всегда больше нуля; при  $\omega = \varepsilon(p_c)$  впервые обращается в бесконечность подынтегральное выражение (26.5), а поэтому точка  $\omega = \varepsilon(p_c)$  является особой в математическом смысле слова точкой для рассматриваемого интеграла. Характер этой особенности определяется, таким образом, одними только аналитическими свойствами функций Грина и не зависит от того, какой конкретно график для собственно энергетической части мы выбрали из графиков рис. 78. Последнее обстоятельство позволяет существенно упростить дальнейшее рассмотрение. Действительно, для определения характера особенности, как мы только что показали, нужны выражения функций Грина вблизи полюса. Вблизи полюса все три функции

Грина имеют одинаковый вид. Поэтому, если мы не интересуемся конкретной величиной регулярных членов и различными несущественными коэффициентами, поскольку диаграммы для всех трех функций Грина являются одинаковыми по своей структуре, мы можем не делать различия между функциями  $G'$ ,  $\hat{G}$  и  $\check{G}$  вблизи их полюсов. Сложим, например, уравнения (24.2) и введем некоторую новую функцию  $G_1(p) = G'(p) + \hat{G}(p)$ . Для функции  $G_1(p)$  получим следующее уравнение:

$$G_1(p) = G^{(0)}(p) + G^{(0)}(p) [\Sigma_{11}(p) + \Sigma_{20}(p)] G_1(p).$$

Разделим всю совокупность собственно энергетических частей  $\Sigma = \Sigma_{11} + \Sigma_{20}$  на диаграммы, не имеющие особенностей

$$\underline{G(p)} = \underline{G^{(0)}(p)} + \underline{G^{(0)}(p)} \text{ --- } \text{loop} \text{ --- } G(p)$$

Рис. 79.

в точке  $\omega = \epsilon_c(\Sigma_0)$ , и диаграммы  $\Sigma_1$ , имеющие особенности, которые графически имеют вид, изображенный на рис. 78. Введем функцию  $\tilde{G}^{(0)}(p)$  следующим образом:

$$\tilde{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{G^{(0)-1}(p) - \Sigma_0(p)}.$$

Тогда остающееся уравнение может быть написано в виде уравнения Дайсона, схематически представленного на рис. 79. Поскольку характер особенности определяется видом всех функций Грина в точке полюса, где они отличаются друг от друга только коэффициентами, заменим все внутренние линии  $G'$ ,  $\hat{G}$  или  $\check{G}$  на  $G_1$ . Слева в петле стоит некоторая «затравочная» вершина  $\Gamma^{(0)}$ , представляющая собой, с точки зрения общей техники, результат взаимодействия трех над-конденсатных частиц с частицами конденсата (как, например, на графиках рис. 78), справа имеется  $\Gamma$  — тройная вершина, получающаяся из  $\Gamma^{(0)}$  в результате взаимодействия выходящих из нее линий.

Графики, выражающие  $\Gamma(p, p-q, q)$  через  $\Gamma^{(0)}(p, p-q, q)$ , приведены на рис. 80, а. Квадратиком на этом рисунке от-

мечена полная неприводимая вершинная часть для рассеяния двух надконденсатных частиц друг на друга  $\Gamma(p_1, p_2, p_3, p_4)$ . Суммирование этих диаграмм осуществляется простым уравнением, приведенным на рис. 80, б. Это есть совокупность всех тех четырехчастичных графиков, которые не могут быть

а)  $\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots$

б)  $\text{---} \bullet \text{---} = \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---}$

Рис. 80.

разделены между концами  $p_1, p_2$  и  $p_3, p_4$  на две части, соединенные лишь одной или двумя линиями. Опуская, далее, всюду индекс у  $G_1$ , напомним уравнения в аналитическом виде:

$$G^{-1}(p) - \tilde{G}^{(0)-1}(p) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \Gamma^{(0)}(p, p-q, q) G(q) \times \\ \times G(p-q) \Gamma(p, p-q, q) d^4q, \quad (26.6)$$

$$\Gamma(p, p-q, q) = \Gamma^{(0)}(p, p-q, q) + \frac{i}{(2\pi)^4} \int \Gamma(p, p-k, k) \times \\ \times G(k) G(p-k) \Gamma(k, p-k; p-q, q) d^4k. \quad (26.7)$$

Свойства уравнений (26.6) и (26.7) вблизи порогов всех трех типов, указанных в начале этого параграфа, совершенно различны, и мы должны рассмотреть все эти случаи отдельно.

**3. Свойства спектра вблизи порога рождения фонона.** Рассмотрим свойства спектра возбуждений вблизи точки, где скорость возбуждений делается равной скорости звука. Начиная с этой точки возбуждение может рождать фонон. Законы сохранения (26.1) в этом случае принимают вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p} - \mathbf{q}) + \omega(\mathbf{q}), \quad (26.1')$$

где  $\omega(\mathbf{q})$  — частота фонона,  $\mathbf{q}$  — его волновой вектор. При малых  $\mathbf{q}$  частота  $\omega(\mathbf{q})$  имеет вид

$$\omega(\mathbf{q}) = c |\mathbf{q}| - \alpha |\mathbf{q}|^3. \quad (26.8)$$

Мы будем считать, что  $\alpha > 0$ , т. е. фононный спектр является устойчивым, однако ниже члены третьего порядка в  $\omega(\mathbf{q})$  нам не понадобятся. Функция  $\varepsilon(\mathbf{p})$  имеет особенность при

$|\mathbf{p}| = p_c$ . Мы предположим (это будет подтверждено окончательным результатом), что особенность сказывается в членах более высокого порядка малости, чем второй по степеням  $\Delta p = |\mathbf{p}| - p_c$ , т. е. что вблизи  $p_c$

$$\varepsilon(\mathbf{p}) \simeq \varepsilon_c + c \Delta p + \beta (\Delta p)^2. \quad (26.9)$$

(По предположению скорость возбуждения  $v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial |\mathbf{p}|}$  при  $|\mathbf{p}| = p_c$  равна скорости звука.)

При  $|\mathbf{p}| = p_c$  и  $\cos \theta = 1$  ( $\theta$ —угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$ ) правая часть (26.1') с учетом (26.8) и (26.9) имеет вид:

$$\varepsilon_c + \beta |\mathbf{q}|^2. \quad (26.10)$$

Точка  $|\mathbf{p}| = p_c$  действительно является порогом лишь при условии, что выражение (26.10) имеет при  $\mathbf{q} = 0$  минимум, для чего необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\beta > 0.$$

Поскольку при  $|\mathbf{p}| = p_c$  в рассматриваемом случае возбуждение может родить фонов с  $\mathbf{q}$ , сколь угодно близким к нулю, для нахождения особенности в интеграле (26.6) будет существенна область малых значений аргумента одной из гриновских функций, например  $G(\mathbf{q})$ . При малых  $\omega$  и  $\mathbf{q}$  гриновская функция равна (24.19)

$$G(\mathbf{q}) = \frac{a}{\omega^2 - \omega^2(\mathbf{q}) + i\delta} \quad (26.11)$$

и пропорциональна функции распространения фонона. (Пользоваться для функции  $G(\mathbf{q})$  представлением (26.4) нельзя, поскольку при малых  $\mathbf{q}$  оба полюса почти совпадают.)

Вблизи  $|\mathbf{p}| = p_c$  и  $\varepsilon = \varepsilon_c$  функция Грина имеет особенность. Мы, однако, предположим, что, в соответствии с (26.9),  $G^{-1}(\mathbf{p})$  вблизи нуля (т. е. вблизи полюса  $G(\mathbf{p})$ ) имеет вид

$$G^{-1}(\mathbf{p}) = A^{-1} [\Delta \varepsilon - c \Delta p - \beta (\Delta p)^2 + i\delta] \quad (26.12)$$

$$(\Delta p = |\mathbf{p}| - p_c, \quad \Delta \varepsilon = \omega - \varepsilon_c).$$

Члены более высокого порядка в  $G^{-1}(\mathbf{p})$ , содержащие особенность, мы и должны определить.

Рассмотрим свойства вершинной части  $\Gamma(p, p - q, q)$ . При малых  $q$  эта вершина представляет процесс, в котором частица с импульсом  $p$  испускает длинноволновое возбуждение или фонон. Такая вершина обязательно должна быть пропорциональна величине импульса  $|q|$  испущенного фона, поскольку с макроскопической точки зрения этот процесс представляет собой рассеяние возбуждения на колебаниях плотности (звук). В пределе бесконечно больших длин звуковых колебаний такое взаимодействие должно обращаться в нуль, поскольку в однородной среде возбуждение не рассеивается. Мы будем поэтому в области малых  $|q|$  пользоваться для  $\Gamma(p, p - q, q)$  выражением:

$$\Gamma(p, p - q, q) = g|q|. \quad (26.13)$$

Рассмотрим теперь интеграл в правой части уравнения (26.6). Этот интеграл в каждом порядке по  $\Gamma$ , согласно определению  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  (рис. 80), представляет собой цепочку, состоящую из петель, соединённых между собой четырехчастичной вершинной функцией (рис. 81). Каждая из этих петель дает вклад в особенность гриновской функции, причем, поскольку мы предположили, что нерегулярные члены малы, вклад от каждой петли надо учитывать только один раз.

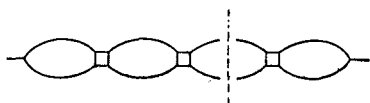


Рис. 81.

Зафиксируем некоторую петлю, тогда совокупности графиков справа и слева от нее суммируются независимо и, согласно определению точной трехвершинной функции  $\Gamma(p, p - q, q)$ , образуют в обеих вершинах рассматриваемой петли трехчастичную функцию  $\Gamma(p, p - q, q)$ . Таким образом, малый нерегулярный добавок к обратной функции Грина  $G^{-1}(p)$  может быть найден из рассмотрения нерегулярной части выражения

$$\int \Gamma^2(p, p - q, q) G(q) G(p - q) d^4q.$$

Рассмотрим в этом выражении область малых  $q$  и подставим сюда значения (26.11) — (26.13) для  $\Gamma(p, p - q, q)$ ,  $G(q)$  и  $G(p - q)$ . Получим:

$$Aag^2 \int \frac{|q|^4 d|q| d\omega'}{(\omega'^2 - c^2 q^2 + i\delta)(\omega' - \omega + \varepsilon(p - q) - i\delta)}.$$

Интегрирование по  $\omega'$  может производиться в интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$  и сводится к взятию вычетов в точке  $\omega' = c|q|$ . Опуская в дальнейшем несущественные для нас коэффициенты, напишем это выражение после выполнения интегрирования по  $\omega'$ :

$$\int \frac{|q|^3 d|q| d \cos \theta}{c|q| + \varepsilon(p - q) - \omega}.$$

Хотя сам этот интеграл сходится на верхнем пределе, его особенность определяется поведением подынтегрального выражения в области малых  $|q|$ . Разложим знаменатель, используя (26.10). Для отыскания особенности существенны малые углы  $\theta \ll 1$ , поэтому с требуемой точностью в квадратичных членах можно положить  $\cos \theta = 1$ . В результате имеем:

$$\begin{aligned} \int \frac{|q|^3 d|q| d \cos \theta}{x + c|q|(1 - \cos \theta) - 2\beta \Delta p |q| + \beta |q|^2} &\sim \\ &\sim \int |q|^2 \ln(x - 2\beta |q| \Delta p + \beta |q|^2) d|q|. \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение  $x = c \Delta p - \Delta \varepsilon + \beta (\Delta p)^2$ . Разлагая выражение под логарифмом на множители и интегрируя, получаем:

$$a_1 \left(\frac{k_1}{2}\right)^3 \ln k_1 + a_2 \left(\frac{k_2}{2}\right)^3 \ln k_2, \quad (26.14)$$

где

$$k_{1,2} = \beta \Delta p \pm \sqrt{(\beta \Delta p)^2 - \beta x}.$$

Из (26.14) видно, что  $G^{-1}(p)$  действительно имеет особенность в членах более высокого порядка, чем те, которые были использованы при выводе последнего выражения. Это обстоятельство оправдывает все сделанные предположения о малости нерегулярных членов.

Определим последние члены в непосредственной близости к полюсу  $G(p)$ , т. е. при

$$|x| \ll \beta (\Delta p)^2.$$

В этом случае можно пренебречь членом с  $k_2$ . Тогда получаем из (26.14)

$$(\Delta p)^3 \ln(-\Delta p). \quad (26.15)$$

Согласно (26.12) и (26.15), в окрестности полюса гриновская функция  $G(p)$  имеет вид

$$G(p) = \frac{A}{\omega - \varepsilon_c - c \Delta p - \beta (\Delta p)^2 - a (\Delta p)^3 \ln(-\Delta p)}.$$

Эта функция определяет энергию элементарного возбуждения вблизи порога. Ниже порога затухание отсутствует:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_c + c(|p| - p_c) + \beta(|p| - p_c)^2 + a(|p| - p_c)^3 \ln(|p_c - |p||).$$

Выше порога  $|p| > p_c$  энергия возбуждения имеет отрицательную мнимую часть, равную  $-a\pi(\Delta p)^3$ :

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_c + c(|p| - p_c) + \beta(|p| - p_c)^2 + a(|p| - p_c)^3 \ln|p_c - |p|| - a\pi i(|p| - p_c)^3.$$

Отсюда, в частности, следует, что должно быть  $a > 0$ . Таким образом, при  $|p| > p_c$  возбуждения не существуют как незатухающие: время жизни возбуждений обратно пропорционально  $(|p| - p_c)^3$ . Малость затухания вблизи порога связана с тем, что взаимодействие с длинноволновыми фононами всегда является слабым из-за наличия множителя  $|q|$  в  $\Gamma$ .

**4. Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с параллельными не равными нулю импульсами.** При интегрировании по  $q$  в (26.6) существенны, как это следует из физических соображений, те значения импульса  $q$  и частоты  $\omega'$ , с которыми рождаются возбуждения вблизи порога. Но эти значения импульса и энергии не являются особыми для гриновских функций рождающихся возбуждений. Единственная особенность такой точки заключается в том, что в ее окрестности данное возбуждение могло бы «слипнуться» с другим — процесс, который невозможен при абсолютном нуле из-за отсутствия реальных возбуждений. Поэтому гриновские функции, стоящие под интегралом в (26.6), имеют вблизи полюса простой вид (26.4):

$$G(q) = \frac{A}{\omega - \varepsilon(q) + i\delta},$$

где  $\varepsilon(q)$  вещественно и не имеет особенностей в рассматриваемой окрестности значений вектора  $q$ . Это обстоятельство сильно облегчает исследование вопроса.

Рассмотрим одну из петель в совокупности цепочек, соответствующих, согласно рис. 81 или уравнению (26.7), правой

части уравнения (26.6). Фигурирующие в вершинах этой петли величины  $\Gamma(p_1 p_2; p_3 p_4)$  или  $\Gamma^{(0)}(p, p - q, q)$ , очевидно, никакими особенностями не обладают. В дальнейшем мы будем повсюду опускать их при вычислениях как приводящих лишь к несущественным коэффициентам или регулярным добавкам в гриновской функции. Ограничимся в изучаемой петле областью интегрирования по  $q$ , близкой к значениям импульса  $q_0$  и энергии  $\epsilon_0$ , с которыми рождаются возбуждения. Подставляя выражения для гриновских функций (26.4) и интегрируя по  $\omega'$ , получим, что та часть интеграла в петле, которая содержит особенность, может быть представлена в виде

$$\int \frac{dq}{\epsilon(q) + \epsilon(p - q) - \omega}.$$

Поскольку при  $|p| = p_c$  выражение  $\epsilon(q) + \epsilon(p - q)$  должно иметь минимум, при значениях  $|p|$ , близких к  $p_c$ , оно имеет вид

$$\epsilon(q) + \epsilon(p - q) \simeq \epsilon_c + v_c \Delta p + \alpha (q - q_0)^2 + \frac{\beta (q - q_0, p_c)^2}{p_c^2},$$

где  $v_c$  — скорость каждого из образующихся в пороговой точке возбуждений,  $q_0$  — импульс одного из рождающихся возбуждений (напоминаем, что вылетающие после распада возбуждения имеют импульс, направленный вдоль вектора  $p_c$ ). Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  в этом разложении определяются видом функций  $\epsilon(p - q)$  и  $\epsilon(q)$ :

$$\alpha = \frac{v_c p_c}{2q_0(p_c - q_0)}, \quad \beta = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} + \left( \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial q^2} \right)_{q=p_c - q_0} - \frac{v_c p_c}{q_0(p_c - q_0)} \right\}.$$

Вводя новую переменную  $u = q - q_0$ ,  $(u p_c) = u p_c \cos \psi$ , получаем:

$$\int \frac{u^2 du d \cos \psi}{v_c \Delta p - \Delta \epsilon + \alpha u^2 + \beta u^2 \cos^2 \psi} \simeq V \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \epsilon}.$$

Суммирование всех петель не изменит характера особенности, поскольку в отличие от фононного случая полная трехчастичная функция  $\Gamma(p, p - q, q)$  при интересующих нас значениях  $|q| \sim q_0$  не должна обращаться ни в нуль, ни в беско-



нечность. Таким образом, нерегулярная часть в обратной гриновской функции вблизи  $p_c$  и  $\varepsilon_c$  имеет вид

$$a \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}.$$

Поскольку точка  $|p| = p_c$  и  $\varepsilon = \varepsilon_c$  по предположению есть точка спектра, то при  $\Delta p = 0$  и  $\Delta \varepsilon = 0$  функция  $G^{-1}(p)$  должна обращаться в нуль, и, следовательно, при малых  $\Delta \varepsilon$  и  $\Delta p$  регулярная часть  $G^{-1}(p)$  должна иметь вид  $a_1 \Delta p + b_1 \Delta \varepsilon$ . Окончательно

$$G^{-1}(p) = A^{-1} [a \Delta p + \Delta \varepsilon + b \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}].$$

Энергия возбуждения определяется уравнением

$$G^{-1}(p) = 0. \quad (26.16)$$

Решая формально это уравнение, получим два корня:

$$\Delta \varepsilon_{1,2} = -a \Delta p - \frac{b^2}{2} \pm \sqrt{ab^2 \Delta p + \frac{b^4}{4} + b^2 v_c \Delta p},$$

из которых надо выбрать  $\Delta \varepsilon_1$  со знаком «плюс» перед корнем, чтобы  $\Delta \varepsilon \rightarrow 0$  при  $\Delta p \rightarrow 0$ . Разлагая подкоренное выражение вблизи порога при малых  $\Delta p$ , получим:

$$\varepsilon \simeq \varepsilon_c + v_c (|p| - p_c) - \left( \frac{a + v_c}{b} \right)^2 (\Delta p)^2.$$

Подставляя это выражение в (26.16), видим, что для того, чтобы уравнение (26.16) имело решение при малых и отрицательных  $\Delta p$  (перед порогом), необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\frac{a + v_c}{b} > 0.$$

При  $|p| > p_c$ , когда  $a \Delta p + \Delta \varepsilon$  и  $b \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}$  оба положительны, уравнение вообще не имеет решений — ни действительных, ни комплексных. Таким образом, в рассматриваемом случае кривая энергетического спектра не может быть продолжена за пороговую точку и оканчивается в ней с наклоном, равным  $v_c$ .

**5. Распад на два возбуждения, вылетающих под углом друг к другу.** И в этом случае при интегрированиях существенна область тех значений  $|q|$ , с которыми рождаются

возбуждения вблизи пороговой точки. В этой области гриновские функции по тем же причинам, что и в предыдущем случае, имеют свой обычный вид (26.4). Однако теперь уже нельзя утверждать, что вершина  $\Gamma$  конечна при  $\epsilon = \epsilon_c$ .

Для начала рассмотрим, как и выше, одну из петель на рис. 81. Величины, стоящие в вершинах петли, не содержат, согласно их определению, опасных интегрирований. Поэтому относительно них естественно предположить, что эти величины остаются конечными в пороговой точке. Рассмотрим, как обычно, интегрирование по области значений  $\omega'$  и  $q$ , близких к тем значениям, с которыми рождаются возбуждения вблизи порога. Особенности такой петли сводятся к особенностям интеграла

$$\int \frac{dq}{\epsilon(q) + \epsilon(p - q) - \omega},$$

в котором для  $\epsilon(q)$  и  $\epsilon(p - q)$  можно воспользоваться разложением (26.2)  $\epsilon(q)$  вблизи ротонной части спектра (напомним, что случай  $b$  соответствует распаду на два ротона с импульсами, равными по величине  $p_0$  и направленными под некоторым конечным углом  $\theta_0$  друг к другу,  $\cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{p_c}{2p_0}$ ). После подстановки (26.2) предыдущее выражение преобразуется к виду

$$\int \frac{dq}{2\Delta - \omega + \frac{(|q| - p_0)^2}{2m^*} + \frac{(|q - p| - p_0)^2}{2m^*}}. \quad (26.17)$$

Перейдем к цилиндрическим координатам  $q'_z$ ,  $q'_\rho$ ,  $\varphi$  по формулам (ось  $z$  вдоль вектора  $p$ ):

$$\begin{aligned} q_z &= p_0 \cos \frac{\theta_0}{2} + q'_z, \quad q_x = \left( p_0 \sin \frac{\theta_0}{2} + q'_\rho \right) \cos \varphi, \\ q_y &= \left( p_0 \sin \frac{\theta_0}{2} + q'_\rho \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (26.18)$$

Подставляя (26.18) в (26.17) и пренебрегая высшими степенями  $q'_z$  и  $q'_\rho$ , получаем:

$$\int \frac{dq'_\rho dq'_z}{2\Delta - \omega + \frac{1}{m^*} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} q'^2_\rho + \cos^2 \frac{\theta_0}{2} q'^2_z \right)}.$$

В последнем выражении удобно ввести полярные координаты  $r$  и  $\psi$ :

$$\frac{1}{\sqrt{m^*}} q'_\rho \sin \frac{\theta_0}{2} = r \cos \psi, \quad \frac{1}{\sqrt{m^*}} q'_z \cos \frac{\theta_0}{2} = r \sin \psi.$$

В результате найдем:

$$\int \frac{r dr}{2\Delta - \omega + r^2} \sim \ln(2\Delta - \omega).$$

Таким образом, каждая петля приводит к большому члену  $\ln 2\Delta - \omega$ , зависящему только от частоты внешнего конца  $\omega$ . Зафиксируем некоторую петлю; совокупность всех петель слева и справа от нее представляет собой, согласно рис. 80,  $a$  и уравнению (26.7), точную трехчастичную вершину  $\Gamma$ . Таким образом, главный член в правой части уравнения (26.6) при малых  $2\Delta - \omega$  имеет вид

$$\Gamma^2(p, p - q_0, q_0) \ln(2\Delta - \omega), \quad (26.19)$$

где  $q_0$  — критическое значение вектора  $q$  — импульса ротона, образующегося при распаде в пороговой точке.

Для определения  $\Gamma(p, p - q, q)$  в окрестности  $q \sim q_0$  можно решать уравнение (26.7). Проще, однако, непосредственно просуммировать главные члены ряда, которому это уравнение соответствует, воспользовавшись упомянутым выше обстоятельством, что главный член в каждой петле зависит только от частоты  $\omega$  внешнего конца и одинаков для каждой петли. Формально рассматриваемый ряд есть геометрическая прогрессия, сумма которой имеет вид

$$\Gamma(p, p - q_0, q_0) \sim \frac{P}{1 + Q \ln \left( \frac{2\Delta - \omega}{2\Delta} \right)}.$$

Подставляя это выражение для вершины  $\Gamma(p, p - q_0, q_0)$  в (26.19), мы видим, что, согласно уравнению (26.6), основной нерегулярный член в функции  $G^{-1}(p)$  вблизи порога есть

$$\frac{a}{\ln \left( \frac{2\Delta - \omega}{\alpha} \right)}.$$

Окончательно, учитывая, что по предположению  $G^{-1}(p_c)=0$ , находим:

$$G^{-1}(p) = A^{-1} \left[ |p| - p_c - \frac{a}{\ln\left(\frac{2\Delta - \omega}{a}\right)} \right]. \quad (26.20)$$

Уравнение

$$G^{-1}(p) = 0$$

дает в этом случае для кривой энергетического спектра следующее выражение при  $|p| < p_c$ :

$$\varepsilon(p) = 2\Delta - \alpha e^{-\frac{a}{p_c - |p|}}$$

(экспоненциальная малость величины  $\varepsilon(p) - 2\Delta$  позволила нам пренебречь в разложении (26.20) регулярной части  $G^{-1}(p)$  степенями  $\Delta\varepsilon$ ). Таким образом, и в этом случае кривая  $\varepsilon(p)$  оканчивается в точке  $|p| = p_c$ , причем она имеет в этой точке горизонтальную касательную бесконечного порядка.

Отметим, что во всех рассмотренных случаях гриновская функция имеет при  $\omega = \varepsilon_c$ ,  $|p| = p_c$  точку ветвления.

Подчеркнем еще раз то обстоятельство, что предыдущий анализ не опирался ни на конкретный вид взаимодействия частиц между собой, ни на слабость этого взаимодействия. Нами были использованы только общие фундаментальные соотношения между точными величинами, определяемые диаграммой техникой<sup>1)</sup>.

## § 27. Применение методов теории поля к системе взаимодействующих бозе-частиц при конечной температуре

В заключение мы в этом параграфе рассмотрим возможность обобщения изложенной выше методики на случай системы бозе-частиц, взаимодействующих при конечной температуре. Такое обобщение естественно пытаться строить на базе общей схемы. С этой целью перейдем сразу же к термодинамическому описанию системы, в котором роль независимой переменной играет величина химического потенциала  $\mu$

<sup>1)</sup> Недавние экспериментальные данные [43, 44] указывают, по-видимому, что в реальном  $\text{He}^4$  осуществляется распад на два ротона.

вместо полного числа частиц  $N$  в системе. Мы уже указывали выше, что в идеальном бозе-газе при температурах ниже точки бозе-конденсации такое описание невозможно, поскольку химический потенциал газа, определяемый из условия постоянства среднего числа частиц в системе, оказывается тождественно равным нулю в этой области температур.

Как известно, в идеальном газе распределение бозе-частиц по состояниям с импульсом  $p$  имеет вид

$$n_p = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon_0(p) - \mu}{T}} - 1}.$$

Это распределение имеет смысл только при отрицательных  $\mu$ . При достаточно высоких температурах  $\mu < 0$ ; точка, где химический потенциал обращается в нуль, как раз и определяет температуру бозе-конденсации. При меньших температурах необходимо положить  $\mu$  равным нулю тождественно. Условие же постоянства среднего числа частиц в системе выполняется за счет частиц, «конденсированных» на основном уровне. Число последних, как мы неоднократно отмечали, сравнимо с полным числом частиц в системе, т. е. пропорционально объему системы.

В термодинамической технике формально фигурирует гриновская функция невзаимодействующих частиц, фурье-компонента которой равна

$$\mathbb{G}^{(0)}(p) = \frac{1}{i\omega - \epsilon_0(p) + \mu}.$$

Температура, при которой происходит бозе-конденсация системы, характеризуется тем, что у величины

$$\frac{1}{\mu - \epsilon_0(p)}$$

впервые появляется полюс при значении импульса  $p = 0$ . При попытке продолжить это выражение на область  $\mu > 0$  мы имели бы дело с величиной, которая меняет знак, обращаясь в бесконечность при совершенно произвольных значениях  $p$ . В то же время, если  $\mu < 0$ , то система невзаимодействующих частиц, как это видно из предыдущих рассуждений, находится выше температуры своей бозе-конденсации.

В действительности эти трудности носят фиктивный характер. Это обстоятельство связано с отсутствием для газа

взаимодействующих бозе-частиц области применимости теории возмущений ниже температуры бозе-конденсации. Например, мы видели в § 25, что в области малых импульсов отдельные члены теории возмущений приводят к расходящимся выражениям. Для получения физического результата там потребовалось выполнить суммирование целого ряда главных членов теории возмущений. Во всех подобных случаях общие уравнения и соотношения между различными величинами теории имеют более широкий смысл и применимы также за пределами применимости теории возмущений. Точные величины, такие, как гриновские функции, с учетом взаимодействия имеют разумные свойства и при температурах ниже точки бозе-конденсации.

Что касается химического потенциала, то он определяется из условия, чтобы среднее число частиц в системе было равно заданному. При наличии взаимодействия между частицами  $\mu$  нигде тождественно не равно нулю и поэтому может быть с самого начала выбрано в качестве независимой переменной, значение которой для данной системы потом определяется из упомянутого условия постоянства числа частиц. Из общих соображений нельзя установить, каков будет знак химического потенциала взаимодействующих бозе-частиц ниже точки конденсации<sup>1)</sup>.

Мы уже видели в § 23, что в формулировку теории возмущений при  $T=0$  входит точное число частиц конденсата; число частиц конденсата в идеальном газе, от которого приходится отпираться при выводе, в теории нигде не появляется. Такое же положение, как мы сейчас увидим, существует и при конечных температурах. Это обстоятельство является чрезвычайно существенным. В частности, оно позволяет уточнить, что же, собственно говоря, следует понимать под температурой бозе-конденсации системы взаимодействующих

---

<sup>1)</sup> В рассмотренной в § 25 модели  $\mu$ , согласно (25.19), положительно ( $f > 0$ ; выбор  $f < 0$  соответствовал бы притяжению между частицами; такая система в этом приближении была бы неустойчивой). У реального гелия при температурах ниже  $\lambda$ -точки  $\mu < 0$ , поскольку в противном случае гелий не мог бы при низких температурах находиться в равновесии со своим паром. Как известно, при равновесии необходимо равенство химических потенциалов обеих фаз. Пар гелия представляет собой разреженный бозе-газ, химический потенциал которого отрицателен.

щих частиц. Совершенно ясно, что эта температура, которую можно было бы назвать температурой  $\lambda$ -перехода, не обязана совпадать с температурой бозе-конденсации идеального газа. Физическим определением температуры  $\lambda$ -перехода является условие обращения в нуль плотности числа частиц в конденсате. Из общих соображений нельзя предсказать, в какую сторону сместится температура перехода при взаимодействии. Поэтому в принципе возможна как такая ситуация, что физический конденсат существует при температурах выше температуры конденсации идеального газа, так и наоборот, когда при более низких температурах включение взаимодействия приводит к исчезновению конденсата, существовавшего бы в идеальном бозе-газе.

Является уместным подчеркнуть здесь, что, по существу, в изложении § 23 в формулировке диаграммной техники при  $T=0$  нигде не использовался тот факт, что число частиц с импульсом, равным нулю, в идеальном газе равно бесконечности. Особенность изложенной там теории возмущений состоит в том, что, поскольку частицы с импульсом нуль играют выделенную роль, мы старались произвести вывод таким образом, чтобы операторы  $\xi_0$ ,  $\xi_0^+$  были учтены точно. Иными словами, в этом случае мы не делали обычных статистических предположений, что вклад от этих частиц относительно мал. Что же касается остальных частиц, то их мы рассматривали обычным образом.

Указанный подход оказывается возможным и при конечных температурах. При построении теории возмущений будем исходить из представлений функций Грина в виде

$$\frac{\langle T(\psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi_1^+, \dots, \mathcal{C}) \rangle}{\langle \mathcal{C} \rangle}.$$

Знак усреднения  $\langle \dots \rangle$  означает в этом представлении операцию взятия следа от усредняемого выражения по состояниям гамильтониана невзаимодействующих частиц  $H_0 - \mu N$ :

$$\langle \dots \rangle = \frac{\text{Sp} \left( e^{\frac{\mu N - H_0}{T}} \dots \right)}{\text{Sp} e^{\frac{\mu N - H_0}{T}}}. \quad (27.1)$$

Поскольку полное число частиц не сохраняется в переменных  $\mu$ , термодинамическое усреднение в (27.1) происходит

независимо для всех частиц, в том числе и для частиц с импульсом, равным нулю. Поэтому, совершенно так же как в § 23, операции  $T$  и  $\langle \dots \rangle$  можно представить каждую в виде последовательности двух операций  $T = T^0 T'$  и  $\langle \dots \rangle = \langle \langle \dots \rangle' \rangle^0$ , относящихся, соответственно, к частицам с импульсом нуль и к остальным частицам. Смысл такого разбиения тот же самый: частицы в состоянии с импульсом нуль играют особую роль, поэтому мы будем рассматривать их точно. Возможность разделения операций  $T$  и  $\langle \dots \rangle$  на две играла существенную роль в наших рассуждениях при абсолютном нуле.

Повторяя почти дословно аргументацию, подводившую нас к формулам (23.14), найдем, что и в технике Мацубары для вычисления любой гриновской функции надконденсатных частиц необходимо знать все «точные»  $n$ -частичные гриновские функции частиц в состоянии с импульсом, равным нулю. Так же как и в (23.14), функции Грина частиц конденсата определяются соотношениями

$$\mathbb{G}_{0n}(\tau_1 \dots \tau_n; \tau'_1 \dots \tau'_n) = \frac{\langle T(\xi_0(\tau_1) \dots \xi_0(\tau_n); \xi_0^+(\tau'_1) \dots \xi_0^+(\tau'_n) \mathbb{S}) \rangle}{\langle \mathbb{S} \rangle},$$

где  $\tau$  — «временные» параметры техники для  $T \neq 0$ . Последнее выражение может быть написано в виде, аналогичном (23.16), т. е. через «гайзенберговские» операторы:

$$\mathbb{G}_{0n}(\tau_1 \dots \tau_n; \tau'_1 \dots \tau'_n) = \frac{\text{Sp} \left\{ e^{\frac{\mu N - H}{T}} T(\tilde{\xi}_0(\tau_1) \dots \tilde{\xi}_0(\tau_n); \tilde{\xi}_0^+(\tau'_1) \dots \tilde{\xi}_0^+(\tau'_n)) \right\}}{\text{Sp} \left\{ e^{\frac{\mu N - H}{T}} \right\}}, \quad (27.2)$$

где «гайзенберговские» операторы  $\tilde{\xi}_0(\tau)$  и  $\tilde{\xi}_0^+(\tau)$  удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\xi}_0(\tau) &= [H - \mu N, \tilde{\xi}_0(\tau)], \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\xi}_0^+(\tau) &= [H - \mu N, \tilde{\xi}_0^+(\tau)] \end{aligned}$$



и связаны с обычными шредингеровскими операторами соотношениями

$$\tilde{\xi}_0(\tau) = e^{(H - \mu N)\tau} \xi_0 e^{-(H - \mu N)\tau}, \quad \tilde{\xi}_0^+(\tau) = e^{(H - \mu N)\tau} \xi_0^+ e^{-(H - \mu N)\tau}.$$

Гриновские функции  $\mathfrak{G}$  есть, таким образом, гиббсовские средние от хронологического произведения операторов  $\tilde{\xi}_0, \tilde{\xi}_0^+$ .

Напомним в этой связи, что в квантовой статистике усреднение величин может производиться двумя эквивалентными способами: с одной стороны, усреднение может рассматриваться как квантовомеханическое усреднение по действительному состоянию, в котором находится система. Это состояние характеризуется значениями энергии и числа частиц. С другой стороны, усреднение может производиться с помощью распределения Гиббса, при котором система рассматривается как незамкнутая; это позволяет ей с определенной вероятностью при заданной температуре находиться в различных квантовомеханических состояниях с различными значениями энергии и числа частиц. Эквивалентность двух способов усреднения основана на том, что распределение Гиббса имеет чрезвычайно узкий максимум около средних значений энергии и числа частиц, так что, например, относительная флуктуация энергии  $V \overline{(E - \bar{E})^2} / \bar{E} \propto 1/V \bar{N}$  и стремится к нулю, когда размеры системы стремятся к бесконечности. Энергия состояния и число частиц в замкнутой системе при квантовомеханическом усреднении, очевидно, совпадают с соответствующими средними значениями в распределении Гиббса. С термодинамической точки зрения различие в двух способах усреднения сводится только к тому, что в первом случае значение усредняемой величины выражается через энергию как термодинамическую переменную, тогда как при усреднении по Гиббсу то же самое значение будет выражено в зависимости от температуры. Тот же смысл в статистике имеет и введение химического потенциала. С учетом сказанного будем рассматривать (27.2) как среднее по квантовомеханическому состоянию системы:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{0n}(\tau_1 \dots \tau_n; \tau'_1 \dots \tau'_n) = \\ = \langle \Phi^* | T(\tilde{\xi}_0(\tau_1) \dots \tilde{\xi}_0(\tau_n); \tilde{\xi}_0^+(\tau'_1) \dots \tilde{\xi}_0^+(\tau'_n)) | \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (27.3)$$

Таким образом, согласно формулам (27.2), в ряд теории возмущений для любой функции Грина надконденсатных частиц входят точные гриновские функции частиц в состоянии с импульсом, равным нулю, которые, будучи записаны в виде (27.3), зависят только от свойств операторов  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$  по отношению к состоянию  $\Phi$  для взаимодействующих частиц. Поэтому если в этом состоянии имеется конденсат, то операторы  $\tilde{\xi}_0$  и  $\tilde{\xi}_0^+$  могут рассматриваться как числа, в соответствии с чем все функции Грина вида (27.2) должны быть заменены на произведение множителей  $\sqrt{n_0(T)}$ :

$$\mathbb{G}_{0m}(\tau_1 \dots \tau_n; \tau'_1 \dots \tau'_m) = [n_0(T)]^m. \quad (27.4)$$

В справедливости последнего можно убедиться совершенно так же, как это делалось в § 23 при выводе аналогичной формулы для абсолютного нуля температур.

В (27.4)  $n_0(T)$  есть плотность числа частиц при заданной температуре. Условие  $n_0(T_\lambda) = 0$  определяет температуру перехода  $T_\lambda$ . Как мы уже упоминали, эта температура может быть как выше, так и ниже температуры «бозе-конденсации»  $T_0$  идеального газа. В последнем случае разложение теории возмущений при  $T_0 > T > T_\lambda$  имеет совершенно обычный вид, несмотря на то, что в представлении взаимодействия конденсат существует и операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  очень велики. Подчеркнем еще раз, что это обстоятельство связано с тем, что в разложение теории возмущений входят точные функции Грина конденсатных частиц.

## ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЕ

### § 28. Гриновские функции излучения в поглощающей среде

Электромагнитное поле играет основную роль в том круге явлений, с которыми имеет дело статистическая физика. По существу, все силы, действующие между частицами конденсированных сред — твердых тел и жидкостей, имеют электромагнитную природу. Отличительной чертой этих сил является их короткодействующий характер; они спадают на расстояниях порядка межатомных и в основном определяют сцепление между частицами.

В этой главе мы не будем касаться короткодействующих сил и ограничимся кругом вопросов, связанных с электромагнитным излучением, длина волны которого значительно превышает межатомные расстояния. Сюда относятся как явления, происходящие при прохождении электромагнитных волн через вещество, так и различные эффекты, связанные с дальнедействующими электромагнитными силами (так называемыми силами Ван-дер-Ваальса).

Как известно, взаимодействие длинноволнового электромагнитного излучения с веществом может быть описано чисто макроскопическим образом путем введения комплексной диэлектрической постоянной  $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$  (см. [45]), зависящей от частоты излучения  $\omega$ <sup>1)</sup>. В этом параграфе мы

---

<sup>1)</sup> Мы будем считать магнитную проницаемость  $\mu(\omega)$  равной единице, поскольку она существенно отличается от единицы лишь в узких областях частот, которые, как правило, не будут для нас существенны.

найдем выражения для гриновских функций электромагнитного излучения в поглощающей среде через диэлектрическую постоянную последней.

Электромагнитное поле в квантовой механике обычно описывается шредингеровскими операторами вектор-потенциала  $A(\mathbf{r})$  и скалярного потенциала  $\varphi(\mathbf{r})$ . Мы будем пользоваться для этих операторов «четырёхмерными» обозначениями <sup>1)</sup>  $A_\alpha = (A, \varphi)$ ;  $\alpha = 1, 2, 3, 0$ . Наряду с оператором в шредингеровском представлении мы будем пользоваться гайзенберговскими операторами  $A_\alpha(\mathbf{r}, t)$ , определяемыми, как обычно,

$$A_\alpha(\mathbf{r}, t) = e^{it\hat{H}} A_\alpha(\mathbf{r}) e^{-it\hat{H}}. \quad (28.1)$$

Операторы  $A_\alpha(\mathbf{r}, t)$  связаны с операторами напряженностей электрического и магнитного полей  $E(\mathbf{r}, t)$  и  $H(\mathbf{r}, t)$  обычными соотношениями

$$\begin{aligned} E(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\partial}{\partial t} A(\mathbf{r}, t) - \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t), \\ H(\mathbf{r}, t) &= \text{rot } A(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (28.2)$$

Вектор-потенциал электромагнитного поля (а также представляющие его операторы в представлении вторичного квантования) определен неоднозначно. Всегда остается произвол, связанный с так называемой градиентной инвариантностью теории, заключающейся в том, что  $A_\alpha(\mathbf{r}, t)$  можно подвергнуть преобразованию:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &\rightarrow A(\mathbf{r}, t) + \text{grad } \chi(\mathbf{r}, t), \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \chi(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

где  $\chi$  — произвольный оператор. Нетрудно проверить, что при таком преобразовании, обычно называемом калибровочным, величины  $E$  и  $H$ , имеющие непосредственный физический смысл, не меняются.

---

<sup>1)</sup> Греческие индексы в этой главе нумеруют компоненты четырехмерного вектор-потенциала. Латинскими индексами  $i, k, \dots$  мы будем иногда обозначать его пространственные компоненты. По всем дважды повторяющимся индексам, как латинским, так и греческим, предполагается суммирование.

Большая величина длины волны электромагнитного поля выражается в том, что для средних <sup>1)</sup> значений электрического и магнитного полей  $\langle \mathbf{E} \rangle$ ,  $\langle \mathbf{H} \rangle$  существует замкнутая система уравнений — уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle &= \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\epsilon} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle), \\ \operatorname{rot} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle &= - \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \rangle. \end{aligned} \quad (28.3)$$

Фигурирующая в уравнениях (28.3) диэлектрическая постоянная  $\hat{\epsilon}$  зависит только от свойств среды и представляет собой в случае поглощающих сред оператор, действующий на функции времени по правилу

$$\hat{\epsilon} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle + \int_{-\infty}^t f(\mathbf{r}, t-t') \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \rangle dt'. \quad (28.4)$$

В фурье-компонентах действие оператора  $\hat{\epsilon}$  сводится просто к умножению  $\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle$  на диэлектрическую постоянную среды  $\epsilon(\omega)$ :

$$\epsilon(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \int_0^{\infty} e^{i\omega t} f(\mathbf{r}, t) dt, \quad (28.5)$$

а система уравнений (28.3) переходит в

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rangle &= -i\omega \epsilon(\mathbf{r}, \omega) \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle, \\ \operatorname{rot} \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle &= i\omega \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rangle. \end{aligned} \quad (28.6)$$

Можно показать (см. Ландау и Лифшиц [45]), что определенная при помощи (28.5) величина  $\epsilon(\omega)$  является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\omega$ , не имеющей в этой полуплоскости нулей.

<sup>1)</sup> Под усреднением мы понимаем статистическое усреднение

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{F - \hat{H}}{T}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \right\}.$$

Свойства электромагнитного излучения при конечных температурах определяются температурной гриновской функцией <sup>1)</sup>  $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \tau_1; \mathbf{r}_2, \tau_2)$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \tau_1 - \tau_2) = \\ = \begin{cases} -\text{Sp} \left\{ e^{(F-\hat{H})/T} e^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)} A_\alpha(\mathbf{r}_1) e^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)} A_\beta(\mathbf{r}_2) \right\} & \text{при } \tau_1 > \tau_2, \\ -\text{Sp} \left\{ e^{(F-\hat{H})/T} e^{-\hat{H}(\tau_1-\tau_2)} A_\beta(\mathbf{r}_2) e^{\hat{H}(\tau_1-\tau_2)} A_\alpha(\mathbf{r}_1) \right\} & \text{при } \tau_1 < \tau_2. \end{cases} \quad (28.7) \end{aligned}$$

Для того чтобы выразить  $\mathfrak{D}_{\alpha\beta}$  через диэлектрическую постоянную среды  $\varepsilon(\omega)$ , мы воспользуемся установленной в гл. III связью между температурной гриновской функцией и запаздывающей функцией, определяемой в нашем случае как

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; t_1 - t_2) = \\ = \begin{cases} -i \text{Sp} \left\{ e^{(F-\hat{H})/T} [A_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1) A_\beta(\mathbf{r}_2, t_2) - A_\beta(\mathbf{r}_2, t_2) A_\alpha(\mathbf{r}_1, t_1)] \right\} & \text{при } t_1 > t_2, \\ 0 & \text{при } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (28.8) \end{aligned}$$

При этом, поскольку мы имеем в виду в дальнейшем применить полученные результаты к неоднородным телам, мы уже не будем считать  $\mathfrak{D}$  и  $D^R$  функциями разности пространственных координат. Соответственно этому мы будем также считать, что диэлектрическая постоянная различна в различных точках тела:  $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, \omega)$ .

Повторим все выкладки § 17, опустив лишь переход к фурье-компонентам по пространственным координатам.

<sup>1)</sup> В формулу (28.7) вместо термодинамического потенциала  $\Omega$  входит свободная энергия  $F$  (ср. формулы (11.1), (11.2)). Такую замену можно произвести в связи с тем, что химический потенциал электромагнитного поля тождественно равен нулю.

Тогда легко получить следующие представления лемановского типа для  $\mathfrak{D}$  и  $D^R$ :

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; x)}{x - i\omega_n} dx, \quad (28.9)$$

$$D_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; x)}{x - \omega - i0} dx, \quad (28.10)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega) = \\ = -(2\pi)^3 \sum_{n, m} e^{\frac{F-E_n}{T}} (A_{\alpha}(\mathbf{r}_1))_{nm} (A_{\beta}(\mathbf{r}_2))_{mn} (1 - e^{-\omega_{mn}/T}) \delta(\omega - \omega_{mn}). \end{aligned}$$

Из (28.10) следует, что  $D^R(\omega)$  является функцией  $\omega$ , аналитической в верхней полуплоскости. Сравнивая (28.10) и (28.9), мы видим, что при  $\omega_n > 0$

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = D_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i|\omega_n|). \quad (28.11)$$

Для нахождения  $\mathfrak{D}$  при  $\omega_n < 0$  заметим, что  $\mathfrak{D}(\tau)$  является ввиду вещественности операторов электромагнитного поля ( $A_{\alpha}^{\dagger} = A_{\alpha}$ ) четной функцией  $\tau$  (см. § 11). Поэтому ее фурье-компонента  $\mathfrak{D}(\omega_n)$  будет четной по  $\omega_n$ , откуда и следует соотношение, справедливое при всех  $\omega_n$ <sup>1)</sup>:

$$\mathfrak{D}_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = D_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; i|\omega_n|). \quad (28.12)$$

Перейдем теперь к вычислению запаздывающей функции. При этом существенным является вопрос о калибровке вектор-потенциала. Тензор  $D_{\alpha\beta}^R$  имеет всего десять независимых компонент (как всякий симметричный тензор второго ранга). В нашем распоряжении, однако, остается значительный произвол, связанный с калибровочной инвариантностью. Действительно, физический смысл имеют не сами величины  $D_{\alpha\beta}^R$ , составленные из компонент вектор-потенциала, а лишь шесть величин, составленных из операторов  $E_i(\mathbf{r}, t)$  по тем же

<sup>1)</sup> Напомним, что, как и всякая гриновская функция бозевских частиц,  $\mathfrak{D}(\omega_n)$  имеет отличные от нуля компоненты только для «четных» частот  $\omega_n = 2\pi nT$ .

правилам, по каким  $D_{\alpha\beta}^R$  составлена из  $A_\alpha(\mathbf{r}, t)$  (формула (28.8)). Таким образом, на десять величин  $D_{\alpha\beta}^R$  наложено только шесть физических условий, т. е. в нашем распоряжении имеются четыре произвольные функции. Этим произволом можно воспользоваться, чтобы обратить в нуль компоненты  $D_{00}^R$  и  $D_{i0}^R$ . Такой выбор соответствует, очевидно, калибровке с равным нулю скалярным потенциалом. В этом случае операторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  связаны с  $\mathbf{A}$  формулами

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (28.2')$$

Чтобы выразить  $D_{ik}^R$  через  $\varepsilon(\omega)$ , поступим следующим образом. Представим себе, что наша система, состоящая из тела и равновесного электромагнитного излучения, помещена во внешнее поле, создаваемое сторонними токами  $\mathbf{j}^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t)$ . Уравнения Максвелла для средних полей в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rangle &= 4\pi \mathbf{j}^{\text{ст}}(\mathbf{r}, \omega) - i\omega \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle, \\ \text{rot } \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \rangle &= i\omega \langle \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \rangle. \end{aligned} \quad (28.6')$$

Усредненный потенциал  $\langle \mathbf{A}^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t) \rangle$  в случае калибровки (28.2') будет удовлетворять уравнению

$$[\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \omega^2 \delta_{il} - \text{rot}_{im} \text{rot}_{ml}] \langle A_l(\mathbf{r}, \omega) \rangle = -4\pi j_l^{\text{ст}}(\mathbf{r}, \omega). \quad (28.13)$$

Решение уравнения (28.13) имеет вид

$$\langle A_i^{\text{ст}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = - \int \bar{D}_{il}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) j_l^{\text{ст}}(\mathbf{r}', \omega) d\mathbf{r}', \quad (28.14)$$

где  $\bar{D}$  — так называемая гриновская функция уравнения (28.13). Она является решением уравнения

$$[\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \omega^2 \delta_{il} - \text{rot}_{im} \text{rot}_{ml}] \bar{D}_{lk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = 4\pi \delta_{lk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (28.15)$$

В силу аналитичности  $\varepsilon(\omega)$  в верхней полуплоскости функция  $\bar{D}$  также является аналитической в верхней полуплоскости.

С другой стороны,  $\langle \mathbf{A}^{\text{ст}} \rangle$  в присутствии сторонних токов можно вычислить непосредственно из определения (28.1).



В этом случае гамильтониан системы имеет вид  $\hat{H} + \hat{H}^{\text{ст}}$ , где  $\hat{H}$  — гамильтониан тела и излучения, а

$$\hat{H}^{\text{ст}} = - \int j^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{A}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Обозначая операторы в присутствии стороннего поля индексом «ст», будем иметь (сохранив для операторов без стороннего поля обозначения без индексов):

$$\mathbf{A}^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t) = e^{it(\hat{H} + \hat{H}^{\text{ст}})} \mathbf{A}(\mathbf{r}) e^{-it(\hat{H} + \hat{H}^{\text{ст}})}.$$

Далее, как мы это делали в гл. II, представим  $e^{-it(\hat{H} + \hat{H}^{\text{ст}})}$  в виде

$$e^{-it(\hat{H} + \hat{H}^{\text{ст}})} = e^{-it\hat{H}} S_{\text{ст}}(t).$$

Если сторонние токи удовлетворяют условию  $j^{\text{ст}}(t \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$ , то  $S_{\text{ст}}(t)$  имеет вид (ср. гл. II)

$$S_{\text{ст}}(t) = T_t \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^t \hat{H}^{\text{ст}}(t') dt' \right\}.$$

Среднее значение оператора вектор-потенциала в присутствии сторонних токов примет теперь вид

$$\langle \mathbf{A}^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \langle S_{\text{ст}}^{-1}(t) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) S_{\text{ст}}(t) \rangle.$$

Разлагая  $S_{\text{ст}}$  в ряд по  $\hat{H}^{\text{ст}}$  и удерживая члены первого порядка по  $j^{\text{ст}}$ , получим:

$$\begin{aligned} \langle A_i^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t) \rangle = & -i \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' j_k^{\text{ст}}(\mathbf{r}', t') \langle \{ A_k(\mathbf{r}', t') A_i(\mathbf{r}, t) - \\ & - A_i(\mathbf{r}, t) A_k(\mathbf{r}', t') \} \rangle. \end{aligned} \quad (28.16)$$

Эту величину можно выразить через введенную нами запаздывающую функцию электромагнитного поля  $D_{ik}^R$ . Согласно определению (28.8), имеем:

$$\langle A_i^{\text{ст}}(\mathbf{r}, t) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\mathbf{r}' D_{ik}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') j_k^{\text{ст}}(\mathbf{r}', t').$$

Переходя в этом соотношении к компонентам Фурье по времени, получим окончательно:

$$\langle A_i^{\text{CT}}(\mathbf{r}, \omega) \rangle = - \int d\mathbf{r}' D_{ik}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) j_k^{\text{CT}}(\mathbf{r}', \omega). \quad (28.17)$$

Сравнивая выражения (28.14) и (28.17), мы убеждаемся, что ввиду произвольности  $j^{\text{CT}}$ ,  $D_{ik}^R$  совпадает с введенной нами гриновской функцией уравнения (28.13)  $\bar{D}_{ik}$ . Мы приходим, таким образом, к выводу, что и  $D_{ik}^R$  удовлетворяет уравнению (28.15) (Дзялошинский и Питаевский [46]). Свойство аналитичности функции  $D_{ik}^R$  находится, разумеется, в полном согласии с аналитическими свойствами  $\epsilon(\omega)$ .

Уравнение для  $\mathfrak{D}_{ik}(\omega_n)$  получается из (28.13), если в последнем заменить  $\omega$  на  $i|\omega_n|$ :

$$\begin{aligned} [\epsilon(\mathbf{r}, i|\omega_n|) \omega_n^2 \delta_{il} + \text{rot}_{im} \text{rot}_{ml}] \mathfrak{D}_{lk}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n) = \\ = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (28.18)$$

Входящая сюда диэлектрическая постоянная при мнимом значении частоты связана простым соотношением с мнимой частью  $\epsilon(\omega)$  при вещественных частотах  $\epsilon''(\omega)$  (см., например, [45], § 58):

$$\epsilon(i|\omega_n|) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \epsilon''(\omega)}{\omega^2 + \omega_n^2} d\omega. \quad (28.19)$$

Поскольку всегда  $\epsilon'' > 0$ , то из (28.19) видно, что  $\epsilon(i|\omega_n|)$  является вещественной, положительной, монотонно убывающей функцией.

Решая уравнения (28.14) или (28.18), мы выразим, таким образом, гриновские функции электромагнитного поля через мнимую часть диэлектрической постоянной. В случае неоднородных сред это представляет собой, вообще говоря, очень сложную задачу. В последующих параграфах мы рассмотрим частный случай слоистых сред, в которых эта задача может быть решена до конца.

Обратимся к случаю однородной среды, когда  $\epsilon$  не зависит от координат. Поскольку теперь  $D^R$ ,  $\mathfrak{D}$  зависят только

от разности  $r - r'$ , то, переходя в (28.15) к компонентам Фурье, будем иметь

$$[(\omega^2 \varepsilon(\omega) - k^2) \delta_{il} + k_i k_l] D_{ik}^R(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \delta_{ik}. \quad (28.20)$$

Это уравнение определяет  $D^R$  при калибровке с равным нулю скалярным потенциалом. Чтобы найти  $D^R$  при произвольной калибровке, вычислим, пользуясь (28.20), функцию  $D_{ik}^E = \omega^2 D_{ik}^R$ , где  $D_{ik}^R$  — запаздывающая функция при калибровке  $\varphi = 0$ . Определенная таким образом величина является уже градиентно-инвариантной, поскольку она отличается от запаздывающей функции, составленной из компонент операторов напряженности электрического поля, на постоянное слагаемое  $4\pi \delta_{ik}$ . Функция  $D_{ik}^E$  удовлетворяет уравнению

$$[(\omega^2 \varepsilon(\omega) - k^2) \delta_{il} + k_i k_l] D_{ik}^E(\mathbf{k}, \omega) = 4\pi \omega^2 \delta_{ik} \quad (28.21)$$

и связана с функцией  $D_{\alpha\beta}^R$  в произвольной калибровке очевидным соотношением (ср. с (28.2))

$$D_{ik}^E = \omega^2 D_{ik}^R - \omega k_i D_{0k}^R - \omega k_k D_{i0}^R + k_i k_k D_{00}^R \quad (28.22)$$

(здесь и далее  $D_{00}^R$ ,  $D_{i0}^R$ ,  $D_{ik}^R$  обозначают временные, смешанные и пространственные компоненты  $D_{\alpha\beta}^R$  в произвольной калибровке). Из соображений симметрии вектор  $D_{i0}^R$  должен быть направлен по  $k$  — единственному вектору, входящему в (28.21) и (28.22):

$$D_{i0}^R = D_{0i}^R = dk_i; \quad (28.23)$$

по той же причине

$$D_{ik}^R = a \delta_{ik} + b k_i k_k. \quad (28.24)$$

Подставляя (28.22) — (28.24) в (28.21), мы получим два уравнения, определяющих  $D_{00}^R$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ :

$$\begin{aligned} a(\varepsilon(\omega) \omega^2 - k^2) &= 4\pi, \\ a + \varepsilon(\omega)(\omega^2 b + D_{00}^R - 2\omega d) &= 0. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Итак, мы видим, что в однородном случае  $D_{\alpha\beta}^R$  определена с точностью только до двух произвольных функций, в отличие от четырех функций в случае произвольной неоднородной среды.

Приведем теперь формулы для некоторых частных случаев. Положим  $d = b = 0$ . Тогда

$$D_{ik}^R = \frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2}, \quad D_{00}^R = -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)(\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2)}, \quad (28.26a)$$

$$D_{i0}^R = 0.$$

Случаю  $\varphi = 0$  соответствует:

$$D_{ik}^R = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2} \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{\varepsilon(\omega)\omega^2} \right), \quad D_{00}^R = D_{i0}^R = 0. \quad (28.26b)$$

Наконец, при так называемой поперечной калибровке ( $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ) имеем:

$$D_{ik}^R = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)\omega^2 - k^2} \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right), \quad (28.26b)$$

$$D_{00}^R = \frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)k^2}, \quad D_{i0}^R = 0.$$

Формулы для температурной гриновской функции  $\mathfrak{D}$  получаются из (28.26) заменой  $\omega \rightarrow i|\omega_n|$ :

$$\mathfrak{D}_{ik} = -\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2}, \quad (28.27a)$$

$$\mathfrak{D}_{00} = \frac{4\pi}{\varepsilon(i|\omega_n|)(\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2)}, \quad \mathfrak{D}_{i0} = 0,$$

$$\mathfrak{D}_{ik} = -\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2} \left( \delta_{ik} + \frac{k_i k_k}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2} \right), \quad \mathfrak{D}_{00} = \mathfrak{D}_{i0} = 0, \quad (28.27b)$$

$$\mathfrak{D}_{ik} = -\frac{4\pi\delta_{ik}}{\varepsilon(i|\omega_n|)\omega_n^2 + k^2} \left( \delta_{ik} - \frac{k_i k_k}{k^2} \right), \quad (28.27b)$$

$$\mathfrak{D}_{00} = \frac{4\pi}{\varepsilon(i|\omega_n|)k^2}, \quad \mathfrak{D}_{i0} = 0.$$

В ряде задач может оказаться полезной обычная временная гриновская функция электромагнитного поля, определяемая как

$$D_{\alpha\beta}(r_1 - r_2, t_1 - t_2) = -i \operatorname{Sp} \left\{ e^{\frac{F - \hat{H}}{T}} T_t \{ A_\alpha(r_1, t_1), A_\beta(r_2, t_2) \} \right\}. \quad (28.28)$$

Как мы видели в § 17, ее фурье-компоненты связаны с  $D^R(\mathbf{k}, \omega)$  соотношениями

$$\operatorname{Re} D(\mathbf{k}, \omega) = \operatorname{Re} D^R(\mathbf{k}, \omega), \quad (28.29)$$

$$\operatorname{Im} D(\mathbf{k}, \omega) = \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T} \operatorname{Im} D^R(\mathbf{k}, \omega).$$

Мы не будем приводить получающиеся отсюда громоздкие формулы для  $D$ .

Функция  $D$  представляет особый интерес при абсолютном нуле температуры, когда для ее вычисления можно пользоваться обычной техникой квантовой теории поля (гл. II). Переходя в (28.29) к пределу  $T=0$ , получаем:

$$\operatorname{Re} D(\mathbf{k}, \omega) = \operatorname{Re} D^R(\mathbf{k}, \omega), \quad (28.30)$$

$$\operatorname{Im} D(\mathbf{k}, \omega) = \operatorname{sign} \omega \operatorname{Im} D^R(\mathbf{k}, \omega).$$

Учтя, что вещественная часть  $\epsilon(\omega)$  есть четная функция  $\omega$ , а мнимая—нечетная (см., например, [45]), нетрудно убедиться, что для перехода от  $D^R$  к  $D$  при  $T=0$  нужно в формулах (28.26) заменить всюду  $\omega$  на  $|\omega|$ . В частности, для калибровки (28.26а) получаем:

$$D_{ik} = \frac{4\pi\delta_{ik}}{\epsilon(|\omega|)\omega^2 - k^2}, \quad (28.31)$$

$$D_{00} = -\frac{4\pi}{\epsilon(|\omega|)(\epsilon(|\omega|)\omega^2 - k^2)}, \quad D_{0i} = 0.$$

Формулы (28.31) являются обобщением обычных формул для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике (см. например, [24]). Для частного случая прозрачных сред ( $\epsilon''(\omega)=0$ ) они были получены другим способом Рязановым [47].

## § 29. Вычисление диэлектрической постоянной

К вычислению температурной гриновской функции электромагнитного поля  $\mathfrak{D}$  в поглощающих средах можно подойти по-иному, применив для этой цели развитую в гл. III диаграммную технику. Интересуясь только электромагнитным полем с длинами волн, значительно превосходящими

межатомные расстояния, мы представим гамильтониан взаимодействия частиц и поля в виде суммы двух частей:

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_{int}^{(1)} + \hat{H}_{int}^{(2)},$$

относя к нулевому гамильтониану  $\hat{H}_0$  энергию невзаимодействующих частиц и свободных фотонов. В  $\hat{H}_{int}^{(1)}$  мы включим часть взаимодействия, приводящую к упомянутым в начале предыдущего параграфа короткодействующим силам.  $\hat{H}_{int}^{(2)}$  представляет собою гамильтониан взаимодействия длинноволнового электромагнитного поля и частиц.

В случае калибровки с равным нулю скалярным потенциалом

$$\hat{H}_{int}^{(2)} = - \int A(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (29.1)$$

где  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  — оператор плотности тока частиц. Большая величина длин волн в (29.1) означает, что в разложение  $A(\mathbf{r})$  в ряд Фурье входят только импульсы  $\mathbf{k}$ , не превосходящие по модулю некоторого граничного импульса  $k_0$ , много меньшего, чем обратные межатомные расстояния  $1/a$ . Вследствие этого все возникающие в диаграммной технике интегралы по  $\mathbf{k}$  следует обрезать при  $k_0 \ll 1/a$ .

При нерелятивистских скоростях частиц (условие, которое выполняется в любых макроскопических системах) оператор плотности тока имеет вид (см., например, [15])

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a \left\{ -i \frac{e_a}{2m_a} (\psi_a^+(\mathbf{r}) \nabla \psi_a(\mathbf{r}) - \nabla \psi_a^+(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r})) - \right. \\ \left. - \frac{e_a^2}{2m_a} A(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}) \psi_a(\mathbf{r}) \right\}.$$

Суммирование происходит по различным сортам частиц.

Будем различать диаграммы для поправок к гриновской функции длинноволнового излучения по числу длинноволновых фотонных линий. Части диаграмм, не содержащие таких линий, будем для краткости обозначать заштрихованными многоугольниками. Очевидно, что под такими многоугольниками мы можем понимать сумму всех возможных частей, обладающих указанным свойством, сведя, таким образом,

ряд теории возмущений по заряду  $e$  к ряду по числу длинноволновых фотонных линий. Различные типы диаграмм этого ряда приведены на рис. 82. Величины, соответствующие многоугольникам, целиком определяются свойствами конденсированного тела, которое образовалось в результате действия короткодействующих сил.

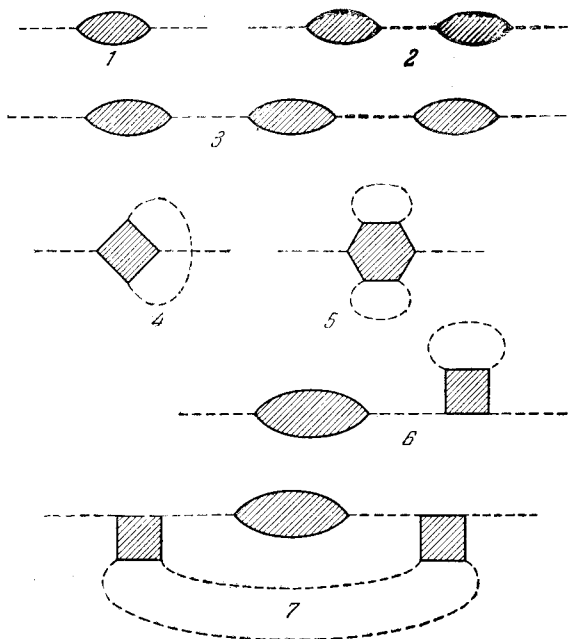


Рис. 82.

Из физических соображений уже сразу довольно очевидно, что диаграммы 4—7 рис. 82 дают пренебрежимо малый вклад, поскольку они соответствуют различным нелинейным процессам типа рассеяния света на свете. Это утверждение можно доказать также следующим образом. Как уже упоминалось, все интегралы по импульсам длинноволновых фотонных линий должны обрезаться на некотором  $k_0 \ll 1/a$ . Из соображений размерности поэтому следует, что каждой фотонной линии, по импульсу которой

производится интегрирование, соответствует малый множитель порядка  $k_0 a$ . Единственным типом диаграмм, в которых интегрирования по импульсам длинноволновых фононных линий вообще не происходит, являются диаграммы 1, 2, 3 рис. 82.

Суммирование такой последовательности диаграмм мы уже проводили в § 10 при выводе уравнения Дайсона. Поэтому мы сразу можем написать уравнение для  $\mathfrak{D}_{ik}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{ik}(r_1, r_2; \omega_n) &= \mathfrak{D}_{ik}^{(0)}(r_1 - r_2; \omega_n) + \\ &+ \int dr_3 dr_4 \mathfrak{D}_{il}^{(0)}(r_1 - r_3; \omega_n) \mathcal{P}_{lm}(r_3, r_4; \omega_n) \mathfrak{D}_{mk}(r_4, r_2; \omega_n). \end{aligned} \quad (29.2)$$

Величина  $\mathcal{P}$ , изображающая вклад заштрихованной петли на рис. 82, называется поляризационным оператором. Как видно из предыдущих рассуждений, он полностью определяется свойствами среды.

Выразим поляризационный оператор  $\mathcal{P}$  через диэлектрическую постоянную системы. Для этого заметим, что гриновская функция длинноволнового излучения  $\mathfrak{D}_{ik}$  (при калибровке с  $\varphi = 0$ ) удовлетворяет уравнению (28.18). Поддействовав на уравнение (29.2) слева оператором

$$\omega_n^2 \delta_{ik} + \text{rot}_{il} \text{rot}_{lk}$$

и учтя, что  $\mathfrak{D}^{(0)}$  удовлетворяет уравнению (28.18) с  $\epsilon = 1$ , получим после простого вычисления

$$\begin{aligned} \int dr' \mathcal{P}_{il}(r_1, r'; \omega_n) \mathfrak{D}_{lk}(r', r_2; \omega_n) &= \\ &= \frac{\epsilon(r_1, i | \omega_n) - 1}{4\pi} \omega_n^2 \mathfrak{D}_{ik}(r_1, r_2; \omega_n), \end{aligned}$$

откуда следует искомая формула

$$\mathcal{P}_{ik}(r_1, r_2; \omega_n) = \frac{1}{4\pi} (\epsilon(r_1, i | \omega_n) - 1) \omega_n^2 \delta_{ik} \delta(r_1 - r_2). \quad (29.3)$$

Тот факт, что поляризационный оператор оказался пропорциональным  $\delta(r_1 - r_2)$ , связан с пренебрежением в макро-

<sup>1)</sup> Имея в виду случай неоднородных тел, мы записали уравнение (29.2) в координатном представлении, сохранив лишь преобразование Фурье по  $\tau$ .



скопической теории эффектами пространственной корреляции. Последние становятся существенными лишь в области частот, где имеет место так называемый аномальный скин-эффект. Свойства  $\pi$  в этой области частот будут рассмотрены в гл. VII. В дальнейшем в этой главе для нас будут существенны гораздо большие частоты, при которых аномальный скин-эффект отсутствует.

Если рассматривается случай однородного тела, то  $\pi$  есть функция только  $r_1 - r_2$ , а  $\epsilon$  не зависит от  $r$ . Производя в (29.4) преобразование Фурье по  $r_1 - r_2$ , мы приходим к простой формуле, связывающей поляризационный оператор системы  $\pi(k, \omega_n)$  с ее диэлектрической постоянной:

$$\pi_{ik}(k, \omega_n) = \frac{1}{4\pi} (\epsilon(i|\omega_n|) - 1) \omega_n^2 \delta_{ik}. \quad (29.4)$$

Формула (29.4) позволяет вычислять диэлектрическую постоянную тела при  $T \neq 0$  при помощи методов квантовой теории поля. Действительно, вычисляя поляризационный оператор системы, мы находим тем самым величину  $\epsilon(\omega)$  на дискретном множестве точек на мнимой оси:  $\omega_n = 2n\pi Ti$ . Учтя, что  $\epsilon(\omega)$  есть аналитическая функция, не имеющая особенностей в верхней полуплоскости  $\omega$ , и повторив применительно к  $\epsilon$  дословно все рассуждения § 17 относительно  $\mathcal{G}$  и  $G^R$ , мы приходим к выводу, что для получения  $\epsilon(\omega)$  достаточно аналитически продолжить величину

$$\frac{4\pi}{3\omega_n^2} \pi_{ii}(\omega_n)$$

с дискретного множества точек на положительной мнимой полуоси на всю верхнюю полуплоскость. Хотя эта задача и не имеет решения в общем виде, упомянутое аналитическое продолжение в отдельных конкретных случаях может быть произведено.

Задача вычисления  $\epsilon(\omega)$  существенно упрощается при температуре, равной нулю. В этом случае для вычисления поляризационного оператора мы можем пользоваться временной техникой теории поля, описанной в гл. II. Повторяя буквально все вычисления, сделанные в этом параграфе для случая временной диаграммной техники, и учтя сказанное

в § 28 относительно функции  $D_{ik}(\mathbf{k}, \omega)$ , мы получим формулу (для калибровки с  $\varphi = 0$ )

$$\Pi_{ik}(\omega) = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon(|\omega|) - 1) \omega^2 \delta_{ik}. \quad (29.5)$$

Вспоминая, далее, что  $\varepsilon'(\omega) = \varepsilon'(-\omega)$ , а  $\varepsilon''(\omega) = -\varepsilon''(-\omega)$ , выразим  $\varepsilon$  через  $\Pi$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{4\pi}{3\omega^2} \operatorname{Re} \Pi_{ii}(\omega), \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{4\pi}{3\omega|\omega|} \operatorname{Im} \Pi_{ii}(\omega). \end{aligned} \quad (29.6)$$

Таким образом, вычисление  $\varepsilon(\omega)$  при  $T = 0$  сводится к определению поляризационного оператора системы.

### § 30. Силы Ван-дер-Ваальса в неоднородном диэлектрике

Длинноволновое электромагнитное поле является источником специфических дальнедействующих сил, которые можно назвать ван-дер-ваальсовыми, так как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами на больших расстояниях. Хотя вклад этих сил в свободную энергию тела весьма мал по сравнению с вкладом короткодействующих сил сцепления, однако они приводят к качественно новому эффекту — неаддитивности свободной энергии. Именно эта неаддитивность, связанная с дальнедействующим характером ван-дер-ваальсовых сил, позволяет выделить их вклад в термодинамические величины.

Указанную неаддитивность легко понять, обратившись к упомянутой связи между ван-дер-ваальсовыми силами и длинноволновым электромагнитным полем. Действительно, всякое изменение плотности, а с ним и электрических свойств среды, в некоторой области приводит, в силу уравнений Максвелла, к изменению поля и вне этой области. Поэтому связанная с длинноволновым излучением часть свободной энергии не определяется свойствами веществ только в данной точке, т. е. будет неаддитивна.

Это приведет к тому, что химический потенциал тонкой пленки жидкости на поверхности твердого тела будет зависеть от толщины пленки. С другой стороны, ван-дер-ваальсовы силы являются источником сил взаимодействия

между твердыми телами, т. е. свободная энергия зависит от расстояний между ними. Очевидно, что в этих явлениях существенную роль будет играть электромагнитное поле с длинами волн порядка толщины пленки или расстояния между телами, что позволяет выразить интересующие нас величины через диэлектрические постоянные тел  $\epsilon(\omega)$ .

Для вычисления поправки к свободной энергии за счет длинноволнового электромагнитного поля мы воспользуемся развитой в § 15 диаграммной техникой для термодинамического потенциала  $\Omega$  (в случае фотонов он совпадает со свободной энергией  $F$ ). Повторяя соответствующие рассуждения предыдущего параграфа, мы убеждаемся, что вклад в  $F$  дает только последовательность диаграмм рис. 83. При этом, в связи со сказанным в § 15 о коэффициентах перед диаграммами для  $F$ , может показаться, что мы

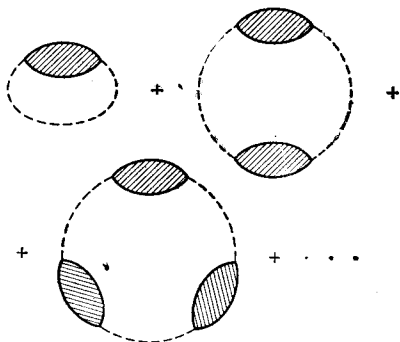


Рис. 83.

уже не сможем понимать под заштрихованным блоком на рис. 83 сумму всех возможных частей диаграмм, не содержащих длинноволновых фотонных линий. Легко, однако, убедиться, что это не так. Оказывается, что коэффициент перед диаграммой равен  $1/m$ , где  $m$  — число фотонных линий<sup>1)</sup>. Это обстоятельство позволяет провести суммирование заштрихованных блоков и сопоставить заштрихованным петлям на рис. 83 вычисленный в § 29 поляризационный оператор  $\Pi$ .

<sup>1)</sup> В § 15 мы видели, что число топологически эквивалентных диаграмм  $n$ -го порядка равно  $(n-1)!$ , что и приводило к появлению множителя  $1/n$  ( $1/n = (n-1)!/n!$ ). В нашем случае, когда  $\hat{H}_{int} = \hat{H}_{int}^{(1)} + \hat{H}_{int}^{(2)}$  (см. § 29), коэффициент, возникающий от разложения экспоненты, равен  $1/l! (2m)!$ , где  $m$  — число фотонных линий, а  $l$  — число вершин, связанных с  $\hat{H}_{int}^{(1)}$ . Подсчет, аналогичный сделанному в § 15, показывает, что число топологически эквивалентных диаграмм равно  $l! (2m-1)!$ , откуда и следует приведенное в тексте утверждение.

Последовательности диаграмм рис. 83 отвечает следующий ряд для свободной энергии  $F$ :

$$\begin{aligned}
 F = F_0 - \frac{T}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int \mathcal{P}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) \mathcal{D}_{ki}^{(0)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1; \omega_n) \times \right. \\
 \times d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 + \frac{1}{2} \int \mathcal{P}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) \mathcal{D}_{kl}^{(0)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3; \omega_n) \times \\
 \times \mathcal{P}_{lp}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4; \omega_n) \mathcal{D}_{pi}^{(0)}(\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 + \dots \\
 \dots + \frac{1}{m} \int \mathcal{P}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) \mathcal{D}_{kl}^{(0)}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3; \omega_n) \dots \\
 \dots \mathcal{P}_{qr}(\mathbf{r}_{2m-1}, \mathbf{r}_{2m}; \omega_n) \mathcal{D}_{ri}^{(0)}(\mathbf{r}_{2m} - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_{2m} + \dots \left. \right\},
 \end{aligned}
 \tag{30.1}$$

где  $F_0$  — свободная энергия тела (в  $F_0$  включены все поправки, связанные с короткодействующими силами).

Ряд (30.1) непосредственно не суммируется. Вместо свободной энергии мы определим дополнительное давление (точнее, дополнительный тензор натяжений), возникающее за счет взаимодействия вещества с длинноволновым электромагнитным полем. Для этого представим себе, что тело подвергнуто некоторой малой деформации с вектором смещения  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ . При этом изменение свободной энергии  $\delta F$  равно  $-\int \mathbf{f} \mathbf{u} dV$ , где  $\mathbf{f}$  — действующая на единицу объема при деформации тела сила. Соответствующее изменение  $F_0$  есть

$$\delta F_0 = \int \mathbf{u} \text{grad } p_0 dV,$$

где  $p_0(\rho, T)$  — давление без учета поправок при заданных плотности  $\rho$  и температуре.

При указанном смещении в ряде (30.1) будет меняться только поляризационный оператор, поскольку только он зависит от свойств среды. Именно (см. (29.3)),

$$\delta \mathcal{P}_{ik}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \omega_n) = \frac{1}{4\pi} \omega_n^2 \delta_{ik} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta\epsilon(\mathbf{r}_1, i|\omega_n|).$$

При варьировании (30.1) коэффициенты  $1/m$  сократятся и мы получим:

$$\begin{aligned} \delta F = \delta F_0 - \frac{T}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n^2 \int dr \delta\varepsilon(r, i|\omega_n|) \times \\ \times \left\{ \mathfrak{D}_{ii}^{(0)}(r-r; \omega_n) + \int \mathfrak{D}_{ik}^{(0)}(r-r_1; \omega_n) \mathcal{T}_{kl}(r_1, r_2; \omega_n) \times \right. \\ \times \mathfrak{D}_{li}^{(0)}(r_2-r; \omega_n) dr_1 dr_2 + \int \mathfrak{D}_{ik}^{(0)}(r-r_1; \omega_n) \mathcal{T}_{kl} \times \\ \times (r_1, r_2; \omega_n) \mathfrak{D}_{lp}^{(0)}(r_2-r_3; \omega_n) \mathcal{T}_{pq}(r_3, r_4; \omega_n) \times \\ \left. \times \mathfrak{D}_{qi}^{(0)}(r_4-r; \omega_n) dr_1 \dots dr_4 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Ряд в фигурных скобках есть не что иное, как ряд для гриновской функции длинноволновых фотонов  $\mathfrak{D}$ , соответствующий последовательности диаграмм 1, 2, 3 рис. 82. Поэтому

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{T}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n^2 \int \mathfrak{D}_{ii}(r, r; \omega_n) \delta\varepsilon(r, i|\omega_n|) dr.$$

Вспомяная, что  $\mathfrak{D}$  есть четная функция  $\omega_n$ , получим окончательно:

$$\delta F = \delta F_0 - \frac{T}{4\pi} \sum'_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 \int \mathfrak{D}_{ii}(r, r; \omega_n) \delta\varepsilon(r, i\omega_n) dr. \quad (30.2)$$

Штрих у знака суммы означает, что член с  $n=0$  берется с половинным весом. Напомним, что  $\omega_n = 2n\pi T$ .

Вариация  $\delta\varepsilon$  связана со смещением  $u$  формулой<sup>1)</sup>

$$\delta\varepsilon = -u \operatorname{grad} \varepsilon - \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \operatorname{div} u.$$

<sup>1)</sup> Изменение  $\varepsilon$  в данной точке состоит из двух частей. Первая часть связана с переносом  $\varepsilon$  вместе с веществом:

$$\delta_1 \varepsilon = \varepsilon(r-u) - \varepsilon(r) = -u \operatorname{grad} \varepsilon,$$

а вторая — с изменением плотности при деформации:

$$\delta_2 \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \delta \rho = - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \operatorname{div} u.$$

Подставляя это в (30.2) и проводя интегрирование по частям, получим выражение для  $f$ :

$$f = -\text{grad } p_0 - \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 \mathfrak{D}_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \text{grad } \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n) + \\ + \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n^2 \text{grad} \left[ \mathfrak{D}_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \rho \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n)}{\partial \rho} \right]. \quad (30.3)$$

Эта формула позволяет без труда вычислить добавку к химическому потенциалу тела. Для этого заметим, что при механическом равновесии  $f=0$ . Приравняв выражение (30.3) нулю и учтя, что при постоянной температуре имеют место соотношения

$$\text{grad } \varepsilon(\rho, T) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \text{grad } \rho, \quad dp_0(\rho, T) = \rho d\mu_0(\rho, T),$$

где  $\mu_0$  — невозмущенный химический потенциал, отнесенный к единице массы, получим после простого преобразования

$$-\rho \text{grad} \left\{ \mu_0(\rho, T) - \frac{T}{4\pi} \sum_n \omega_n^2 \mathfrak{D}_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right\} = 0. \quad (30.4)$$

Как известно, условием механического равновесия всякого неоднородного тела является постоянство вдоль тела химического потенциала. Поэтому из (30.4) сразу ясно, что

$$\mu(\rho, T) = \mu_0(\rho, T) - \frac{T}{4\pi} \sum_n \omega_n^2 \mathfrak{D}_{ii}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}. \quad (30.5)$$

Перейдем теперь к вычислению тензора натяжений. Для этого нужно привести выражение для силы  $f$  (30.3) к виду

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (30.6)$$

Предварительно введем, помимо гриновской функции  $\mathfrak{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n)$ , две другие функции:

$$\mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n) = -\omega_n^2 \mathfrak{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n), \\ \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n) = \text{rot}_{il} \text{rot}'_{km} \mathfrak{D}_{lm}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n), \quad (30.7)$$

составленные из операторов электрического и магнитного полей по тем же правилам, что и  $\mathfrak{D}$  из операторов вектор-потенциала.

Перепишем выражение для силы в новых обозначениях:

$$f_i = -\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n) \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) - \right. \\ \left. - \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n)}{\partial \rho} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\omega_n) \right] - \\ - \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n). \quad (30.8)$$

Нам осталось, следовательно, преобразовать только последний член в (30.8). Запишем его (отвлекаясь от суммирования и множителя  $T/4\pi$ ) в виде

$$\varepsilon(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x'_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (30.9)$$

имея в виду положить  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$  в конце вычислений.

Продельвая, далее, очевидные преобразования, получим для (30.9)

$$2 \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathfrak{D}_{ki}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \\ - \frac{\partial}{\partial x'_k} \varepsilon(\mathbf{r}') \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \varepsilon(\mathbf{r}') \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) + \\ + \varepsilon(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial}{\partial x'_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathfrak{D}_{ki}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right). \quad (30.10)$$

Из уравнения для гриновской функции  $\mathfrak{D}$  (28.18) можно получить тождества

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathfrak{D}_{ki}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \frac{\partial}{\partial x'_k} \varepsilon(\mathbf{r}') \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\partial}{\partial x'_k} \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \frac{\partial}{\partial x_i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ \varepsilon(\mathbf{r}') \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x'_k} \mathfrak{D}_{ki}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial x'_i} \mathfrak{D}_{kk}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + 8\pi \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_i}, \\ \varepsilon(\mathbf{r}) \left( \frac{\partial}{\partial x'_k} \mathfrak{D}_{ki}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{\partial}{\partial x'_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right) = \\ = -\frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - 8\pi \frac{\partial \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial x_i}.$$

Подставляя их в (30.10) и полагая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , найдем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \varepsilon(\mathbf{r}) \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + \\ + 2 \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - \frac{\partial}{\partial x_i} \mathfrak{D}_{kk}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Подставив в свою очередь это выражение в (30.8), найдем, наконец, что сила  $\mathbf{f}$  может быть представлена в виде (30.6) с тензором натяжений

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} = -\delta_{ik} p_0(\rho, T) - \frac{T}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \delta_{ik} \left[ \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n) - \right. \right. \\ \left. \left. - \rho \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n)}{\partial \rho} \right] \mathfrak{D}_{ii}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathfrak{D}_{ii}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) + \right. \\ \left. + \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n) \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) + \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \right\}. \quad (30.11) \end{aligned}$$

Формула (30.11) не имеет еще непосредственного физического смысла, так как входящие в нее величины  $\mathfrak{D}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $\mathfrak{D}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  обращаются в бесконечность при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ . Это связано с тем, что в  $\sigma_{ik}$  дают, если не вводить соответствующего обрезания, бесконечный вклад электромагнитные колебания с малыми длинами волн. Однако коротковолновые колебания не имеют отношения к эффектам, обусловленным неоднородностями тела, поскольку вклад таких колебаний одинаков как в однородном, так и в неоднородном телах, имеющих в рассматриваемой точке одно и то же значение  $\varepsilon$ .

Интересующий нас вклад длинноволновых колебаний, не зависящий в действительности от характера обрезания, получается из формулы (30.11) путем соответствующего вычитания. Именно, под гриновской функцией  $\mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  (и аналогично под  $\mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ ) в этой формуле следует понимать предел разности

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'} [\mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \overline{\mathfrak{D}}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')],$$

где  $\overline{\mathfrak{D}}^E$  — гриновская функция однородной неограниченной среды, диэлектрическая постоянная которой совпадает с таковой для неоднородного тела в той точке, в которой вычисляется тензор натяжений. Во избежание излишней громоздкости мы будем в дальнейшем писать формулу (30.11)



в прежнем виде, подразумевая, что указанное вычитание уже произведено.

Это же замечание относится и к формуле (30.5) для химического потенциала, которая с учетом (30.7) может быть записана в виде

$$\mu(\rho, T) = \mu_0(\rho, T) + \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{r}, i\omega_n)}{\partial \rho} \mathfrak{D}_{ii}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n). \quad (30.12)$$

Заметим, что в категорию неоднородных сред мы включаем также и системы, состоящие из нескольких тел, каждое из которых однородно. В таком случае при решении уравнения (28.18) компоненты  $\mathfrak{D}_{ik}$  должны удовлетворять на границах между телами определенным условиям. В уравнениях (28.18) независимыми переменными являются координаты  $\mathbf{r}$ , а координаты  $\mathbf{r}'$  играют роль параметров. Поэтому речь идет о граничных условиях по переменным  $\mathbf{r}$ . Эти условия соответствуют непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей. Поскольку точке  $\mathbf{r}$  отвечает один из индексов ( $i$ ) тензора  $\mathfrak{D}_{ik}$ , то должны быть непрерывны тангенциальные по этому индексу компоненты тензоров  $\mathfrak{D}_{ik}^E$  и  $\mathfrak{D}_{ik}^H$ .

Формулы (30.11) и (30.12), полученные Дзялошинским и Питаевским [46], решают в принципе задачу о вычислении ван-дер-ваальсовой части термодинамических величин тела. Задача эта сводится к решению уравнений (28.18) для гриновской функции  $\mathfrak{D}_{ik}$ .

## § 31. Молекулярные силы взаимодействия между твердыми телами

**1. Силы взаимодействия между твердыми телами.** Применим развитую выше общую теорию к вычислению ван-дер-ваальсовых сил, действующих между твердыми телами, поверхности которых сближены до очень малых расстояний. При этом разделяющая тела щель может быть заполнена какой-либо жидкостью. Ниже мы будем отличать индексами 1 и 2 величины, относящиеся к двум твердым телам, а индексом 3 — величины, относящиеся к среде, заполняющей щель.

Хотя мы будем предполагать щель плоскопараллельной, следует иметь в виду, что в действительности для корректной постановки задачи о силе взаимодействия между телами надо рассматривать, по крайней мере, одно из них как обладающее конечными размерами и окруженное со всех сторон средой 3 и определять полную действующую на него силу; ввиду очень быстрого убывания молекулярных сил с расстоянием эта результирующая сила фактически может быть целиком отнесена к силам, действующим через разделяющую оба тела узкую щель.

Полная сила, действующая на тело 2, может быть вычислена как полный поток импульса, втекающей в тело из окружающей его среды 3, равный интегралу от плотности потока по любой охватывающей тело поверхности. При этом надо учесть, что среда 3 находится в термодинамическом равновесии, одно из условий которого состоит в постоянстве ее химического потенциала:  $\mu = \text{const}$ , где  $\mu$  дается формулой (30.12).

Поскольку поправки к плотности среды, связанные с длинноволновыми флуктуациями поля, малы, можно считать плотность  $\rho$  постоянной вдоль среды 3; при этом изменение химического потенциала  $\mu_0(\rho, T)$  совпадает (в силу (30.4)) с изменением величины  $p_0(\rho, T)/\rho$ . Поэтому условие  $\mu = \text{const}$  можно переписать в виде

$$p_0(\rho, T) + \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \rho \frac{\partial \epsilon_3(i\omega_n)}{\partial \rho} \mathfrak{D}_{ll}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) = \text{const}. \quad (31.1)$$

В силу этого условия часть полного тензора натяжений (30.11) оказывается постоянным вдоль жидкости равномерным давлением, не дающим никакого вклада в действующую на тело полную силу; для определения искомой силы фактически достаточно писать тензор натяжений в среде 3 в виде

$$\sigma'_{ik} = -\frac{T}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \epsilon_3(i\omega_n) \left[ \mathfrak{D}_{ik}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathfrak{D}_{ll}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \right] + \right. \\ \left. + \mathfrak{D}_{ik}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) - \frac{1}{2} \delta_{ik} \mathfrak{D}_{ll}^H(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n) \right\}. \quad (31.2)$$

Направим ось  $x$  перпендикулярно к плоскости щели, ширину которой обозначим посредством  $l$  (так что поверх-

ностями тел 1 и 2 являются плоскости  $x=0$  и  $x=l$ . Тогда сила  $F$ , действующая на единицу площади и поверхности тела 2, равна

$$F(l) = \sigma'_{xx}(l) = \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \epsilon_3(l\omega_n) [\mathfrak{D}_{yy}^E(l, l; \omega_n) + \mathfrak{D}_{zz}^E(l, l; \omega_n) - \mathfrak{D}_{xx}^E(l, l; \omega_n)] + \mathfrak{D}_{yy}^H(l, l; \omega_n) + \mathfrak{D}_{zz}^H(l, l; \omega_n) - \mathfrak{D}_{xx}^H(l, l; \omega_n) \right\}; \quad (31.3)$$

положительная сила соответствует притяжению тел, отрицательная — отталкиванию.

Гриновская функция  $\mathfrak{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n)$  в силу однородности задачи в направлениях  $y$  и  $z$  зависит только от разностей  $y - y'$  и  $z - z'$ . Произведем преобразование Фурье по этим переменным

$$\mathfrak{D}_{ik}(x, x'; q; \omega_n) = \int e^{-iq_y(y-y') - iq_z(z-z')} \mathfrak{D}_{ik}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega_n) \times \\ \times d(y - y') d(z - z')$$

и направим ось  $y$  вдоль вектора  $\mathbf{q}$ . Уравнения (28.18) для функции Грина примут вид

$$\begin{aligned} \left( \omega^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \mathfrak{D}_{zz}(x, x') &= -4\pi\delta(x - x'), \\ \left( \epsilon\omega_n^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \mathfrak{D}_{yy}(x, x') + iq \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{xy}(x, x') &= -4\pi\delta(x - x'), \\ \omega^2 \mathfrak{D}_{xy}(x, x') + iq \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{yy}(x, x') &= 0, \\ \omega^2 \mathfrak{D}_{xx}(x, x') + iq \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{xy}(x, x') &= -4\pi\delta(x - y), \\ \left( \epsilon\omega_n^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \mathfrak{D}_{xy}(x, x') + iq \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{xx}(x, x') &= 0, \end{aligned}$$

где  $\omega = \sqrt{\epsilon\omega_n^2 + q^2}$ , а  $x'$  играет роль параметра (компоненты гриновской функции  $\mathfrak{D}_{xz}$ ,  $\mathfrak{D}_{yz}$  равны нулю, поскольку уравнения для них оказываются однородными).

Решение этой системы сводится к решению всего двух уравнений:

$$\begin{aligned} \left( \omega^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \mathfrak{D}_{zz}(x, x') &= -4\pi\delta(x - x'), \\ \left( \omega^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \mathfrak{D}_{yy}(x, x') &= -\frac{4\pi\omega^2}{\epsilon\omega_n^2} \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (31.4)$$

после чего  $\mathfrak{D}_{xy}$  и  $\mathfrak{D}_{xx}$  определяются как

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{xy} &= -\frac{iq}{w^2} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{yy}, \\ \mathfrak{D}_{xx} &= -\frac{iq}{w^2} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{xy} - \frac{4\pi}{w^2} \delta(x - x').\end{aligned}\quad (31.5)$$

Краевые условия, соответствующие непрерывности тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей, сводятся к требованию непрерывности величин  $\mathfrak{D}_{yk}^E$ ,  $\mathfrak{D}_{yk}^H$ ,  $\mathfrak{D}_{zk}^E$ ,  $\mathfrak{D}_{zk}^H$ , или, что то же самое, к непрерывности величин  $\mathfrak{D}_{yk}$ ,  $\mathfrak{D}_{zk}$ ,  $\text{rot}_{yl} \mathfrak{D}_{lk}$ ,  $\text{rot}_{zl} \mathfrak{D}_{lk}$ . Используя первое из равенств (31.5), получим, что на границе раздела должны быть непрерывны величины

$$\mathfrak{D}_{zz}, \quad \frac{d\mathfrak{D}_{zz}}{dx}, \quad \mathfrak{D}_{yy}, \quad \frac{\varepsilon}{w^2} \frac{d\mathfrak{D}_{yy}}{dx}. \quad (31.6)$$

Поскольку мы интересуемся лишь гриновской функцией в области щели, мы можем сразу ограничиться случаем  $0 < x' < l$ . В области 3 ( $0 < x < l$ ) функции  $\mathfrak{D}_{yy}$  и  $\mathfrak{D}_{zz}$  определяются уравнениями (31.4) с  $\varepsilon = \varepsilon_3$ ,  $w = w_3 = \sqrt{\varepsilon_3 \omega_n^2 + q^2}$ . В областях 1 ( $x < 0$ ) и 2 ( $x > l$ ) они удовлетворяют тем же уравнениям без правых частей (поскольку здесь всегда  $x \neq x'$ ), соответственно, с  $\varepsilon_1$ ,  $w_1$  и  $\varepsilon_2$ ,  $w_2$  в качестве  $\varepsilon$ ,  $w$ .

Упомянутое в конце § 30 вычитание сводится к тому, что из всех функций  $\mathfrak{D}$  в области щели следует вычесть их значения при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ ,  $w_1 = w_2 = w_3$ . Вследствие этого, в частности, можно сразу опустить член с  $\delta$ -функцией во втором из соотношений (31.5), так что функции  $\mathfrak{D}_{xy}$ ,  $\mathfrak{D}_{xx}$  в области щели определяются формулами

$$\mathfrak{D}_{xy} = -\frac{iq}{w_3^2} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{yy}, \quad \mathfrak{D}_{xx} = -\frac{iq}{w_3^2} \frac{d}{dx} \mathfrak{D}_{xy}. \quad (31.7)$$

Прежде чем приступить к решению уравнений, сделаем еще одно замечание. Общее решение уравнений (31.4) имеет вид  $f_1(x - x') + f_2(x + x')$ . Используя уравнения (31.4), (31.7) и определение функций  $\mathfrak{D}^E$  и  $\mathfrak{D}^H$ , можно показать, что части гриновских функций, зависящие от суммы  $x + x'$ , не вносят никакого вклада в выражение (31.3) для силы. Мы

не останавливаемся здесь на этом, так как этот результат заранее очевиден из физических соображений: положив  $x = x'$  в решении вида  $f_2(x + x')$ , мы бы получили поток импульса в щели, который зависел бы от координат, в противоречие с законом его сохранения. Поэтому в дальнейшем мы будем, как правило, приводить только выражения для частей гриновских функций  $\mathfrak{D}^+$ , зависящих лишь от  $x - x'$ .

Перейдем к нахождению функции  $\mathfrak{D}_{zz}$ . Она удовлетворяет уравнениям

$$\left(\omega_3^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \mathfrak{D}_{zz} = -4\pi\delta(x - x') \quad \text{при } 0 < x < l,$$

$$\left(\omega_1^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \mathfrak{D}_{zz} = 0 \quad \text{при } x < 0; \quad \left(\omega_2^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \mathfrak{D}_{zz} = 0 \quad \text{при } x > l.$$

Отсюда находим:

$$\mathfrak{D}_{zz} = Ae^{w_1 x} \quad \text{при } x < 0, \quad \mathfrak{D}_{zz} = Be^{-w_2 x} \quad \text{при } x > l.$$

$$\mathfrak{D}_{zz} = C_1 e^{w_3 x} + C_2 e^{-w_3 x} - \frac{2\pi}{w_3} e^{-w_3 |x - x'|} \quad \text{при } 0 < x < l.$$

Определяя постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  из граничных условий непрерывности  $\mathfrak{D}_{zz}$  и  $\frac{d\mathfrak{D}_{zz}}{dx}$ , находим для  $\mathfrak{D}_{zz}^+$ :

$$\mathfrak{D}_{zz}^+ = \frac{4\pi}{w_3 \Delta} \operatorname{ch} w_3 (x - x') - \frac{2\pi}{w_3} e^{-w_3 |x - x'|} \quad \text{при } 0 < x < l,$$

где

$$\Delta = 1 - e^{2w_3 l} \frac{(w_1 + w_3)(w_2 + w_3)}{(w_1 - w_3)(w_2 - w_3)}. \quad (31.8)$$

Вычитая значение  $\mathfrak{D}_{zz}^+$  при  $w_1 = w_2 = w_3$  (при этом  $\Delta$  обращается в бесконечность), получим окончательно:

$$\mathfrak{D}_{zz}^+ = \frac{4\pi}{w_3 \Delta} \operatorname{ch} w_3 (x - x'). \quad (31.9)$$

Аналогично, решая уравнение для  $\mathfrak{D}_{yy}$ , получим (после вычитания):

$$\mathfrak{D}_{yy}^+ = \frac{4\pi w_3}{\omega_n^2 \varepsilon_3 \Delta} \operatorname{ch} w_3 (x - x'), \quad (31.10)$$

$$\bar{\Delta} = 1 - e^{2w_3 l} \frac{(\varepsilon_1 w_3 + \varepsilon_3 w_1)(\varepsilon_2 w_3 + \varepsilon_3 w_2)}{(\varepsilon_1 w_3 - \varepsilon_3 w_1)(\varepsilon_2 w_3 - \varepsilon_3 w_2)} \quad (31.11)$$

и, используя соотношения (31.7),

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{xy}^+ &= -\frac{4\pi l q}{\omega_n^2 \varepsilon_3 \Delta} \operatorname{sh} w_3 (x - x'), \\ \mathfrak{D}_{xx}^+ &= -\frac{4\pi q^2}{\omega_n^2 \varepsilon_3 w_3 \Delta} \operatorname{ch} w_3 (x - x').\end{aligned}\quad (31.12)$$

Вычисляя теперь величины  $\mathfrak{D}_{ik}^E(x, x'; q; \omega_n)$  и  $\mathfrak{D}_{ik}^H(x, x'; q; \omega_n)$  и подставляя их в формулу (31.3), получим:

$$F(l) = -\frac{T}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} q dq w_3 \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \right).$$

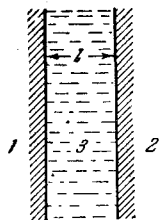


Рис. 84.

Переходя к новой переменной интегрирования  $q = \sqrt{\varepsilon_3} \omega_n \sqrt{p^2 - 1}$  и возвращаясь к обычной системе единиц, мы приходим к окончательному выражению (Дзялошинский, Лифшиц, Питаевский [48]): для силы  $F$ , действующей на единицу площади каждого из двух тел, разделенных щелью ширины  $l$ , заполненной средой (рис. 84):

$$\begin{aligned}F(l) &= \frac{T}{\pi c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_3^{3/2} \omega_n^3 \int_1^{\infty} p^2 dp \left\{ \left[ \frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} \times \right. \right. \\ &\times \exp\left(\frac{2p\omega_n}{c} l \sqrt{\varepsilon_3}\right) - 1 \left. \right]^{-1} + \left[ \frac{(s_1 + p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2 + p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1 - p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2 - p\varepsilon_2/\varepsilon_3)} \times \right. \\ &\times \exp\left(\frac{2p\omega_n}{c} l \sqrt{\varepsilon_3}\right) - 1 \left. \right]^{-1} \left. \right\},\end{aligned}\quad (31.13)$$

где

$$s_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_3 - 1 + p^2}, \quad s_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_3 - 1 + p^2}, \quad \omega_n = \frac{2\pi n T}{h},$$

а  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — функции мнимой частоты  $i\omega_n$  ( $\varepsilon = \varepsilon(i\omega_n)$ ). Эта формула для  $\varepsilon_3 = 1$ , т. е. для случая тел, разделенных пустой щелью, была впервые получена Лифшицем [49] другим способом, без использования методов квантовой теории поля.

Общая формула (31.13) очень сложна. Она, однако, может быть существенно упрощена в результате того, что

влияние температуры на силу взаимодействия тел оказывается обычно совершенно несущественным<sup>1)</sup>.

Дело в том, что благодаря наличию экспоненциальных величин в подынтегральных выражениях в (31.13) главную роль в сумме играют лишь те члены, для которых  $\omega_n \sim c/l$ , или  $n \sim ch/lT$ . В случае  $lT/ch \ll 1$  существенными будут, таким образом, большие значения  $n$  и в (4.13) можно перейти от суммирования к интегрированию по  $dn = (\hbar/2\pi T) d\omega$ . При этом температура в явном виде в формулу не входит и мы получаем следующий результат ( $\varepsilon = \varepsilon(i\omega)$ ):

$$F(l) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \int_1^\infty dp \, p^2 \omega^3 \varepsilon_3^{3/2} \left\{ \left[ \frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} \times \right. \right. \\ \times \exp\left(\frac{2p\omega}{c} l V_{\varepsilon_3}^-\right) - 1 \Big]^{-1} + \left[ \frac{(s_1 + p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2 + p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1 - p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2 - p\varepsilon_2/\varepsilon_3)} \times \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(\frac{2p\omega}{c} l V_{\varepsilon_3}^-\right) - 1 \right]^{-1} \right\}. \quad (31.14)$$

Формула (31.14) все еще сложна. Она допускает дальнейшее существенное упрощение в двух важных предельных случаях.

Остановимся сначала на предельном случае «малых» расстояний, под которыми мы понимаем расстояния, малые по сравнению с длинами волн  $\lambda_0$ , характерными для спектров поглощения данных тел. Температуры, о которых может идти речь для конденсированных тел, во всяком случае малы по сравнению с играющими здесь роль  $\hbar\omega$  (например, в видимой области спектра), поэтому неравенство  $Tl/\hbar c \ll 1$  заведомо выполнено.

Благодаря наличию экспоненциального множителя

$$\exp(2p\omega l V_{\varepsilon_3}^-/c)$$

в знаменателях подынтегрального выражения основную роль при интегрировании по  $p$  играют такие значения  $p$ , что  $p\omega l/c \sim 1$ . При этом  $p \gg 1$ , и поэтому при определении главных членов можно положить  $s_1 \approx s_2 \approx p$ . В этом приближении первое слагаемое в фигурных скобках в (31.14)

<sup>1)</sup> Говоря о влиянии температуры, мы отвлекаемся от температурной зависимости, связанной просто с зависимостью самой диэлектрической проницаемости от температуры.

обратится в нуль. Второй же член, после введения переменной интегрирования  $x = 2lp\omega \sqrt{\varepsilon_3}/c$ , дает:

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 dx d\omega \left[ \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} e^x - 1 \right]^{-1} \quad (31.15)$$

(нижний предел интегрирования по  $x$  заменен в этом же приближении нулем). Сила в этом случае оказывается обратно пропорциональной кубу расстояний, чего, впрочем, и следовало ожидать в соответствии с обычными законами ван-дер-ваальсовых сил между двумя атомами. Функции  $\varepsilon(i\omega) - 1$  монотонно убывают с увеличением  $\omega$ , стремясь к нулю. Поэтому значения  $\omega$ , начиная с некоторого  $\omega \sim \omega_0$ , перестают вносить существенный вклад в интеграл; условие малости  $l$  означает, что должно быть  $l \ll c/\omega_0$ .

Перейдем к противоположному предельному случаю «больших» расстояний,  $l \gg \lambda_0$ . При этом, однако, будем считать, что расстояния все же не столь велики, чтобы нарушилось неравенство  $lT/\hbar c \ll 1$ . В общей формуле (31.14) вводим новую переменную интегрирования  $x = 2pl\omega/c$ ; в качестве же второй переменной оставляем не  $\omega$  (как выше), а  $p$ :

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} \int_0^\infty dx \int_1^\infty dp \frac{x^3}{p^2} \varepsilon_3^{3/2} \left\{ \left[ \frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} e^{x\sqrt{\varepsilon_3}} - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(s_1 + p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2 + p\varepsilon_2/\varepsilon_3)}{(s_1 - p\varepsilon_1/\varepsilon_3)(s_2 - p\varepsilon_2/\varepsilon_3)} e^{x\sqrt{\varepsilon_3}} - 1 \right]^{-1} \right\}, \\ \varepsilon = \varepsilon \left( i \frac{xc}{2pl} \right).$$

Благодаря наличию  $\exp(x\sqrt{\varepsilon_3})$  в знаменателях в интеграле по  $x$  играют роль значения  $x \approx 1/\sqrt{\varepsilon_3} \leq 1$ , а поскольку  $p \gg 1$ , то аргумент функций  $\varepsilon$  при больших  $l$  близок к нулю во всей существенной области значений переменных. В соответствии с этим можно заменить  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  просто их значениями при  $\omega = 0$ , т. е. электростатическими диэлектриче-



скими постоянными. Заменяя после этого  $x \rightarrow x/\sqrt{\epsilon_{30}}$ , получим окончательно следующий результат:

$$F = \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4 \sqrt{\epsilon_{30}}} \int_0^\infty dx \int_1^\infty dp \frac{x^3}{p^2} \left\{ \left[ \frac{(s_{10} + p)(s_{20} + p)}{(s_{10} - p)(s_{20} - p)} e^x - 1 \right]^{-1} + \right. \\ \left. + \left[ \frac{(s_{10} + p\epsilon_{10}/\epsilon_{30})(s_{20} + p\epsilon_{20}/\epsilon_{30})}{(s_{10} - p\epsilon_{10}/\epsilon_{30})(s_{20} - p\epsilon_{20}/\epsilon_{30})} e^x - 1 \right]^{-1} \right\}, \quad (31.16)$$

$$s_{10} = \sqrt{\frac{\epsilon_{10}}{\epsilon_{30}} - 1 + p^2}, \quad s_{20} = \sqrt{\frac{\epsilon_{20}}{\epsilon_{30}} - 1 + p^2},$$

где  $\epsilon_{10}$ ,  $\epsilon_{20}$ ,  $\epsilon_{30}$  — электростатические значения диэлектрической проницаемости.

Остановимся теперь на случае высоких температур. При  $lT/\hbar c \gg 1$  из всех членов суммы (31.13) надо сохранить лишь первый. Положить, однако, в нем сразу  $n=0$  нельзя ввиду возникающей при этом неопределенности (множитель  $\omega_n^3$  обращается в нуль, но интеграл по  $p$  расходится). Это затруднение можно обойти, введя сначала вместо  $p$  новую переменную интегрирования  $x = 2p\omega_n l \sqrt{\epsilon_{30}}/c$  (в результате чего множитель  $\omega_n^3$  исчезает). Положив затем  $\omega_n = 0$ , получим:

$$F = \frac{T}{16\pi l^3} \int_0^\infty x^2 \left[ \frac{(\epsilon_{10} + \epsilon_{30})(\epsilon_{20} + \epsilon_{30})}{(\epsilon_{10} - \epsilon_{30})(\epsilon_{20} - \epsilon_{30})} e^x - 1 \right]^{-1} dx. \quad (31.17)$$

Таким образом, на достаточно больших расстояниях убывание сил взаимодействия замедляется и снова происходит по закону  $l^{-3}$  с коэффициентом, зависящим от температуры и от электростатического значения диэлектрических проницаемостей.

## 2. Силы взаимодействия между атомами в растворах.

Покажем теперь, каким образом можно перейти от макроскопической формулы (31.14) к взаимодействию отдельных атомов в пустоте. Для этого предположим формальным образом оба тела достаточно «разреженными». С точки зрения макроскопической электродинамики это означает, что их диэлектрические проницаемости близки к единице, т. е. разности  $\epsilon_1 - 1$  и  $\epsilon_2 - 1$  малы.

Начнем со случая «малых» расстояний. Из формулы (31.15) с  $\epsilon_3 = 1$  имеем с должной точностью

$$F = \frac{\hbar}{64\pi^2 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty x^2 e^{-x} (\epsilon_1 - 1) (\epsilon_2 - 1) dx d\omega = \\ = \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} \int_0^\infty (\epsilon_1(i\omega) - 1) (\epsilon_2(i\omega) - 1) d\omega. \quad (31.18)$$

Выражая  $\epsilon(i\omega)$  через  $\epsilon''(\omega)$  на вещественной оси согласно (28.19), получим:

$$\int_0^\infty (\epsilon_1(i\omega) - 1) (\epsilon_2(i\omega) - 1) d\omega = \\ = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\omega_1 \omega_2 \epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{(\omega_1^2 + \omega^2)(\omega_2^2 + \omega^2)} d\omega_1 d\omega_2 d\omega = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2,$$

откуда для силы  $F$  находим:

$$F = \frac{\hbar}{16\pi^3 l^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (31.19)$$

Эта сила соответствует взаимодействию атомов с энергией<sup>1)</sup>

$$U(R) = -\frac{3\hbar}{8\pi^4 R^6 N_1 N_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\epsilon_1''(\omega_1) \epsilon_2''(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2, \quad (31.20)$$

<sup>1)</sup> Если потенциальная энергия взаимодействия молекул 1 и 2 есть  $U = -a/R^6$ , то полная энергия парных взаимодействий всех молекул в двух полупространствах, разделенных щелью  $l$ , есть

$$U = -\frac{a\pi N_1 N_2}{12l^2}.$$

Сила же  $F$  есть

$$F = -\frac{dU}{dl} = \frac{a\pi N_1 N_2}{6l^3}.$$

В этом и заключается соответствие формул (31.19) и (31.20).

где  $R$  — расстояние между атомами,  $N_1$ ,  $N_2$  — числа атомов в единице объема, соответственно, первого и второго тела. Мнимая часть диэлектрической проницаемости связана со спектральной плотностью известных из спектроскопии «сил осцилляторов»  $f(\omega)$  соотношением

$$\omega \varepsilon''(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2}{m} N f(\omega)$$

(см., например, [45], § 62). Подставляя его в (31.20), найдем:

$$U(R) = -\frac{3\hbar e^4}{2m^2 R^6} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f_1(\omega_1) f_2(\omega_2)}{\omega_1 + \omega_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (31.21)$$

Это выражение в точности совпадает с известной формулой Лондона [50], получающейся при помощи обычной теории возмущений, примененной к дипольному взаимодействию двух атомов. Пусть, например, речь идет о взаимодействии двух атомов водорода. Воспользовавшись известным выражением

$$f_{0n} = \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - E_0) |x_{0n}|^2$$

для силы осцилляторов перехода между состояниями  $E_0$  и  $E_n$  ( $x_{0n}$  — соответствующий матричный элемент координаты электрона в атоме) и переходя в (31.19) от интегрирования по частотам к суммированию по уровням энергии атома, получим формулу Лондона для атомов водорода

$$U(R) = -\frac{6e^4}{R^6} \sum_{n, m} \frac{|x_{0n}|^2 |x_{0m}|^2}{E_n - E_0 + E_m - E_0}.$$

На «больших» расстояниях формула для силы притяжения двух «разреженных» тел имеет вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{\hbar c}{32\pi^2 l^4} (\varepsilon_{10} - 1)(\varepsilon_{20} - 1) \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx \int_1^\infty \frac{1 - 2p^2 + 2p^4}{8p^6} dp = \\ &= \frac{\hbar c}{l^4} \frac{23}{640\pi^2} (\varepsilon_{10} - 1)(\varepsilon_{20} - 1). \quad (31.22) \end{aligned}$$

Эта сила соответствует взаимодействию двух атомов с энергией

$$U(R) = -\frac{23\hbar c}{4\pi R^7} \alpha_1 \alpha_2, \quad (31.23)$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  — статические поляризуемости обоих атомов ( $\epsilon_0 = 1 - 4\pi N\alpha$ ). Формула (31.23) совпадает с результатом квантовомеханического расчета Казимира и Польдера [51] для притяжения двух атомов на достаточно больших расстояниях, когда становятся существенными эффекты запаздывания.

Рассмотрим теперь взаимодействие двух атомов, находящихся в жидкости (Питаевский [52]). Для этого представим себе, что имеются слабые растворы атомов разного сорта с концентрациями (числа частиц в  $1 \text{ см}^3$ ), соответственно,  $N_1$  и  $N_2$  в одном и том же растворителе. Далее, будем считать, что щель заполнена чистым растворителем. Диэлектрические проницаемости растворов  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  при малых концентрациях растворенных атомов мало отличаются от диэлектрической проницаемости чистого растворителя, которую обозначим через  $\epsilon_3 = \epsilon$ . С точностью до первого порядка по концентрации

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \epsilon + N_1 \left( \frac{\partial \epsilon_1}{\partial N_1} \right)_{N_1=0}, \\ \epsilon_2 &= \epsilon + N_2 \left( \frac{\partial \epsilon_2}{\partial N_2} \right)_{N_2=0}. \end{aligned}$$

Сохраняя в формуле (31.15) для силы на «малых» расстояниях члены только того же порядка малости, получим (аналогично переходу к формуле (31.18)):

$$F(l) = \frac{\hbar}{32\pi^2 l^3} N_1 N_2 \int_0^\infty \left( \frac{\partial \epsilon_1(i\omega)}{\partial N_1} \right)_{N_1=0} \left( \frac{\partial \epsilon_2(i\omega)}{\partial N_2} \right)_{N_2=0} \frac{d\omega}{\epsilon^2(i\omega)}.$$

Этой силе соответствует энергия взаимодействия между растворенными атомами, равная

$$U(R) = -\frac{3\hbar}{16\pi^3 R^6} \int_0^\infty \left( \frac{\partial \epsilon_1(i\omega)}{\partial N_1} \right)_{N_1=0} \left( \frac{\partial \epsilon_2(i\omega)}{\partial N_2} \right)_{N_2=0} \frac{d\omega}{\epsilon^2(i\omega)}. \quad (31.24)$$

Аналогичным образом найдем для энергии на «больших» расстояниях

$$U(R) = - \frac{23\hbar c}{64\pi^3 \varepsilon_0^{5/2} R^7} \left( \frac{\partial \varepsilon_{10}}{\partial N_1} \right)_{N_1=0} \left( \frac{\partial \varepsilon_{20}}{\partial N_2} \right)_{N_2=0}. \quad (31.25)$$

Мы видим, что в случае, когда молекулы растворенного вещества сильно взаимодействуют с растворителем, силы взаимодействия между ними уже не определяются их поляризуемостями.

**3. Тонкая пленка на поверхности твердого тела.** Развинутую общую теорию ван-дер-ваальсовых сил можно применить также для вычисления термодинамических величин тонкой жидкой пленки, находящейся на поверхности твердого тела; толщина  $l$  пленки предполагается, разумеется, большой по сравнению с межатомными расстояниями.

Выше была получена формула (30.12), выражающая химический потенциал жидкости, отнесенный к единице массы, через гриновские функции существующего в ней длинноволнового электромагнитного поля. Эта формула, однако, неудобна по двум причинам: во-первых, она содержит совершенно неизученную экспериментально величину  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$  во всем интервале частот; во-вторых, она дает химический потенциал  $\mu$  как функцию плотности  $\rho$ , тогда как, как правило, обычно необходимо знать  $\mu$  в зависимости от давления  $p$ .

Рассмотрим пленку 3, лежащую на поверхности твердого тела 1 и находящуюся в равновесии со своим паром 2 (рис. 85). Мы будем рассматривать пар, в отношении его электромагнитных свойств, как вакуум, т. е. будем везде полагать его диэлектрическую проницаемость равной единице:  $\varepsilon_2 = 1$ .

Согласно условию механического равновесия, нормальная компонента  $\sigma_{xx}$  тензора напряжений должна быть непрерывна на поверхности пленки. Отсюда находим уравнение

$$p = p_0(\rho, T) - \bar{\sigma}_{xx},$$

где  $p$  — давление пара,  $p_0(\rho, T)$  — давление массивной жидкости при заданных плотности и температуре, а  $\bar{\sigma}_{xx}$  обозначает совокупность всех членов в выражении (30.11)

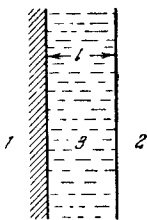


Рис. 85.

тензора напряжений в пленке, за исключением первого. Решая это уравнение относительно  $\rho$ , мы найдем плотность как функцию давления<sup>1)</sup>

$$\rho = \rho_0(p + \bar{\sigma}_{xx}, T).$$

Подставив же это выражение в формулу (30.12) для химического потенциала, получим:

$$\mu = \mu_0(p + \bar{\sigma}_{xx}, T) + \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon(i\omega_n)}{\partial \rho} \mathfrak{D}_{ii}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n),$$

где  $\mu_0(p, T)$  — химический потенциал массивной жидкости. Разлагая  $\mu_0$  по степеням малой величины  $\bar{\sigma}_{xx}$  и учитывая термодинамическое соотношение  $\left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho}$ , приведем это выражение к виду

$$\mu(p, T) = \mu_0(p, T) + \frac{1}{\rho} \bar{\sigma}_{xx} + \frac{T}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \varepsilon(i\omega_n)}{\partial \rho} \mathfrak{D}_{ii}^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega_n).$$

Наконец, подставив сюда выражения для  $\bar{\sigma}_{xx}$  из (30.11), мы найдем, что член с  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}$  выпадает и остается

$$\mu(p, T) = \mu_0(p, T) + \frac{1}{\rho} \sigma'_{xx}.$$

Здесь  $\sigma'_{xx}$  — компонента «укороченного» тензора напряжений (31.2). Эта величина постоянна вдоль толщины пленки (в силу постоянства потока импульса), и как раз ею определяется, согласно (31.3), сила  $F(l)$ .

Введем обозначение  $\zeta$  для «ван-дер-ваальсовской части» химического потенциала пленки, отнесенной к единице объема жидкости,

$$\mu = \mu_0 + \frac{\zeta}{\rho}. \quad (31.26)$$

Согласно сказанному выше,

$$\zeta = \sigma'_{xx} = F(l). \quad (31.27)$$

<sup>1)</sup>  $\bar{\sigma}_{xx}$  также является функцией от  $\rho$ , но поскольку оно представляет собою малую поправку к давлению, мы можем положить там  $\rho = \rho_0(p, T)$ .

При стремлении  $l$  к  $\infty$ , т. е. для массивной жидкости,  $\zeta$  обращается в нуль.

Таким образом, для определения интересующей нас величины  $\zeta$  нет необходимости производить заново какие-либо вычисления. Она определяется полученными выше формулами для  $F(l)$  (общая формула (31.13) и последующие предельные формулы), в которых надо только положить  $\epsilon_2 = 1$ .

Читатель, специально интересующийся вопросами, затронутыми в §§ 3, 4, может обратиться к подробным статьям Лифшица [49] и Дзялошинского, Лифшица и Питаевского [48].

---

## ТЕОРИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ

## § 32. Общие сведения. Выбор модели

**1. Явление сверхпроводимости.** Одним из наиболее важных и трудных вопросов квантовой статистики является проблема сверхпроводимости. Как известно, целый ряд металлов при достаточно низких температурах претерпевает фазовый переход в новое «сверхпроводящее» состояние. В этом состоянии металл обладает термодинамическими и электромагнитными свойствами, резко отличными от его свойств в нормальном состоянии. Экспериментально, пожалуй, наиболее наглядно этот переход проявляется в том, что при охлаждении до критической температуры металл внезапно перестает оказывать сопротивление электрическому току. Иными словами, при протекании тока в сверхпроводнике не происходит диссипации энергии.

Экспериментальные исследования показали, что свойства сверхпроводника в магнитном поле резко отличны от сравнительно простых свойств нормального металла. Магнитное поле не проникает в толщу массивного сверхпроводника (эффект Мейснера—Оксенфельда). Эффективная глубина, отсчитываемая от поверхности сверхпроводника, помещаемого в постоянное магнитное поле, на которой поле еще отлично от нуля (так называемая глубина проникновения), очень мала и составляет по порядку величины  $\sim 10^{-5}$  см. Термодинамический переход из нормального состояния в сверхпроводящее является фазовым переходом второго рода и характеризуется тем, что при температуре перехода теплоемкость металла меняется скачком.



Значительный успех в понимании этого явления был достигнут в последние годы. При этом оказалось, что разработка теории сверхпроводимости требует широкого применения методов квантовой теории поля. Изложению этих методов посвящены следующие параграфы, в настоящем же разделе мы остановимся более подробно на физической стороне вопроса.

Довольно давно уже было ясно, что в явлении сверхпроводимости мы имеем дело с чем-то родственным явлению сверхтекучести. Это видно, прежде всего, из того, что для поддержания в сверхпроводнике электрического тока не требуется внешней разности потенциалов, т. е. не требуется работы внешних источников. Носителями электрического тока в металле являются электроны; указанное свойство есть поэтому не что иное, как свойство сверхтекучести электронной жидкости.

В гл. I в связи с вопросом о сверхтекучести гелия мы подробно останавливались на свойствах энергетического спектра возбуждений, необходимых для возникновения сверхтекучести. Надо, однако, сразу отметить, что при малых импульсах спектр сверхпроводника не может иметь того вида, который следует сопоставить жидкому гелию. Действительно, гелий в качестве начального участка спектра имеет фононную звуковую ветвь. Распространение звука, как хорошо известно, связано с длинноволновыми колебаниями плотности. Но для электронной жидкости в металле изменение ее плотности связано с довольно значительной затратой энергии, поскольку этому препятствуют кулоновские силы, действующие между электронами и решеткой и между самими электронами. Изменение плотности электронной жидкости нарушает условие электронейтральности, поэтому соответствующий спектр длинноволновых колебаний, подобно тому как это имеет место в плазме, начинается с некоторой конечной частоты. Фактически в металле эта частота очень велика ( $\sim 1 \text{ эв} \simeq 10^4 \text{ }^\circ\text{K}$ ). Указанные соображения не относятся, конечно, к коротковолновым возбуждениям с волновым вектором порядка обратных межатомных расстояний. Как мы знаем, именно такие электронные возбуждения играют основную роль в нормальном металле. Для существования сверхтекучести достаточно, в соответствии с результатами гл. I, чтобы такие возбуждения

были отделены от основного состояния щелью, т. е. чтобы спектр имел вид, изображенный на рис. 86. Заметим, что, помимо приведенных выше соображений, на наличие у сверхпроводников спектра такого типа указывали экспериментальные данные по электронной теплоемкости при низких температурах, приводившие к зависимости теплоемкости от температуры вида  $e^{-\Delta/T}$ .

Мы не будем здесь останавливаться на изложении ряда феноменологических теорий, зачастую довольно хорошо описывающих экспериментальный материал, укажем только, что эти теории не могли дать объяснения микроскопического механизма явления.

Ключом к пониманию относительной роли различных взаимодействий в металле в происхождении сверхпроводимости явилось открытие в 1953 г. изотопического эффекта [53]. Оказалось, что критическая температура  $T_c$  (температура, при которой происходит переход из нормального состояния металла в сверхпроводящее) зависит от массы того или иного изотопа как  $T_c \sim (M)^{-1/2}$ . Независимо Фрелихом [54] было высказано предположение, что основным взаимодействием, ответственным за явление сверхпроводимости, должно быть взаимодействие электронов с фононами. Это взаимодействие содержит существенную зависимость от массы ионов.

**2. Модель. Гамильтониан взаимодействия.** Гамильтониан взаимодействия, о котором уже шла речь в гл. II, имеет, как мы знаем, вид

$$H_{int}(x) = g\psi^+(x)\psi(x)\varphi(x). \quad (32.1)$$

Вычислим матричный элемент рассеяния двух электронов друг на друга, в процессе которого электроны обмениваются между собой одним фононом. Такой процесс схематически представлен на диаграмме рис. 87. Пунктирная линия изображает обмен одним фононом, которому в матричном эле-

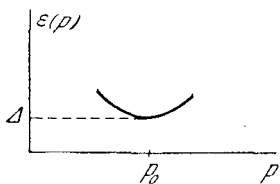


Рис. 86.

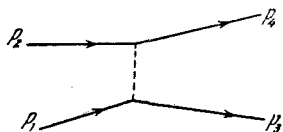


Рис. 87.

менте соответствует  $D$ -функция фонона,

$$g^2 D(\varepsilon_3 - \varepsilon_1; \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) = g^2 \frac{u^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 - u^2 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)^2},$$

где  $\varepsilon_3 - \varepsilon_1$ ,  $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$  — соответственно, изменение энергии и импульса одного из электронов при столкновении. Вблизи ферми-поверхности изменение импульса при столкновении в общем случае порядка  $p_0$  (т. е.  $u|\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1|$  порядка дебаевской частоты,  $\omega_D$ , так как  $p_0 \sim a^{-1}$ ), тогда как изменение энергии электронов может быть невелико. В этой области, т. е. когда  $|\varepsilon_3 - \varepsilon_1| \ll \omega_D$ , эффективное взаимодействие, которое определяется предыдущим выражением, сводится просто к константе —  $g^2$ , т. е. имеет характер притяжения.

Л. Купер [55] в 1957 г. показал, что эффективное притяжение между электронами вблизи поверхности Ферми, возникающее в результате электрон-фононного взаимодействия, сколь слабо оно бы ни было, обязательно приводит к образованию связанных пар электронов. Поскольку спаривание является энергетически выгодным, при включении взаимодействия произойдет перестройка основного состояния системы. Для возбуждения такой системы необходимо затратить некоторую конечную энергию, равную энергии связи пары, которая и будет играть роль щели в спектре возбуждений. На основе этой идеи оказалось возможным построить полную теорию сверхпроводимости, объясняющую огромную совокупность фактов, накопленных за несколько десятков лет интенсивного изучения явления.

Выбранная нами за основу формулировка теории отличается от первоначальных формулировок (Бардин, Купер и Шриффер [56], Боголюбов [57])<sup>1)</sup>, поскольку нам кажется, что методы квантовой теории поля имеют и в этом вопросе значительное преимущество. Помимо своей простоты и стройности, излагаемый ниже подход позволяет получить ряд существенных новых результатов.

Прежде чем переходить к дальнейшему, заметим, что электрон-фононное взаимодействие не является единственным для электронов в металле. Между электронами действуют также кулоновские силы отталкивания. Поэтому эффективное

<sup>1)</sup> См. также [58].

взаимодействие между ними будет иметь знак притяжения или отталкивания в зависимости от соотношения между величинами упомянутого электрон-фононного притяжения и кулоновского отталкивания электронов в металле. В общем виде задача учета обоих взаимодействий для конкретных металлов чрезвычайно сложна. К этому надо добавить, что реальные сверхпроводники являются анизотропными. Поэтому следует оговориться, что в современной теории сверхпроводимости, по существу, рассматривается некоторая простая модель с квадратичным законом дисперсии для электронов, в которой заранее постулируется, что взаимодействие электронов в узкой области их энергий вблизи поверхности Ферми имеет характер притяжения. Эта область энергий имеет, очевидно, порядок максимальной энергии испускаемых фононов, т. е.  $\sim \omega_D$ , где  $\omega_D$  — дебаевская частота. Кроме того, ниже мы будем предполагать для простоты, что взаимодействие постоянно в этой области и является достаточно слабым.

До настоящего времени теория сверхпроводимости, основанная на представлениях ферми-жидкости и к тому же учитывающая анизотропию, не была построена. Интересно все же отметить, что, несмотря на грубость модели, теория не только качественно объясняет явление, но и приводит к хорошему количественному согласию с имеющимися экспериментальными данными.

Напишем эффективный гамильтониан взаимодействия электронов между собой в представлении вторичного квантования следующим образом:

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \sum_{p_1+p_2=p_3+p_4} a_{p_1\sigma_1}^+ a_{p_2\sigma_2}^+ a_{p_3\sigma_3} a_{p_4\sigma_4} \theta_{p_1} \theta_{p_2} \theta_{p_3} \theta_{p_4}, \quad (32.2)$$

где  $\lambda < 0$ , а  $\theta_p$  — факторы обрезания:

$$\theta_p = \begin{cases} 1, & |\varepsilon(p) - \varepsilon_F| < \omega_D, \\ 0, & |\varepsilon(p) - \varepsilon_F| > \omega_D. \end{cases}$$

Наличие этих факторов означает, что во взаимодействии участвуют только электроны с энергиями в узком слое толщиной  $2\omega_D$  вблизи поверхности Ферми ( $\omega_D \ll \varepsilon_F$ ). Ниже мы часто будем записывать этот гамильтониан через опера-

торы  $\psi_\alpha(\mathbf{r})$  и  $\psi_\beta^+(\mathbf{r})$  в координатном представлении

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2} \int \psi_\alpha^+(\mathbf{r}) \psi_\beta^+(\mathbf{r}) \psi_\beta(\mathbf{r}) \psi_\alpha(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (32.3)$$

подразумевая при этом, конечно, что значения четырех аргументов  $\psi$ -операторов в (32.3) на самом деле несколько различаются. Последнее связано с присутствием в выражении (32.2) для гамильтониана факторов  $\theta_p$ . Точнее было бы написать вместо (32.3) следующее выражение:

$$H_{int} = \frac{\lambda}{2} \int \int \int \int \int \theta(\mathbf{r} - \xi_1) \theta(\mathbf{r} - \xi_2) \theta(\mathbf{r} - \xi_3) \theta(\mathbf{r} - \xi_4) \times \\ \times \psi_\alpha^+(\xi_1) \psi_\beta^+(\xi_2) \psi_\beta(\xi_3) \psi_\alpha(\xi_4) d\mathbf{r} d\xi_1 \dots d\xi_4, \quad (32.4)$$

где  $\theta(\mathbf{x})$  есть фурье-обращение  $\theta_p$ :

$$\theta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} \theta_p d\mathbf{p}. \quad (32.5)$$

Легко проверить, переходом к фурье-представлению, что функции  $\theta(\mathbf{x})$  обладают  $\delta$ -функционным свойством:

$$\int \theta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = f(\mathbf{x}),$$

если функция  $f(\mathbf{x})$  имеет отличные от нуля компоненты Фурье  $f_p$  для импульсов  $\mathbf{p}$  только вблизи поверхности Ферми. В излагаемой ниже теории мы будем иметь дело именно с такими функциями. В этом смысле и следует понимать выражение (32.3).

### § 33. Феномен Купера. Неустойчивость основного состояния системы невзаимодействующих ферми-частиц относительно сколь угодно слабого притяжения между частицами

**1. Уравнение для вершинной части.** Рассмотрим свойства системы с взаимодействием (32.3). Для этого обратимся к изучению вершинной части  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  при абсолютном нуле. Напишем ряд теории возмущений для этой величины. В первом приближении вершинная часть есть:

$$\lambda(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\gamma\beta}). \quad (33.1)$$

Диаграммы, соответствующие первым членам ряда теории возмущений, изображены на рис. 88. Как мы знаем, с диаграммами *а)* и *в)* связаны особенности в вершинной части «нуль-звукового» типа, т. е. эти особенности существенны при малых передачах импульса. Диаграммы вида *б)* связаны с особенностями в  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  при малых значениях суммарного 4-импульса  $q = p_1 + p_2$ . Исследуем более подробно последний случай. Используя конкретные свойства рассматриваемой модели, мы сможем получить более детальные сведения о вершинной части в области малых  $q$  по сравнению с общим результатом (20.8).

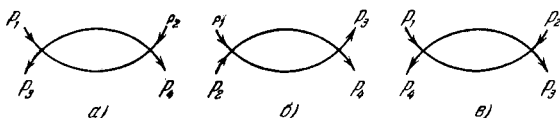


Рис. 88.

Матричный элемент для диаграммы рис. 88, б) равен

$$\lambda^2 \frac{i}{(2\pi)^4} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta}) \int d^4k G(k) G(q-k),$$

где  $q = \{\omega_0, \mathbf{q}\} = \{\omega_1 + \omega_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\}$ . Подставляя сюда выражения для гриновских функций и интегрируя по частотам, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta}) \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_0 - \varepsilon_0(\mathbf{k}) - \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + 2\mu + i\delta} \\ & \quad (\varepsilon_0(\mathbf{k}) > \mu, \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) > \mu), \\ & - \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\gamma\beta}) \int \frac{d\mathbf{k}}{\omega_0 - \varepsilon_0(\mathbf{k}) - \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) + 2\mu - i\delta} \\ & \quad (\varepsilon_0(\mathbf{k}) < \mu, \varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) < \mu). \end{aligned} \quad (33.2)$$

В модели, о которой идет речь, взаимодействуют только электроны в узкой области энергий вблизи энергии Ферми  $\varepsilon_F \simeq \mu$ . Поэтому в интегралах (33.2) интегрирование по  $\mathbf{k}$  ограничено условиями  $|\varepsilon_0(\mathbf{k}) - \mu|, |\varepsilon_0(\mathbf{q} - \mathbf{k}) - \mu| < \omega_D$ . Полагая  $\omega_0, |\mathbf{q}|v \ll \omega_D$ , перейдем обычным образом к интегрированию по  $\xi = v(|\mathbf{k}| - p_0)$ . Пренебрегая также в интегралах

изменением верхнего предела на величины порядка  $\omega_0$ ,  $|q|v$ , преобразуем выражение (33.2) к следующему виду:

$$-\frac{\lambda^2 m p_0}{2\pi^2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \int_0^{\omega_D} d\xi \times \\ \times \int_0^1 \left[ \frac{1}{\omega_0 + 2\xi + v|q|x - i\delta} + \frac{1}{2\xi + v|q|x - \omega_0 - i\delta} \right] dx$$

(где  $x = \cos \theta$ ,  $\theta$  — угол между направлением векторов  $q$  и  $k$ ). Оставшиеся интегрирования выполняются элементарно. Выбирая ветви логарифмов из условия, что интеграл от первого члена в квадратной скобке положителен при  $\omega_0 > 0$ , а от второго — при  $\omega_0 < 0$ , получим для изучаемой диаграммы следующее выражение:

$$-\frac{\lambda^2 m p_0}{2\pi^2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \left[ 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{2\omega_D - i\delta}{\omega_0 + v|q| - i\delta} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{2\omega_D - i\delta}{-\omega_0 + v|q| - i\delta} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0}{2v|q|} \left( \ln \frac{\omega_0 - i\delta}{\omega_0 + v|q| - i\delta} + \ln \frac{v|q| - \omega_0 - i\delta}{-\omega_0 - i\delta} \right) \right]. \quad (33.3)$$

Главный член этого выражения при малых  $\omega_0$  и  $v|q|$  имеет вид

$$-\lambda^2 \frac{m p_0}{2\pi^2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \ln \frac{\omega_D}{\{\omega_0, v|q|\}}.$$

Поэтому при  $\omega_D \gg \omega_0$ ,  $v|q|$  малость константы взаимодействия  $\lambda$  может быть компенсирована большой величиной логарифма, в результате чего этот член становится того же порядка, что и первый член теории возмущений (33.1). Таким образом, для того чтобы найти вершинную часть в окрестности малых  $\omega_0$  и  $v|q|$ , когда  $\lambda \ln \frac{\omega_D}{\{\omega_0, v|q|\}} \sim 1$ , надлежит, как и в гл. IV, суммировать совокупность главных членов ряда теории возмущений.

С этой целью напомним уравнение для вершинной части в форме, в которой выделены члены, приводящие к особенностям  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  при малых  $q = p_1 + p_2$ :

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) + \\ + \frac{i}{2(2\pi)^4} \int \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, p_2; k, q-k) G(k) G(q-k) \times \\ \times \Gamma_{\xi\eta, \gamma\delta}(k, q-k; p_3, p_4) d^4k. \quad (33.4)$$

В этом уравнении  $\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  есть сумма всех матричных элементов, диаграммы которых неприводимы в интересующем нас смысле, т. е. не могут быть рассечены на две части, содержащие одна — только входящие, другая —

только выходящие внешние концы и соединенные двумя электронными линиями. Ядро интегрального уравнения (33.4) содержит большой логарифмический член от интегрирования двух функций Грина. В силу малости константы взаимодействия в качестве величины  $\tilde{\Gamma}$  достаточно взять ее выражение через первые члены теории возмущений, поскольку соответствующие выражения для  $\tilde{\Gamma}$  не содержат больших величин.

Мы, однако, поставили себе целью вычислить ядро уравнения (33.4), не ограничиваясь членами порядка  $\lambda \ln \frac{\omega_D}{\omega_0} \sim 1$ ; попытаемся найти его выражение с точностью до членов порядка  $\lambda$  включительно. На первый взгляд поэтому кажется, что для этого надо было бы знать величину  $\tilde{\Gamma}$  с точностью до членов порядка  $\lambda^2$  по теории возмущений, поскольку логарифмическое интегрирование в (33.4) может компенсировать один порядок по  $\lambda$ . Рассмотрим члены второго порядка теории возмущений для  $\tilde{\Gamma}$ . Соответствующие диаграммы приведены на рис. 89. Оценим величину матричного элемента, отвечающего, например, диаграмме а). Опуская численные коэффициенты, получим:

$$\lambda^2 \int G(l) G(l-k+p_1) d^4l.$$

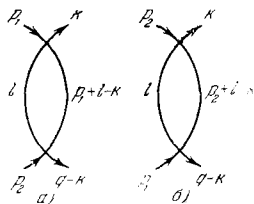


Рис. 89.



Подставляя выражения для гриновских функций, проинтегрируем по частотам:

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \int \frac{dl}{\Omega + \varepsilon_0(l - \mathbf{k} + \mathbf{p}_1) - \varepsilon_0(l)} \quad (\varepsilon_0(l) > \mu; \varepsilon_0(l - \mathbf{k} + \mathbf{p}_1) < \mu), \\ & - \lambda^2 \int \frac{dl}{\Omega + \varepsilon_0(l - \mathbf{k} + \mathbf{p}_1) - \varepsilon_0(l)} \quad (\varepsilon_0(l) < \mu; \varepsilon_0(l - \mathbf{k} + \mathbf{p}_1) > \mu). \end{aligned} \quad (33.5)$$

Фактически область интегрирования по  $l$  значительно уже, чем если бы она определялась только последними условиями.

Это связано со свойствами модели, в которой взаимодействовать могут только электроны с импульсами в окрестности фермиевского импульса  $|\mathbf{v}(|\mathbf{p}| - p_0)| < \omega_D$ . Фактическая область интегрирования заштрихована на рис. 90 для первого и закрашена черным для второго условия в выражении (33.5) ( $|\mathbf{k} - \mathbf{p}_1| < 2p_0$ ; если  $|\mathbf{k} - \mathbf{p}_1| > 2p_0$ , область интегрирования вообще отсутствует). В обоих случаях значение

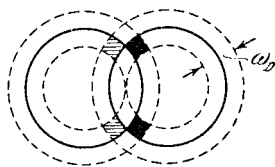


Рис. 90.

разности  $\varepsilon(l - \mathbf{k} + \mathbf{p}_1) - \varepsilon(l)$  в знаменателе подынтегрального выражения в рассматриваемой области равно по порядку величины  $\omega_D$ , тогда как объем области, по которой производится

интегрирование, есть  $\sim \frac{m^2 \omega_D^2}{p_0}$ . Таким образом, порядок величины матричного элемента для диаграмм рис. 89 есть

$\lambda^2 \frac{m^2 \omega_D}{p_0}$ , т. е. их относительный порядок по сравнению

с простой вершиной есть  $(\lambda m p_0) \frac{\omega_D}{\varepsilon_F}$ . (Безразмерным малым

параметром в рассматриваемой модели является, как видно из (33.3), величина  $\lambda m p_0 \ll 1$ .) Поскольку по своему физическому смыслу  $\omega_D \ll \varepsilon_F$ , то эта дополнительная малость не может быть компенсирована в рассматриваемой области большой величиной логарифма. В силу этого в уравнении (33.4) для величины  $\tilde{\Gamma}$  можно ограничиться простой вершиной первого порядка теории возмущений (33.1).

Получающееся уравнение для вершинной части теперь может быть легко решено. Для этого заметим, что, как видно

из выражения (33.3),  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  зависит только от суммы переменных  $q = p_1 + p_2$ . Поэтому интеграл в правой части (33.4) сводится к уже вычисленному нами интегралу для матричного элемента второго порядка теории возмущений (33.3). В результате получаем ( $\omega_0 > v|q|$ ):

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4) \equiv \Gamma(q)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}),$$

$$\Gamma(q) = \lambda \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \right) \left[ \ln e \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - v^2 |q|^2} \right| + \frac{\omega_0}{2v|q|} \ln \left| \frac{\omega_0 - v|q|}{\omega_0 + v|q|} \right| \right] \right\}^{-1}. \quad (33.6)$$

**2. Свойства вершинной части.** Для простоты рассмотрим сначала выражение (33.6) при  $q = 0$ . При вещественных и положительных  $\omega_0$  имеем:

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\lambda}{1 + \left( \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \right) \left[ \ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} \right]}. \quad (33.7)$$

Будем рассматривать теперь  $\Gamma(\omega_0)$  как функцию комплексной переменной  $\omega_0$ , определяя ее как аналитическое продолжение (33.7) в верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \omega_0 > 0$ . Тогда получим:

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{\lambda}{1 + \left( \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \right) \left[ \ln \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{\pi i}{2} - i\varphi \right]}.$$

Таким образом, если взаимодействие имеет характер притяжения ( $\lambda < 0$ ), величина  $\Gamma(\omega_0)$  имеет полюс в точке  $\omega_0 = i\Omega$ , где

$$\Omega = 2\omega_D e^{-\frac{2\pi^2}{|\lambda| m p_0}}. \quad (33.8)$$

В окрестности полюса  $\Gamma(\omega_0)$  имеет вид

$$\Gamma(\omega_0) = -\frac{2\pi^2}{m p_0} \frac{i\Omega}{\omega_0 - i\Omega}.$$

Этот результат следует связать с упомянутой идеей Купера об образовании связанных пар электронов. Вершинная часть  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_2; p_3, p_4)$  определяется через компоненты Фурье двухчастичной функции Грина соотношением (10.17). Поэтому наличие полюса в величине  $\Gamma$  приводит к такому же

полюсу в двухчастичной функции Грина. Образование связанных пар означает неустойчивость основного состояния газа взаимодействующих ферми-частиц, из которого мы исходили. Наложение сколь угодно слабых сил взаимного притяжения между частицами повлечет за собой перестройку всей системы. Существование неустойчивости находит свое отражение в появлении полюсов у вершинной функции по переменной  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$  в верхней полуплоскости. Этот полюс, будучи чисто мнимым, определяет время релаксации неустойчивого основного состояния. В силу принципа неопределенности это время соответствует энергии связи реальной пары. В перестроенном основном состоянии пары ведут себя, как бозевские образования, и, подобно тому, что имеет место для обычных бозе-частиц, способны накапливаться в произвольном количестве на уровне наименьшей энергии. В сверхпроводящем состоянии эти пары находятся на уровне с импульсом движения пары как целого, равным нулю, в полной аналогии с тем, что происходит при «бозе-конденсации» обычных бозе-частиц.

При отличных от нуля  $v|q|$  выражение (33.6) можно записать в следующем виде ( $\omega_0 > v|q|$ ):

$$\Gamma(q, \omega_0) = \lambda \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \right) \left[ \ln e \left| \frac{2\omega_D}{\omega_0} \right| + \frac{i\pi}{2} - i\varphi - \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{v^2 |q|^2}{\omega_0^2} \right) + \frac{\omega_0}{2v|q|} \ln \left( \frac{\omega_0 - v|q|}{\omega_0 + v|q|} \right) \right] \right\}^{-1}.$$

После продолжения в полуплоскость  $\text{Im } \omega_0 > 0$ , используя определение  $\Omega$  (33.8), найдем:

$$\Gamma(q, \omega_0) = - \frac{2\pi^2}{m p_0} \left\{ \ln \frac{\omega_0}{i\Omega} - 1 + \frac{1}{2} \ln \left( 1 - \frac{v^2 |q|^2}{\omega_0^2} \right) - \frac{\omega_0}{2v|q|} \ln \left( \frac{\omega_0 - v|q|}{\omega_0 + v|q|} \right) \right\}^{-1}. \quad (33.9)$$

При малых  $v|q| \ll \Omega$

$$\Gamma(q, \omega_0) = - \frac{2\pi^2}{m p_0} \frac{i\Omega}{\omega_0 - i\Omega + i(v^2 |q|^2 / 6\Omega)}.$$

Равенство нулю знаменателя (33.9) определяет полюс  $\Gamma(q, \omega_0)$  как функцию  $|q|$ . При малых  $|q|$

$$\omega_0 = i\Omega \left( 1 - \frac{v^2 |q|^2}{6\Omega^2} \right),$$

т. е. абсолютная величина  $\omega_0$  уменьшается. При некотором значении  $v|q|_{\max}$  точка полюса  $\omega_0$  становится равной нулю, после чего при больших  $v|q|$  полюс в  $\Gamma$  отсутствует. Значение  $v|q|_{\max}$ , при котором  $\omega_0 = 0$ , легко определяется:

$$v|q|_{\max} = e\Omega. \quad (33.10)$$

Поскольку  $q$  есть импульс системы двух частиц как целого, этот результат означает, что тенденцию к образованию связанных пар проявляют электроны, движущиеся почти навстречу друг другу.

**3. Определение температуры перехода.** Отметим еще раз, что изложенные соображения свидетельствуют о неустойчивости обычного основного состояния системы «притягивающихся» частиц при низких температурах. Эта неустойчивость состоит в способности частиц, центр инерции которых почти покоится, образовывать связанные пары, т. е. своего рода бозе-частицы, которые «конденсируются» на основной уровень.

Температура, при которой впервые возникает такая неустойчивость, и будет температурой перехода металла из нормального в сверхпроводящее состояние.

Для ее определения можно воспользоваться упомянутой аналогией с газом бозе-частиц. В приближении, в котором мы пренебрегаем рассеянием частиц друг на друга (модель со слабым взаимодействием), связанные пары образуют идеальный газ. Как известно, температурная гриновская функция идеального газа бозе-частиц имеет вид:

$$\mathcal{G}(q, i\omega_n) = \left[ i\omega_n - \frac{q^2}{2m} + \mu \right]^{-1}$$

и представляет собой значения в точках  $\omega = i\omega_n = i2n\pi T$  аналитической в верхней полуплоскости  $\omega$  функции  $G^R(q, \omega)$ .

Эта величина при  $\omega_n = 0$  равна  $\left[ \mu - \frac{q^2}{2m} \right]^{-1}$ . При некоторой температуре  $T = T_0$ , называемой температурой «бозеконденсации», эта величина впервые обращается в бесконечность в точке  $q = 0$ . Температура  $T_0$  определяется условием  $\mu = 0$ .

Для связанной пары аналогом такой функции Грина бозе-частиц является двухчастичная фермионная функция Грина (16.5). Последняя в точке перехода должна обладать аналогичными

свойствами в смысле своей зависимости от переменных  $\omega_{0n} = (\omega_1 + \omega_2)_n$  и  $q = p_1 + p_2$ , соответствующих центру инерции пары. Фермионные гриновские функции в выражении (16.5) никакими особенностями по этим переменным не обладают. Поэтому рассмотрим вершинную часть  $\mathcal{J}(q, \omega_0)$  (мы опускаем всюду спинные индексы, смысл  $q$  и  $\omega_0$  указан выше) и определим ее как аналитическую функцию в верхней полуплоскости  $\omega_0$ , совпадающую в точках  $\omega_0 = i(\omega_1 + \omega_2)_n$  с вершинной частью в термодинамической технике. Иными словами, функция  $\mathcal{J}(q, \omega_0)$  есть аналитическое продолжение термодинамической вершинной части  $\mathcal{J}_{\alpha\beta\gamma\delta}(p_1\omega_1, p_2\omega_2; p_3\omega_3, p_4\omega_4) \equiv \mathcal{J}(q, \omega_0)(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma})$  (ниже мы убедимся, что в интересующем нас приближении эта величина, подобно (33.9), действительно зависит только от переменных  $q$  и  $\omega_0$ ). Мы предположим на основании предыдущего, что при температурах ниже температуры перехода  $\mathcal{J}(q, \omega_0)$  имеет полюсы  $\text{Im } \omega_0 > 0$ . При температуре, равной температуре перехода, в функции  $\mathcal{J}(q, \omega_0)$  впервые появляется полюс  $\omega_0 = 0$ .

Необходимое уравнение для термодинамической вершинной части имеет ту же структуру, что и (33.4):

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1\omega_1, p_2\omega_2; p_3\omega_3, p_4\omega_4) = & \tilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1\omega_1, p_2\omega_2; p_3\omega_3, p_4\omega_4) - \\ & - \frac{T}{2(2\pi)^3} \sum_{\omega'} \int \tilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1\omega_1, p_2\omega_2; k\omega'; q - k\omega_0 - \omega') \times \\ & \times \mathbb{G}(k) \mathbb{G}(q - k) \mathcal{J}_{\xi\eta, \gamma\delta}(k\omega', q - k\omega_0 - \omega'; p_3\omega_3, p_4\omega_4) dk, \quad (33.11) \end{aligned}$$

где опять  $\tilde{\mathcal{J}}$  есть сумма матричных элементов для всех тех диаграмм, которые не могут быть разделены вертикальным разрезом на две части, соединенные двумя одинаково направленными линиями. По тем же причинам, что и выше, для  $\tilde{\mathcal{J}}_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1\omega_1, p_2\omega_2; p_3\omega_3, p_4\omega_4)$  можно ограничиться первым приближением теории возмущений. Задача нахождения вершинной части тогда сводится к вычислению суммы и интеграла в матричном элементе:

$$- \frac{\lambda^2}{(2\pi)^3} T \sum_{\omega'} \int \mathbb{G}(k) \mathbb{G}(q - k) dk. \quad (33.12)$$

Подставляя сюда для гриновских функций (14.6), легко произвести элементарное суммирование по частотам.

Мы не будем вычислять (33.12) при произвольных значениях  $\omega_0, |\mathbf{q}|$ . Из соображений однородности ясно, что, как в бозе-газе, полюс в  $\mathcal{J}(\mathbf{q}, \omega_0)$  впервые появляется для значений  $\omega_0 = |\mathbf{q}| = 0$ . Поэтому достаточно найти решение уравнения (33.11) при  $|\mathbf{q}| = \omega_0 = 0$ . Момент, когда эта величина обращается в бесконечность, определяет температуру перехода из нормального в сверхпроводящее состояние. При  $|\mathbf{q}| = \omega_0 = 0$  интеграл (33.12) можно преобразовать:

$$-\frac{\lambda^2}{2\pi^2} m p_0 \int_0^{\omega_D} \text{th}\left(\frac{\xi}{2T}\right) \frac{d\xi}{\xi} = -\lambda^2 \frac{m p_0}{2\pi^2} \left( \ln \frac{\omega_D}{2T} - \int_0^{\infty} \frac{\ln x \, dx}{\text{ch}^2 x} \right) \quad (33.13)$$

[после интегрирования по частям, поскольку остающийся интеграл сходится, предел  $x = \omega_D/2T$  можно заменить на бесконечность. Интеграл равен  $-\ln(2\gamma/\pi)$ , где  $\ln \gamma = C = 0,577$ ]. Таким образом,

$$\mathcal{J}(0, 0) = \frac{\lambda}{1 + \frac{\lambda m p_0}{2\pi^2} \ln\left(\frac{2\omega_D \gamma}{\pi T}\right)}.$$

Вблизи температуры перехода это выражение можно записать как

$$\mathcal{J}(0, 0) = -\frac{2\pi^2}{m p_0} \frac{T_c}{T - T_c}, \quad (33.14)$$

где температура перехода  $T_c$  равна

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} 2\omega_D e^{-\left(\frac{2\pi^2}{|\lambda| m p_0}\right)}. \quad (33.15)$$

Значение частоты  $\Omega$ , введенной нами выше и характеризующей неустойчивость системы при абсолютном нуле, равно

$$\Omega = \frac{\pi}{\gamma} T_c. \quad (33.16)$$

## § 34. Система основных уравнений для сверхпроводника

**1. Сверхпроводник при абсолютном нуле температур.** Приступим теперь к выводу системы уравнений для гриновских функций, описывающих свойства металла в сверхпроводящем состоянии (Горьков [59]). Для начала ограничимся

случае абсолютного нуля температур. В рассматриваемой модели полный гамильтониан системы электронов в записи вторичного квантования имеет следующий вид:

$$\hat{H} = \int \left\{ - \left( \psi^+ \frac{\nabla^2}{2m} \psi \right) + \frac{\lambda}{2} (\psi^+ (\psi^+ \psi) \psi) \right\} d\mathbf{r},$$

где  $(\psi^+ \psi) \equiv \psi_\alpha^+ \psi_\alpha$  и операторы  $\psi(\mathbf{r})$  и  $\psi^+(\mathbf{r})$  в шредингеровском представлении удовлетворяют обычным коммутационным соотношениям

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_\beta^+(\mathbf{r}')\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (34.1)$$

$$\{\psi_\alpha(\mathbf{r}), \psi_\beta(\mathbf{r}')\} = \{\psi_\alpha^+(\mathbf{r}), \psi_\beta^+(\mathbf{r}')\} = 0.$$

Перейдем к гайзенберговскому представлению, в котором операторы  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\psi}^+$  зависят от времени и подчиняются следующим операторным уравнениям:

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} \tilde{\psi}_\alpha(x) - \lambda (\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) \tilde{\psi}_\alpha(x) = 0, \quad (34.2)$$

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} \right\} \tilde{\psi}_\alpha^+(x) + \lambda \tilde{\psi}_\alpha^+(x) (\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) = 0.$$

Уравнение для функции Грина системы

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = -i \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle$$

очевидным образом может быть получено из уравнений (34.2)

$$\begin{aligned} \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} G_{\alpha\beta}(x, x') + i\lambda \langle T((\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) \tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle = \\ = \delta(x - x'). \end{aligned} \quad (34.3)$$

Фигурирующее в этом уравнении среднее от произведения четырех  $\tilde{\psi}$ -операторов для системы невзаимодействующих электронов распадается по теореме Вика на парные средние операторов  $\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\psi}^+$ . Для взаимодействующих частиц произведение четырех  $\tilde{\psi}$ -операторов выражается уже через вершинную часть, т. е. включает в себя вклад от различных процессов рассеяния. В изучаемой модели со слабым взаимодействием рассеянием различных частиц друг на друге можно

пренебречь. В то же время надо учесть, что основное состояние системы отличается от обычного состояния с заполненной сферой Ферми присутствием связанных пар электронов. Такие пары, как это уже отмечалось в предыдущем параграфе, представляют собой бозевские образования и потому обладают способностью накапливаться в произвольном количестве на уровне с наименьшей энергией. В отсутствие внешнего поля и в пренебрежении процессами рассеяния пары, очевидно, «конденсируются» в состоянии, в котором они как целое покоятся. Рассмотрим произведение операторов  $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$  или  $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$ . Первое из них уничтожает, а второе рождает два электрона. В частности, эти два электрона могут находиться в связанном состоянии, иными словами, в операторах  $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$  имеются члены, отвечающие уничтожению и рождению связанных пар, в том числе пар, находящихся на основном уровне. Поскольку таких пар много (число их пропорционально полному числу частиц), то соответствующий вклад в операторы  $\tilde{\psi}\tilde{\psi}$  и  $\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+$  можно считать числом, подобно тому как это делалось для системы бозе-частиц. Заметим, что в металле существуют особые причины для того, чтобы не рассматривать пары, находящиеся не на основном уровне. Действительно, связанная пара электронов с конечным импульсом движения как целое представляет собой бозевское возбуждение с нулевым спином. Как мы уже упоминали, условие электронейтральности в металле фактически приведет к тому, что для возбуждения такой пары из «бозе-конденсата» потребуется значительная энергия ( $\sim 1$  эв), что гораздо больше характерных энергий, с которыми приходится встречаться при построении теории сверхпроводимости.

Возвращаясь к уравнению для функции Грина (34.3), с учетом всего сказанного можно определенным образом расписать среднее от произведения четырех  $\psi$ -операторов. Имеем, например:

$$\begin{aligned} \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4)) \rangle = \\ = -\langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)) \rangle \langle T(\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4)) \rangle + \\ + \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4)) \rangle \langle T(\tilde{\psi}_\beta(x_2)\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)) \rangle + \\ + \langle N | T(\tilde{\psi}_\alpha(x_1)\tilde{\psi}_\beta(x_2)) | N+2 \rangle \langle N+2 | T(\tilde{\psi}_\gamma^+(x_3)\tilde{\psi}_\delta^+(x_4)) | N \rangle, \end{aligned} \quad (34.4)$$



где  $N\rangle$  и  $N+2\rangle$  — основные состояния системы с числом частиц  $N$  и  $N+2$ . Такая запись означает, что мы пренебрегли всеми эффектами рассеяния частиц друг на друге. Наличие взаимодействия учтено лишь постольку, поскольку оно приводит к образованию связанных пар. Третий член в правой части равенства (34.4) написан в полной аналогии со случаем бозе-газа в соответствии с тем, что большое число связанных пар «сконденсировалось» на основном уровне. Величина

$$\langle N | T(\tilde{\psi}\tilde{\psi}) | N+2 \rangle \langle N+2 | T(\tilde{\psi}^+\tilde{\psi}^+) | N \rangle,$$

очевидно, имеет порядок плотности числа пар.

Легко убедиться, что введенные таким образом величины можно записать в виде

$$\langle N | T(\tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(x')) | N+2 \rangle = e^{-2i\mu t} F_{\alpha\beta}(x-x'), \quad (34.5)$$

$$\langle N+2 | T(\tilde{\psi}_\alpha^+(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x')) | N \rangle = e^{2i\mu t} F_{\alpha\beta}^+(x-x').$$

Для однородной задачи (в отсутствие внешнего поля) функция Грина  $G(x-x')$  зависит только от разности координат  $x-x'$ . Происхождение дополнительной зависимости от  $t$  в выражениях (34.5) видно из общей формулы квантовой механики для производной по времени от произвольного оператора  $\tilde{A}(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N | \tilde{A}(t) | N+2 \rangle = i(E_N - E_{N+2}) \langle N | \tilde{A}(t) | N+2 \rangle.$$

По определению химический потенциал  $\mu = \frac{\partial E}{\partial N}$ , поэтому величина разности энергий  $E_{N+2} - E_N$  равна  $2\mu$ .

При подстановке в уравнение (34.3) для функции Грина выражения (34.4) мы будем всюду опускать первые два члена в правой части (34.4), поскольку в уравнениях для функций  $G$  и  $F$  и  $F^+$  они, как легко убедиться, приводят к аддитивной добавке к химическому потенциалу и не представляют интереса. В результате получаем следующее уравнение, связывающее функции  $G$  и  $F^+$ :

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} \right\} \hat{G}(x-x') - i\lambda \hat{F}(0+) \hat{F}^+(x-x') = \delta(x-x'). \quad (34.6)$$

(Здесь  $\hat{G}$ ,  $\hat{F}$ ,  $\hat{F}^+$  означают запись функций  $G_{\alpha\beta}$ ,  $F_{\alpha\beta}$ ,  $F_{\alpha\beta}^+$  в матричном виде по спинорным индексам, их произведение есть матричное произведение.)

Величина  $\hat{F}(0+)$  определена следующим образом:

$$F_{\alpha\beta}(0+) = e^{2i\mu t} \langle N | \tilde{\psi}_\alpha(x) \tilde{\psi}_\beta(x) | N+2 \rangle \equiv \lim_{r \rightarrow r', t \rightarrow t'+0} F_{\alpha\beta}(x-x'). \quad (34.7)$$

Уравнение для  $\hat{F}^+(x-x')$  может быть получено аналогичным образом применением второго из уравнений (34.2):

$$\left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu \right\} \hat{F}^+(x-x') + i\lambda \hat{F}^+(0+) \hat{G}(x-x') = 0. \quad (34.8)$$

В соответствии с (34.7)

$$F_{\alpha\beta}^+(0+) = e^{-2i\mu t} \langle N+2 | \tilde{\psi}_\alpha^+(x) \tilde{\psi}_\beta^+(x) | N \rangle. \quad (34.9)$$

В отсутствие взаимодействий, зависящих от спинов частиц, функция Грина  $\hat{G}(x-x')$  пропорциональна единичной матрице  $\delta_{\alpha\beta}$  по спиновым переменным:

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(x-x') = \delta_{\alpha\beta} G(x-x').$$

Функции  $\hat{F}$  и  $\hat{F}^+$  пропорциональны матрице  $\hat{I}$ , антисимметричной по своим индексам. Действительно, поскольку операторы  $\tilde{\psi}_\alpha(x)$  и  $\tilde{\psi}_\beta(x')$  антикоммутируют в один и тот же момент времени, то  $F_{\alpha\beta}(r-r', 0) = -F_{\beta\alpha}(r'-r, 0)$ . Отсюда следует:

$$\{F_{\alpha\beta}^+(r-r', 0)\}^* = -F_{\alpha\beta}(r-r', 0). \quad (34.10)$$

В частности,

$$\{F_{\alpha\beta}^+(0+)\}^* = -F_{\alpha\beta}(0+). \quad (34.11)$$

Удобно написать  $\hat{F}$  и  $\hat{F}^+$  в следующем виде:

$$\hat{F}^+(x-x') = \hat{I} F^+(x-x'), \quad (34.12)$$

$$\hat{F}(x-x') = -\hat{I} F(x-x'),$$

где  $(\hat{I}^2)_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ .

Из (34.10) видно, что  $F^+(x - x')$  и  $F(x - x')$  удовлетворяют соотношению

$$\{F^+(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0)\}^* = F(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0).$$

Антисимметрия  $\hat{F}$  и  $\hat{F}^+$  по спиновым индексам отвечает тому факту, что связанные пары находятся в синглетном состоянии. Функция  $F_{\alpha\beta}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', 0)$  с точностью до множителя может, очевидно, рассматриваться как волновая функция пары частиц в связанном состоянии (центр инерции пары покоится).

Напишем систему уравнений для функций, исключая всюду зависимость от спиновых переменных:

$$\left\{i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m}\right\} G(x - x') - i\lambda F(0+) F^+(x - x') = \delta(x - x'), \quad (34.13)$$

$$\left\{i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nabla^2}{2m} - 2\mu\right\} F^+(x - x') + i\lambda F^+(0+) G(x - x') = 0,$$

где  $(F(0+))^* = F^+(0+)$ .

Вводя компоненты Фурье всех величин, получим<sup>1)</sup>:

$$\begin{aligned} \left(\omega - \frac{p^2}{2m}\right) G(p) - i\lambda F(0+) F^+(p) &= 1, \\ \left(\omega + \frac{p^2}{2m} - 2\mu\right) F^+(p) + i\lambda F^+(0+) G(p) &= 0. \end{aligned} \quad (34.14)$$

Предыдущее рассмотрение было проведено в термодинамических переменных, где число частиц задано. Гораздо удобнее пользоваться в качестве независимой переменной химическим потенциалом  $\mu$ . Как обычно, переход к этим переменным формально может быть осуществлен заменой  $\omega = \omega' + \mu$ . Опуская в дальнейшем штрих у частоты, перепишем систему (34.14):

$$\begin{aligned} (\omega - \xi) G(p) - i\lambda F(0+) F^+(p) &= 1, \\ (\omega + \xi) F^+(p) + i\lambda F^+(0+) G(p) &= 0, \end{aligned} \quad (34.15)$$

---

<sup>1)</sup> Эта система уравнений имеет большое сходство с системой уравнений для функций  $G'$  и  $\hat{G}$  в бозе-системе. Надо иметь, однако, в виду, что аналогом функций  $F$  и  $F^+$  служат в этом случае операторы  $\xi_0$  и  $\xi_0^+$  частиц конденсата. Поэтому мы пользуемся обозначениями  $G$  и  $F^+$  в отличие  $G'$  и  $\hat{G}$  для бозе-частиц.

где  $\xi = v(|p| - p_0)$ ,  $p_0 \simeq \sqrt{2m\mu}$  — граничный импульс Ферми,  $v = \frac{p_0}{m}$ .

В результате решения найдем:

$$G(p) = \frac{\omega + \xi}{\omega^2 - \xi^2 - \Delta^2}, \quad F^+(p) = -i\lambda \frac{F^+(0+)}{\omega^2 - \xi^2 - \Delta^2}$$

и

$$\Delta^2 = \lambda^2 |F^+(0+)|^2. \quad (34.16)$$

Детерминант левой части системы уравнений (34.15) обращается в нуль в точках  $\omega = \pm \varepsilon(p)$ , где  $\varepsilon(p) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$ . Поэтому решение (34.15) получено с точностью до произвольных членов вида

$$A_1(p) \delta(\omega - \varepsilon(p)) + A_2(p) \delta(\omega + \varepsilon(p)).$$

Граничным условием, определяющим выбор произвольных  $A_1$  и  $A_2$  в функциях  $G$  и  $F^+$ , служит теорема Ландау (гл. II), согласно которой знак мнимой части функции Грина  $G$  противоположен знаку  $\omega$ , а функция

$$G^R(\omega, p) = \text{Re } G(\omega, p) + i\varepsilon(\omega) \text{Im } G(\omega, p)$$

должна быть аналитической и не иметь особенностей в верхней полуплоскости. Нетрудно проверить, что решением, удовлетворяющим этим требованиям, является<sup>1)</sup>:

$$G(p) = \frac{u_p^2}{\omega - \varepsilon(p) + i\delta} + \frac{v_p^2}{\omega + \varepsilon(p) - i\delta}, \quad (34.17)$$

$$F^+(p) = -i\lambda \frac{F^+(0+)}{(\omega - \varepsilon(p) + i\delta)(\omega + \varepsilon(p) - i\delta)}, \quad (34.18)$$

где функции  $u_p^2$  и  $v_p^2$  равны

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{\varepsilon(p)} \right); \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{\varepsilon(p)} \right). \quad (34.19)$$

<sup>1)</sup> Мы выбрали  $F^+(0+)$  вещественным. Последнее всегда возможно в отсутствие внешнего поля, поскольку уравнения (34.13) допускают преобразование  $\{F(x-x'), F(0+)\} \rightarrow \{F(x-x') e^{2i\varphi}, F(0+) e^{2i\varphi}\}$  и  $\{F^+(x-x'), F^+(0+)\} \rightarrow \{F^+(x-x') e^{-2i\varphi}, F^+(0+) e^{-2i\varphi}\}$  с постоянной фазой. Подробнее об этом ниже, в разделе 2.

Положительный полюс  $\omega = \varepsilon(\mathbf{p})$  в функции Грина (34.17) определяет спектр возбуждений  $\varepsilon(\mathbf{p}) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}$ . Этот спектр имеет щель  $\Delta$ , для определения которой будем исходить из соотношения

$$F^+(0) = (2\pi)^{-4} \int F^+(\mathbf{p}) d\omega d\mathbf{p}. \quad (34.20)$$

Подставляя сюда (34.18), получим уравнение

$$1 = - \frac{\lambda}{2(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}. \quad (34.21)$$

Расходимость в этом интеграле обрезается из условия, что в рассматриваемой модели во взаимодействии участвуют только электроны с энергией в слое толщиной  $2\omega_D$  около поверхности Ферми. Выполняя интегрирование, найдем:

$$1 = - \frac{\lambda}{2\pi^2} m p_0 \ln \frac{2\omega_D}{\Delta}.$$

В результате получаем:

$$\Delta = 2\omega_D e^{-1/\zeta}, \quad (34.22)$$

где  $\zeta = \frac{|\lambda| m p_0}{2\pi^2}$ . Сравнивая это выражение с результатом предыдущего параграфа, найдем, что величина щели в энергетическом спектре при абсолютном нуле температур связана с температурой перехода следующим образом:

$$\Delta = \frac{\pi}{\gamma} T_c. \quad (34.23)$$

**2. Уравнения при наличии внешнего электромагнитного поля. Градиентная инвариантность.** Если сверхпроводник находится во внешнем поле, скажем, в электромагнитном поле, то система уравнений (34.13) несколько усложнится. Заметим, прежде всего, что во внешнем поле все функции уже не будут функциями только разности координат. Введение электромагнитного поля в уравнения (34.13) может быть произведено обычным образом заменой всех производных:

$$\nabla \rightarrow \nabla - ie\mathbf{A} \quad \text{или} \quad \nabla \rightarrow \nabla + ie\mathbf{A}, \quad (34.24)$$

соответственно тому, относится ли это дифференцирование к оператору  $\tilde{\psi}$  или  $\tilde{\psi}^+$ . (Обычно удобно пользоваться

калибровкой, в которой скалярный потенциал  $\varphi$  равен нулю.) Уравнения для функций  $G$  и  $F^+$  в поле имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} G(x, x') - \\ & \quad - i\lambda F(x, x) F^+(x, x') = \delta(x - x'), \\ & \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 - \mu \right\} F^+(x, x') + \\ & \quad + i\lambda F^+(x, x) G(x, x') = 0. \end{aligned} \quad (34.25)$$

Отметим очевидную градиентную инвариантность этих уравнений. При градиентном преобразовании вектор-потенциала

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \quad (34.26)$$

функции  $G$ ,  $F$  и  $F^+$  преобразуются каждая своим образом:

$$\begin{aligned} G(x, x') & \rightarrow G(x, x') e^{ie[\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}')]}, \\ F(x, x') & \rightarrow F(x, x') e^{ie[\varphi(\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r}')]}, \\ F^+(x, x') & \rightarrow F^+(x, x') e^{-ie[\varphi(\mathbf{r}) + \varphi(\mathbf{r}')]}, \end{aligned} \quad (34.27)$$

а «щель»  $|\lambda| F(x, x)$  или  $|\lambda| F^+(x, x)$ , которая во внешнем поле является, вообще говоря, функцией  $x$ , преобразуется по закону

$$\begin{aligned} F(x, x) & \rightarrow F(x, x) e^{2ie\varphi(\mathbf{r})}, \\ F^+(x, x) & \rightarrow F^+(x, x) e^{-2ie\varphi(\mathbf{r})}. \end{aligned} \quad (34.28)$$

Градиентная инвариантность этих уравнений делает возможным последовательное изучение свойств сверхпроводников в магнитном поле. Отмечая градиентную инвариантность уравнений (34.25), следует подчеркнуть, что данный факт связан с написанием гамильтониана взаимодействия в форме (32.3). Строго говоря, гамильтониан (32.2) не является градиентно-инвариантным, что, конечно, есть свойство модели. Легко проверить, что в этой модели в уравнения (32.13) входят не  $F(x, x)$  — значения функций  $F$  и  $F^+$  в совпадающих точках, а величины

$$\overline{F(x, x)} = \int \theta(\mathbf{r} - \mathbf{y}) \theta(\mathbf{r} - \mathbf{z}) F(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{z} d\mathbf{y}$$

и, соответственно,  $\overline{F^+(x, x)}$ . Функция  $F(y, z; t=t')$ , как волновая функция пары, имеет радиус корреляции порядка размеров пары  $\xi_0 \sim \frac{\hbar v}{T_c}$  и при  $|y - z| \gg \xi_0$  быстро спадает. Функции  $\theta$  имеют, как указывалось в § 32,  $\delta$ -функционный характер с шириной максимума порядка  $v/\omega_D$ . Таким образом, замена  $\overline{F(x, x)}$  на  $F(x, x)$  влечет за собой ошибку порядка  $T_c/\omega_D$ , которая всегда мала в реальных сверхпроводниках.

**3. Сверхпроводник при конечных температурах.** В заключение настоящего параграфа рассмотрим вопрос о распространении изложенной схемы на случай отличных от нуля температур. Такое обобщение, очевидно, можно провести на базе изложенной в гл. III техники для  $T \neq 0$ . В сверхпроводящем состоянии система характеризуется отличными от нуля средними

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x, x') &= \frac{\langle T_\tau(\psi(x)\psi(x')\mathfrak{S}) \rangle}{(\mathfrak{S})}, \\ \mathfrak{F}^+(x, x') &= \frac{\langle T_\tau(\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(x')\mathfrak{S}) \rangle}{(\mathfrak{S})}\end{aligned}$$

(смысл усреднения и определение операторов  $\psi(x)$  и  $\psi^+(x)$  те же, что и в гл. III. Напомним, что в качестве независимой термодинамической переменной выбран химический потенциал). Если рассматривать гиббсовское усреднение в определениях  $\mathfrak{F}(x, x')$  и  $\mathfrak{F}^+(x, x')$  как квантовомеханическое усреднение по состоянию с энергией, равной средней энергии  $\bar{E}$ , и числом частиц, равным среднему числу частиц, то это означает, что рождение или уничтожение пары электронов практически не изменяет состояния. Для этого нужно, чтобы указанная пара электронов принадлежала к числу связанных пар, находящихся в «бозе-конденсированном» состоянии. Поскольку число этих пар очень велико (пропорционально полному числу частиц во всем объеме системы), прибавление или уничтожение одной из таких пар не сказывается на всем состоянии системы. Иными словами, как и при абсолютном нуле, система в сверхпроводящем состоянии имеет в произведениях операторов  $\psi\psi$  и  $\psi^+\psi^+$  члены, которые можно рассматривать как числа. Мы предположим, что средние (термодинамические) от произведения четырех

$\psi$ -операторов могут быть записаны через функции Грина  $\mathbb{G}(x, x') = -\langle T_\tau(\psi(x)\bar{\psi}(x')\mathbb{S}) \rangle / \langle \mathbb{S} \rangle$  и функции  $\mathbb{F}(x, x')$  и  $\mathbb{F}^+(x, x')$ , так же как это было сделано в выражении (34.4) при абсолютном нуле. Как и выше, это означает пренебрежение эффектами рассеяния частиц друг на друге. Имеем:

$$\frac{\langle T_\tau(\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)\bar{\psi}_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4)\mathbb{S}) \rangle}{\langle \mathbb{S} \rangle} =$$

$$= -\mathbb{G}_{\alpha\gamma}(x_1, x_3)\mathbb{G}_{\beta\delta}(x_2, x_4) + \mathbb{G}_{\alpha\delta}(x_1, x_4)\mathbb{G}_{\beta\gamma}(x_2, x_3) +$$

$$+ \mathbb{F}_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\mathbb{F}_{\gamma\delta}^+(x_3, x_4). \quad (34.29)$$

Мы не будем здесь повторять соответствующего вывода уравнений для функций  $\mathbb{G}$  и  $\mathbb{F}^+$ . Он вполне аналогичен выводу (34.13); приведем только окончательный вид этих уравнений:

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathbb{G}(x - x') + \Delta \mathbb{F}^+(x - x') =$$

$$= \delta(x - x'), \quad (34.30)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathbb{F}^+(x - x') - \Delta^* \mathbb{G}(x - x') = 0,$$

где

$$\Delta = |\lambda| \mathbb{F}(0+), \quad \Delta^* = |\lambda| \mathbb{F}^+(0+). \quad (34.31)$$

Иногда возникает необходимость в определении функции  $\mathbb{F}(x - x')$ . Соответствующее уравнение может быть легко получено:

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathbb{F}(x - x') - \Delta \mathbb{G}(x' - x) = 0.$$

Сюда входит функция  $\mathbb{G}$  с переставленными аргументами.

Нетрудно проверить, что совокупность четырех уравнений для функций  $\mathbb{G}(x - x')$ ,  $\mathbb{F}^+(x - x')$ ,  $\mathbb{F}(x - x')$  и  $\mathbb{G}(x' - x)$  может быть символически записана в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} & \Delta \\ -\Delta^* & \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathbb{G}(x - x') & \mathbb{F}(x - x') \\ \mathbb{F}^+(x - x') - \mathbb{G}(x' - x) \end{pmatrix} = \hat{1}. \quad (34.32)$$



Иными словами, перечисленные четыре функции образуют одну матричную функцию Грина для оператора в левой части (34.30).

В температурной технике вместо разложения в интеграл Фурье по частоте производится, как мы знаем, разложение всех величин в ряды Фурье. Как видно из написанных уравнений, если ввести компоненты Фурье для функций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}^+$  так же, как в гл. III были введены компоненты функции Грина:

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}^+(x-x') &= (2\pi)^{-3} T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \int dp e^{ipr} \mathfrak{F}_\omega^+(p), \\ \mathfrak{F}(x-x') &= (2\pi)^{-3} T \sum_n e^{-i\omega_n \tau} \int dp e^{ipr} \mathfrak{F}_\omega(p),\end{aligned}\quad (34.33)$$

где  $\omega = (2n+1)\pi T$ , то системе (34.15) соответствует система

$$\begin{aligned}(i\omega - \xi) \mathfrak{G}_\omega(p) + \Delta \mathfrak{F}_\omega^+(p) &= 1, \\ (i\omega + \xi) \mathfrak{F}_\omega^+(p) + \Delta^* \mathfrak{G}_\omega(p) &= 0,\end{aligned}\quad (34.34)$$

которой удовлетворяют

$$\mathfrak{G}_\omega(p) = -\frac{i\omega + \xi}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta^2}, \quad \mathfrak{F}_\omega^+(p) = \frac{\Delta^*}{\omega^2 + \xi^2 + \Delta^2}. \quad (34.35)$$

Отметим также, что в отсутствие поля функции  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}^+$  равны друг другу, а  $\Delta$  вещественно. Это решение в отличие от ситуации, имевшей место для системы (34.15), уже однозначно. Это связано с тем, что для термодинамических функций однозначно определены их аналитические свойства. Величина щели определяется из условия

$$1 = \frac{|\lambda| T}{(2\pi)^3} \sum_n \int \frac{dp}{\omega + \xi^2 + \Delta^2}. \quad (34.36)$$

Ряд по частотам легко суммируется. В результате вместо условия (34.21) при  $T=0$  мы получаем новое соотношение, из которого определяется величина щели при конечной температуре:

$$1 = \frac{|\lambda| m p_0}{2\pi^2} \int_0^D d\xi \frac{\operatorname{th} \frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}{2T}}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2(T)}}. \quad (34.37)$$

В точке фазового перехода, т. е. при температуре  $T = T_c$ , щель  $\Delta(T)$  обращается в нуль и условие (34.37), как и должно быть, переходит в условие (33.15), из которого определяется температура перехода  $T_c$ .

### § 35. Вывод уравнений теории сверхпроводимости в фононной модели

Остановимся на выводе уравнений теории сверхпроводимости в модели, в которой электроны взаимодействуют друг с другом через посредство электрон-фононного взаимодействия. Разумеется, такая модель страдает тем же недостатком, что и рассмотренная выше схема, поскольку в ней не учитываются действующие в металле кулоновские силы. Тем не менее она, конечно, имеет более непосредственный физический смысл, чем модель с четырехфермионным взаимодействием, хотя в смысле получения практических результатов последняя несколько удобней. Основное преимущество фононной модели состоит, прежде всего, в том, что гамильтониан электрон-фононного взаимодействия (32.1) является градиентно-инвариантным с самого начала в отличие от схемы с гамильтонианом четырехфермионного взаимодействия (32.2), являющейся градиентно-инвариантной только приближенно в силу соотношения  $T_c \ll \omega_D$ . Что же касается этого соотношения, то оно выполняется, вообще говоря, лишь в приближении слабой связи<sup>1)</sup>. Ниже мы покажем, что ограничение слабой связи не является существенным в теории сверхпроводимости и что фактическим малым параметром рассматриваемой теории служит только отношение  $\omega_D/\varepsilon_F \ll 1$  ( $\omega_D/\varepsilon_F \sim u/v \sim 10^{-2} \div 10^{-3}$ , где  $u$  — скорость звука в теле, а  $v$  — скорость электронов на поверхности Ферми)<sup>2)</sup>. Мы ограничимся выводом уравнений при абсолютном нуле температур.

Итак, пусть гамильтониан взаимодействия системы электронов и фононов имеет вид

$$H_{int}(x) = g (\tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x)) \tilde{\varphi}(x).$$

<sup>1)</sup> Для реальных сверхпроводников, однако, всегда имеет место  $T_c \ll \omega_D$ .

<sup>2)</sup> Электрон-фононное взаимодействие в теории сверхпроводимости изучалось в [57, 58].

Если система находится в сверхпроводящем состоянии, то, помимо функции Грина  $G$ , ее свойства характеризуются еще двумя функциями  $F$  и  $F^+$ . Поэтому вместо обычного уравнения Дайсона (§ 21) необходимо изучать, вообще говоря, три уравнения, связывающих между собой три функции:

$$\begin{aligned}\hat{G}_{\alpha\beta}(x, x') &= -i \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle \equiv \delta_{\alpha\beta} G(x - x'), \\ \hat{F}_{\alpha\beta}^+(x, x') &= \langle T(\tilde{\psi}_\alpha^+(x), \tilde{\psi}_\beta^+(x')) \rangle = I_{\alpha\beta} F^+(x - x'), \\ \hat{F}_{\alpha\beta}(x, x') &= \langle T(\tilde{\psi}_\alpha(x), \tilde{\psi}_\beta(x')) \rangle = -I_{\alpha\beta} F(x - x').\end{aligned}\quad (35.1)$$

Что касается уравнения для фононной функции Грина

$$D(x_1 - x_2) = -i \langle T(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \rangle,$$

то, как мы увидим, оно останется почти без изменений.

Уравнение для функции Грина можно получить из диаграммной техники теории возмущений. Подобно тому как это имело место для системы бозе-частиц ниже точки «бозе-конденсации», совокупность возможных диаграмм теории возмущений расширяется за счет появления в них линий, соответствующих функциям  $F$  и  $F^+$ . Условимся изображать на диаграмме функции  $G$ ,  $F^+$  и  $F$  жирными линиями с двумя стрелками, направление которых в точках  $x$  и  $x'$  выбрано

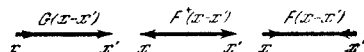


Рис. 91.

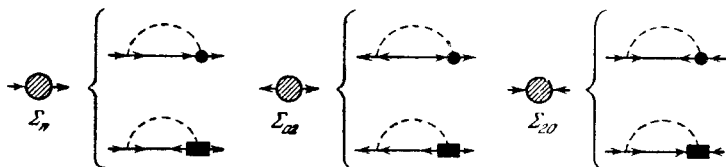


Рис. 92.

в соответствии с (35.1) так, чтобы оператору  $\tilde{\psi}$  в данной точке отвечала стрелка, направленная от точки, тогда как оператору  $\tilde{\psi}^+$  — стрелка в направлении к точке. Все три линии показаны на рис. 91. Тогда легко видеть, что в полной аналогии с газом бозе-частиц имеются три типа неприводимых собственно энергетических частей, которые мы обозначим через  $\Sigma_{11}(x, x')$ ,  $\Sigma_{20}(x, x')$  и  $\Sigma_{02}(x, x')$ . На рис. 92,

где изображены диаграммы для величин  $\Sigma_{ik}$ , пунктир соответствует фоновной  $D$ -функции, точка — простой вершине, или множителю  $g$ , а жирная точка или прямоугольник означает модификацию простой вершины за счет различных электрон-фоонных взаимодействий.

Перейдем к компонентам Фурье для всех величин и рассмотрим любую из собственно энергетических диаграмм, скажем  $\Sigma_{11}(p)$ . Нетрудно увидеть, что с точностью до членов порядка  $\omega_D/\varepsilon_F$  можно пренебречь всеми фоонными поправками к трехвершинной части в простейшей диаграмме для  $\Sigma_{11}(p)$  рис. 93. Действительно, как мы показали в § 21,

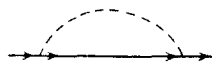


Рис. 93.

в соответствующем подынтегральном выражении существенны значения  $D$ -функции (и фоновной вершины) для фоонов с импульсами порядка фермиевского импульса электронов. По этой причине произведенная в § 21 оценка поправок

к фоновной вершине, происходящих от электрон-фоонных взаимодействий, остается справедливой и в рассматриваемом случае, поскольку величина таких поправок определяется значениями гриновских функций в области энергий и импульсов, удаленной от поверхности Ферми. Между тем совершенно ясно, что компоненты Фурье электронной функции Грина для металла в сверхпроводящем состоянии отличаются от своих значений в нормальном металле лишь в узкой области вблизи поверхности Ферми с энергиями возбуждений не большими, чем порядок максимальных фоонных энергий, т. е. порядка  $\omega_D$ . В равной мере специфические для сверхпроводящего состояния функции  $F^+(p)$  и  $F(p)$  также отличны от нуля только в указанной области. На рис. 92 были изображены по два возможных типа собственно энергетической диаграммы для каждой из частей  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{20}$  и  $\Sigma_{02}$  в зависимости от выбора той или иной модификации фоновной вершины. На основании только что сказанного мы можем сразу же опустить диаграммы второго типа, где фоновная вершина отмечена жирным прямоугольником, поскольку диаграммы такого рода могут быть построены только с использованием сверхпроводящих функций Грина  $F$  и  $F^+$ .

Таким образом, в качестве фоновной вершины в неприводимых частях  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{20}$  и  $\Sigma_{02}$  можно ограничиться нулевым приближением теории возмущений.

По тем же причинам останется неизменной фоновая функция Грина  $D(x_1 - x_2)$ , для компонент Фурье которой можно непосредственно пользоваться выражением (21.14). Структура уравнений для функций  $G$  и  $F^+$  изображена на рис. 94 и понятна без дальнейших пояснений. Приведем эти

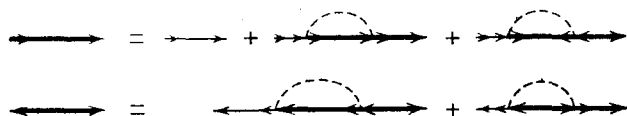


Рис. 94.

уравнения в аналитическом виде. В координатном представлении

$$\begin{aligned}
 & \left\{ i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} G(x - x') = \\
 & = \delta(x - x') + g^2 i \int G(x - z) D(x - z) G(z - x') d^4 z + \\
 & \quad + g^2 i \int F(x - z) D(x - z) F^+(z - x') d^4 z, \\
 & \left\{ -i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} F^+(x - x') = \\
 & = g^2 i \int G(z - x) D(z - x) F^+(z - x') d^4 z + \\
 & \quad + g^2 i \int F^+(x - z) D(x - z) G(z - x') d^4 z. \quad (35.2)
 \end{aligned}$$

Электромагнитное поле может быть включено в эти уравнения обычным образом, подобно тому как это было сделано выше, в § 34. Подчеркнем, что получающаяся система является полностью градиентно-инвариантной в отличие от системы (34.13), в которой градиентная инвариантность была только приближенной с точностью до членов  $T_c/\omega_D$ . К сожалению, как это видно из (35.2), эта система имеет гораздо более сложный вид с интегральным нелинейным членом, что делает ее менее удобной для решения в координатном представлении, как это требуется в ряде задач, в которых существует неоднородное магнитное поле. Получающиеся же практические результаты, как правило, эквивалентны для обеих моделей.

В отсутствие магнитного поля для однородной задачи, переходя в уравнениях (35.2) к импульсному представлению, легко получить уравнения для компонент Фурье всех величин

$$\begin{aligned} (\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_\omega) G(p) - g^2 i \bar{F}_\omega F^+(p) &= 1, \\ (-\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_{-\omega}) F^+(p) - g^2 i \bar{F}_\omega^+ G(p) &= 0. \end{aligned} \quad (35.3)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \bar{G}_\omega &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int G(p-k) D(k) d^4k, \\ \bar{F}_\omega &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int F(p-k) D(k) d^4k, \\ \bar{F}_\omega^+ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int F^+(p-k) D(k) d^4k, \\ \bar{G}_{-\omega} &= \bar{G}_\omega(-p) \end{aligned} \quad (35.4)$$

Эта система совершенно аналогична системе (34.15) уравнений, полученной выше. Единственное отличие состоит в том, что в то время как в уравнениях (34.15) величины  $\bar{G}_\omega$  и  $\bar{F}_\omega$ ,  $\bar{F}_\omega^+$  суть постоянные в области  $|\nu(|\mathbf{p}| - p_0)| < \omega_D$  около поверхности Ферми и равны нулю вне этой области, величины (35.4) суть функции, вообще говоря,  $\omega$  и  $p$ , плавно убывающие до нуля при  $\omega$ ,  $|\nu(|\mathbf{p}| - p_0)| \gg \omega_D$ .

Выразим функции  $G$  и  $F^+$  через  $\bar{G}_\omega$  и  $\bar{F}_\omega$ ,  $\bar{F}_\omega^+$ :

$$\begin{aligned} G(p) &= \frac{\omega - g^2 i \bar{G}_\omega + \xi}{[\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_\omega][\omega + \xi + g^2 i \bar{G}_{-\omega}] - g^4 |\bar{F}_\omega^+|^2}, \\ F^+(p) &= \frac{-ig^2 \bar{F}_\omega^+}{[\omega - \xi - g^2 i \bar{G}_\omega][\omega + \xi + g^2 i \bar{G}_{-\omega}] - g^4 |\bar{F}_\omega^+|^2}. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в определения  $\bar{G}_\omega$  и  $\bar{F}_\omega$  (35.4) мы получим два интегральных уравнения для этих величин вместо одного уравнения (21.16) в § 21. Решение этих уравнений было получено Элиашбергом [60]. Не останавливаясь на вычислениях, приведем окончательный результат. Оказывается, что при малых энергиях спектр возбуждений имеет вид

$$\epsilon(p) = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2},$$

где, однако,  $\xi = v_1(p - p_0)$  содержит, в согласии с (21.31), перенормированную скорость на поверхности Ферми  $v_1$ . Щель при абсолютном нуле связана с  $\overline{F}_{\omega=0}^+$  соотношением

$$\Delta = g^2 \frac{v_1}{v_0} |\overline{F}_{\omega=0}^+|.$$

В пределе слабого взаимодействия  $g^2 \ll 1$  эти формулы совпадают с результатами предыдущего параграфа.

### § 36. Термодинамика сверхпроводников

**1. Зависимость щели в спектре от температуры.** Исследуем более подробно зависимость величины щели от температуры. Рассмотрим сначала случай низких температур  $T \ll T_c$  и произведем соответствующее разложение условия (34.37). Имеем тождественно:

$$\frac{1}{\zeta} = \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{V\xi^2 + \Delta^2} - 2 \int_0^{\infty} \frac{d\xi}{V\xi^2 + \Delta^2} \cdot \frac{1}{\exp(V\xi^2 + \Delta^2/T) + 1}, \quad (36.1)$$

где  $\zeta = |\lambda| \frac{mp_0}{2\pi^2}$  (второй интеграл является сходящимся, поэтому верхний предел интегрирования в нем можно положить равным бесконечности). Разлагая по экспоненте под знаком второго интеграла, переходя к интегрированию по  $e$  и используя определение соответствующих функций Бесселя, мы можем представить уравнение (36.1) в виде ряда по функциям Бесселя нулевого порядка:

$$\ln \frac{\Delta_0}{\Delta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0\left(\frac{n\Delta}{T}\right) \quad (36.2)$$

(здесь  $\Delta_0 \equiv \Delta(T=0)$ ).

При низких температурах  $\Delta \gg T$ , воспользовавшись асимптотическим разложением функций Бесселя, получаем:

$$\Delta = \Delta_0 - \sqrt{2\pi T \Delta_0} \left(1 - \frac{T}{8\Delta_0}\right) e^{-\frac{\Delta_0}{T}}. \quad (36.3)$$

Поведение щели при температурах, близких к температуре перехода  $T_c$ , удобнее всего определить, исходя из соотно-

шения (34.36). Вблизи  $T_c$  величина щели мала, поэтому в (34.36) можно произвести разложение по степеням  $\Delta^2/T^2$

$$\frac{1}{\zeta} = T \sum_n \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \left\{ \frac{1}{\omega^2 + \xi^2} - \frac{\Delta^2}{(\omega^2 + \xi^2)^2} + \frac{\Delta^4}{(\omega^2 + \xi^2)^3} + \dots \right\}.$$

Меняя в сходящихся членах правой части порядок суммирования по частотам и интегрирования по  $\xi$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta} = & \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi} \operatorname{th} \frac{\xi}{2T} - \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} + \\ & + \frac{3}{4} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} + \dots \quad (36.4) \end{aligned}$$

Фигурирующие здесь ряды выражаются через  $\zeta$ -функции Римана

$$\sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} = \frac{2^z - 1}{2^z} \zeta(z). \quad (36.5)$$

Подставляя это в предыдущие выражения, найдем:

$$\begin{aligned} \ln \frac{T}{T_c} = & - \frac{7\zeta(3)}{8} \frac{\Delta^2}{(\pi T)^2} + \\ & + \frac{93\zeta(5)}{128} \frac{\Delta^4}{(\pi T)^4} + \dots \end{aligned}$$

В первом приближении для величины щели вблизи  $T_c$  получим:

$$\Delta = \pi T_c \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \simeq 3,06 T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}. \quad (36.6)$$

На рис. 95 приведен график, изображающий зависимость щели от температуры во всем интервале температур.

**2. Термодинамика сверхпроводника.** Для нахождения различных термодинамических величин воспользуемся выведенным ранее соотношением для производной от термодинамического потенциала по константе взаимодействия:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta \lambda} = \frac{1}{\lambda} \langle H_{int} \rangle.$$



В нашем случае  $H_{int}$  дается выражением (32.3). Оставляя в среднем члены, которые отличны от нуля только в сверхпроводящей фазе, получим, поскольку  $\lambda < 0$ ,

$$\frac{\delta\Omega}{\delta|\lambda|} = -\frac{1}{\lambda^2} |\Delta|^2.$$

Связь между  $\frac{1}{|\lambda|}$  и  $\Delta$  при заданной температуре определяется соотношением (36.1). Поэтому разность между значениями потенциала  $\Omega$  для металла в сверхпроводящей и нормальной фазах равна

$$\Omega_s - \Omega_n = \int_0^\Delta \left( \frac{d}{d\Delta} \frac{1}{|\lambda|} \right) \Delta^2 d\Delta.$$

Будучи выражена в соответствующих переменных, эта добавка, согласно общим положениям статистической физики, одна и та же для всех термодинамических потенциалов. Воспользовавшись соотношением (36.2), согласно которому

$$\frac{1}{|\lambda|} = \frac{mp_0}{2\pi^2} \left\{ \ln \frac{2\omega_D}{\Delta} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0 \left( \frac{n\Delta}{T} \right) \right\},$$

и используя известную формулу из теории бесселевых функций  $K'_0(x) = -K_1(x)$ , получим:

$$F_s - F_n = - \left( \frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \left\{ \frac{\Delta^2}{2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{T^2}{n^2} \int_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x) x^2 dx \right\}.$$

При низких температурах  $\Delta/T \gg 1$ . При этом  $\int_0^{\frac{n\Delta}{T}} K_1(x) x^2 dx = 2 - \int_{\frac{n\Delta}{T}}^{\infty} K_1(x) x^2 dx$ . Последний интеграл

нужно вычислить лишь для  $n=1$ , воспользовавшись для этого асимптотическим разложением функции  $K_1(x)$ .

Остающийся ряд по  $n$  легко суммируется. В результате находим:

$$F_s - F_n = \frac{mp_0 T^2}{6} - \frac{mp_0}{2\pi^2} \left[ \frac{\Delta^2}{2} + \sqrt{2\pi\Delta_0^3 T} \left( 1 + \frac{15}{8} \frac{T}{\Delta_0} \right) e^{-\Delta_0/T} \right]. \quad (36.7)$$

Первый член в правой части равен с обратным знаком основному члену в разложении свободной энергии нормального металла по степеням  $T$ . Как известно, этот член приводит к линейному закону для электронной части теплоемкости в нормальной фазе:

$$C_n = \frac{mp_0 T}{3}.$$

Подставляя (36.3), находим что энтропия в сверхпроводящей фазе при низких температурах равна

$$S_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^3}{T}} e^{-\frac{\Delta_0}{T}},$$

а теплоемкость равна

$$C_s = \frac{mp_0}{\pi^2} \sqrt{\frac{2\pi\Delta_0^5}{T^3}} e^{-\frac{\Delta_0}{T}}.$$

Используя (34.23), получаем отсюда для отношения теплоемкостей сверхпроводящей фазы в области  $T \ll T_c$  и нормальной фазы при  $T = T_c$ :

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = \frac{3}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\Delta_0}{T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right). \quad (36.8)$$

С целью получения асимптотических формул в области температур вблизи  $T_c$  будем исходить из разложения (36.4)

$$\delta \frac{1}{|\lambda|} = - \left( \frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \frac{7\zeta(3)}{(2\pi T)^2} \Delta \delta \Delta.$$

Для величины разности свободных энергий с помощью (36.6) находим:

$$\begin{aligned} F_s - F_n &= - \left( \frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \frac{7\zeta(3)}{16(\pi T)^2} \Delta^4 = \\ &= - \frac{2mp_0 T_c^2}{7\zeta(3)} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right)^2. \end{aligned} \quad (36.9)$$

Отсюда энтропия в сверхпроводящей фазе равна

$$S_s = - \frac{4mp_0 T_c}{7\zeta(3)} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) + S_n.$$

Дифференцируя второй раз и оставляя главные члены, получаем следующее выражение для теплоемкости сверхпроводника в точке перехода:

$$C_s(T_c) = C_n(T_c) + \frac{4mp_0}{7\zeta(3)} T_c.$$

Таким образом, теплоемкость металла в точке фазового перехода в сверхпроводящее состояние испытывает скачок, равный  $\frac{4mp_0 T_c}{7\zeta(3)}$ . Учитывая члены более высокого порядка по  $T_c - T$  в разложении (36.9), найдем отношение теплоемкости  $C_s(T)$  к теплоемкости в нормальной фазе  $C_n(T_c)$  вблизи  $T_c$ :

$$\frac{C_s(T)}{C_n(T_c)} = 2,43 + 3,77 \left( \frac{T}{T_c} - 1 \right).$$

Это поведение электронной части теплоемкости металла вблизи  $T_c$  изображено на рис. 96.

Важной термодинамической величиной в теории сверхпроводимости является так называемое критическое магнитное поле  $H_c$ . При заданной температуре  $T < T_c$  металл в магнитном поле может находиться как в сверхпроводящем, так и в нормальном состояниях.

Если сверхпроводник помещен в магнитное поле, то экранирующие это поле поверхностные токи создают магнитный момент, который взаимодействует с внешним полем. Добавочная энергия, возникающая от этого взаимодействия, есть  $-\frac{HM}{2}$  (на единицу объема). Рассмотрим

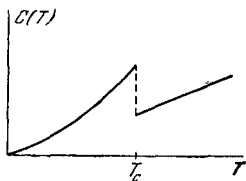


Рис. 96.

сверхпроводящий цилиндр, помещенный в поле, параллельное оси цилиндра. Вычисляя величину поверхностного тока из условия, чтобы магнитное поле равнялось нулю в толще сверхпроводника, и определяя создаваемый этими токами магнитный момент, найдем, что дополнительная магнитная энергия есть  $\frac{H^2}{8\pi}$ , т. е. свободная энергия сверхпроводника

в магнитном поле есть  $F_{sH} = F_s + \frac{H^2}{8\pi}$ . Поэтому с увеличением магнитного поля при заданной температуре происходит переход из сверхпроводящей фазы в нормальную;

этот переход есть переход первого рода. Значение критического поля равно

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = F_n - F_s.$$

Ограничимся опять только предельными случаями. Для случая низких температур ( $T \ll T_c$ ) из (36.3) и (36.7), пренебрегая экспоненциально малыми членами, получаем:

$$H_c(0) = \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}} \Delta_0 = T_c \frac{\pi}{\gamma} \sqrt{\frac{2mp_0}{\pi}} \quad (36.10)$$

и

$$H_c(T) = H_c(0) \left( 1 - \frac{\gamma^2}{3} \frac{T^2}{T_c^2} \right). \quad (36.11)$$

Воспользовавшись формулой (36.9) и выражая  $H_c(T)$  вблизи точки перехода через  $H_c(0)$  с помощью (36.10), находим температурную зависимость  $H_c(T)$  в области температур вблизи  $T_c$ :

$$\begin{aligned} H_c(T) &= H_c(0) \gamma \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}} \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right) \simeq \\ &\simeq 1,73 H_c(0) \left( 1 - \frac{T}{T_c} \right). \end{aligned} \quad (36.12)$$

Заметим, что экспериментальные данные обычно соответствуют зависимости

$$H_c(T) = H_c(0) \left( 1 - \frac{T^2}{T_c^2} \right). \quad (36.13)$$

В обоих предельных случаях теоретические формулы (36.11) и (36.12) и экспериментальная зависимость (36.13) довольно хорошо совпадают (см. [56], [61]).

### § 37. Сверхпроводник в слабом электромагнитном поле

**1. Постоянное слабое магнитное поле.** Обратимся к вопросу об электромагнитных свойствах сверхпроводников. В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением поведения сверхпроводников в достаточно слабых полях, величины которых малы по сравнению с величиной критиче-

ского магнитного поля. Предположим, что сверхпроводник с плоской поверхностью занимает, как это изображено на рис. 97, полупространство  $z < 0$  и помещен в постоянное магнитное поле, направленное параллельно его поверхности. Введем векторный потенциал  $A$

$$H = \text{rot } A.$$

В пустоте  $H = \text{const}$  и векторный потенциал можно взять, например, в виде

$$A_y = -Hz, \quad A_x = A_z = 0. \quad (37.1)$$

Под действием магнитного поля в сверхпроводнике возникает ток; распределение поля в сверхпроводнике подчиняется уравнению Максвелла:

$$\Delta A = -4\pi j. \quad (37.2)$$

Поскольку плотность тока в свою очередь обязана наличию поля, то в линейном по полю приближении его величина пропорциональна величине  $A$ . Из соображений однородности в бесконечном сверхпроводнике связь плотности тока с полем должна иметь в общем случае вид

$$j(x) = - \int Q(x-y) A(y) d^4y \quad (37.3)$$

или в компонентах Фурье

$$j(k) = - Q(k) A(k). \quad (37.3')$$

Мы не будем в дальнейшем подробно останавливаться на решении самой электромагнитной задачи для полупространства, определяемой уравнениями (37.2) и (37.3), а ограничимся выводом выражения для ядра  $Q(x-y)$ , имея в виду продемонстрировать применение методов квантовой теории поля к этому случаю.

Величина плотности тока  $j$  в данной точке есть, как обычно, термодинамическое среднее от известного квантовомеханического выражения для оператора тока  $\hat{j}(x)$  во втором квантовании:

$$j(x) = \frac{ie}{2m} (\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r' \rightarrow r} \tilde{\psi}(x') \tilde{\psi}(x) - \frac{e^2 A(x)}{m} \tilde{\psi}(x) \tilde{\psi}(x). \quad (37.4)$$

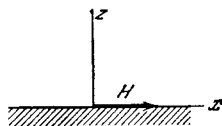


Рис. 97.

Поэтому плотность тока  $j(x)$  непосредственным образом может быть записана через гриновскую функцию системы

$$j(x) = 2 \left\{ \frac{ie}{2m} (\nabla_{r'} - \nabla_r) \mathfrak{G}(x, x') - \frac{e^2 A(x)}{m} \mathfrak{G}(x, x') \right\}_{r' \rightarrow r, \tau' = \tau + 0}. \quad (37.5)$$

Приступим к отысканию гриновской функции, точнее, добавки к гриновской функции, первого порядка по величине поля. В постоянном магнитном поле все функции Грина  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{F}$ ,  $\mathfrak{F}^+$  зависят только от разности «временных» координат  $\tau = \tau_1 - \tau_2$ . Перейдем к компонентам Фурье  $\mathfrak{G}_\omega$  и  $\mathfrak{F}_\omega$ . Система уравнений для этих величин в постоянном магнитном поле выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r} - ieA(r) \right)^2 + \mu \right\} \mathfrak{G}_\omega(r, r') + \\ + \Delta(r) \mathfrak{F}_\omega^+(r, r') = \delta(r - r'), \\ \left\{ -i\omega + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial r} + ieA(r) \right)^2 + \mu \right\} \mathfrak{F}_\omega^+(r, r') - \\ - \Delta^*(r) \mathfrak{G}_\omega(r, r') = 0. \end{aligned} \quad (37.6)$$

Напишем функции Грина  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{F}^+$  в виде

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 + \mathfrak{G}^{(1)}; \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0 + \mathfrak{F}^{(1)}; \quad \mathfrak{F}^+ = \mathfrak{F}_0^+ + \mathfrak{F}^{+(1)},$$

где  $\mathfrak{G}_0$ ,  $\mathfrak{F}_0$ ,  $\mathfrak{F}_0^+$  суть функции Грина в отсутствие поля, а  $\mathfrak{G}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{F}^{(1)}$ ,  $\mathfrak{F}^{+(1)}$  — добавки, линейные по величине поля. Линеаризуя уравнение (37.6), получим:

$$\begin{aligned} \left\{ i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathfrak{G}_\omega^{(1)}(r, r') + \Delta_0 \mathfrak{F}_\omega^{+(1)}(r, r') = \\ = -\Delta^{(1)}(r) \mathfrak{F}_{0\omega}^+(r - r') + \frac{ie}{2m} (\nabla A + A \nabla) \mathfrak{G}_{0\omega}(r - r'), \\ \left\{ -i\omega + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right\} \mathfrak{F}_\omega^{+(1)}(r, r') - \Delta_0 \mathfrak{G}_\omega^{(1)}(r, r') = \\ = \Delta^{*(1)}(r) \mathfrak{G}_{0\omega}(r - r') - \frac{ie}{2m} (\nabla A + A \nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^+(r - r'). \end{aligned} \quad (37.7)$$

Из этих уравнений очень легко выразить  $\mathfrak{G}_\omega^{(1)}(r, r')$  и  $\mathfrak{F}_\omega^{+(1)}(r, r')$  через величины, стоящие в правой части (37.7). Для этого удобно воспользоваться выражением (34.32) оператора, обратного оператору левой части уравнения (37.7).

Однако прежде чем написать соответствующий результат для  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , рассмотрим более подробно структуру уравнений (37.7).

Система (37.6), а следовательно, и (37.7) градиентно-инвариантны, т. е. инвариантны относительно преобразований (34.26) и (34.27). Поэтому при вычислении тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , в линейном приближении равного

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{ie}{m} T \sum_{\omega} (\nabla_{\mathbf{r}'} - \nabla_{\mathbf{r}})_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \frac{e^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}) N}{m}, \quad (37.8)$$

окончательный результат может зависеть только от поперечной части вектор-потенциала  $\mathbf{A}$ . Иными словами, добавление к  $\mathbf{A}$  градиента произвольного скаляра  $\varphi$ :  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}$  не может изменить величины тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ .

Что же касается  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ,  $\mathfrak{F}_{\omega}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , то они, согласно (34.27), отнюдь не инвариантны относительно такого изменения вектор-потенциала. То же самое относится и к величинам  $\Delta^{(1)}(\mathbf{r})$ ,  $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$ , фигурирующим в правой части (37.7) и которые сами должны определяться из интегрального уравнения:

$$\Delta^{*(1)}(\mathbf{r}) = |\lambda| T \sum_{\omega} \mathfrak{F}_{\omega}^{+(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

При произвольном  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$   $\Delta(\mathbf{r})$  есть, вообще говоря, некоторая неизвестная функция потенциала  $\mathbf{A}$ . Можно тем не менее утверждать, что в линейном по полю приближении в силу однородности задачи функция  $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$ , будучи скаляром, зависит только от величины  $\text{div } \mathbf{A}$ . Благодаря этому обстоятельству, если выбрать калибровку вектор-потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  так, чтобы

$$\text{div } \mathbf{A} = 0,$$

то оказывается возможным существенно упростить задачу, поскольку при таком выборе  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  функция  $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$  тождественно обращается в нуль. Получаемый ниже результат относится только к чисто «поперечному» вектор-потенциалу  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

Изложенный прием с обращением  $\Delta^{*(1)}$ ,  $\Delta^{(1)}$  в нуль удастся обобщить так, чтобы им можно было пользоваться в задачах,

не обладающих пространственной однородностью в отсутствие поля (скажем, сверхпроводник конечных размеров в магнитном поле). В этих случаях образовать скаляр можно из поля  $A(\mathbf{r})$  и вектора  $\mathbf{r}$  или какого-либо другого вектора, характеризующего задачу. Поэтому в общем случае неоднородной задачи в уравнениях (37.7) (теперь в этих уравнениях под  $\mathfrak{G}_0$  и  $\mathfrak{F}_0$  следует подразумевать гриновские функции рассматриваемого тела с соответствующими граничными условиями)  $\Delta^{(1)}(\mathbf{r})$ ,  $\Delta^{*(1)}(\mathbf{r})$  зависят как от продольной, так и поперечной составляющих вектора  $A(\mathbf{r})$ . Всегда можно, однако, так выбрать продольную часть  $A_{\text{прод}} = \text{grad } \varphi$ , чтобы  $\Delta^{(1)}$ ,  $\Delta^{*(1)}$  обратились в нуль. Что же касается функции  $\varphi$ , для которой это условие выполняется, то она может быть найдена из условия  $\text{div } \mathbf{j} = 0$ , т. е. из условия сохранения заряда.

Вернемся теперь снова к уравнениям (37.7) для бесконечного сверхпроводника. Полагая  $\Delta^{(1)}(\mathbf{r}) = 0$  и пользуясь (34.32), получим для линейной по полю добавки  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  к функции Грина следующее выражение:

$$\mathfrak{G}_{\omega}^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{ie}{m} \int \{ \mathfrak{G}_{0\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{l}) (A(\mathbf{l}) \nabla) \mathfrak{G}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r}') + \\ + \mathfrak{F}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r}) (A(\mathbf{l}) \nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^+(\mathbf{r}' - \mathbf{l}) \} d\mathbf{l}. \quad (37.9)$$

В этой формуле мы уже воспользовались условием  $\text{div } A = 0$ , вследствие чего можно считать, что дифференцирование в скобке  $(A(\mathbf{l}) \nabla)$  относится только к функциям  $\mathfrak{G}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r}')$  и  $\mathfrak{F}_{0\omega}^+(\mathbf{r}' - \mathbf{l})$ . Плотность тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ , согласно (37.8), равна

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{m^2} T \sum_{\omega} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'} ) \int \{ \mathfrak{G}_{0\omega}(\mathbf{r} - \mathbf{l}) (A(\mathbf{l}) \nabla) \mathfrak{G}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r}') + \\ + \mathfrak{F}_{0\omega}(\mathbf{l} - \mathbf{r}) (A(\mathbf{l}) \nabla) \mathfrak{F}_{0\omega}^+(\mathbf{r}' - \mathbf{l}) \} \Big|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} d\mathbf{l} - \frac{Ne^2}{m} A(\mathbf{r}). \quad (37.10)$$

Удобно перейти здесь к фурье-представлению, введя обычным образом компоненты Фурье для плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  и потенциала  $A(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathbf{j}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}; \quad A(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}.$$



Уравнение для связи компонент  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  имеет следующий вид:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = -\frac{2e^2 T}{(2\pi)^3 m^2} \sum_{\omega} \int \mathbf{p} (\mathbf{p} \mathbf{A}(\mathbf{k})) \{ \mathfrak{G}_{\omega}(\mathbf{p}_+) \mathfrak{G}_{\omega}(\mathbf{p}_-) + \\ + \mathfrak{F}_{\omega}(\mathbf{p}_+) \mathfrak{F}_{\omega}^+(\mathbf{p}_-) \} d\mathbf{p} - \frac{Ne^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{k}), \quad (37.11)$$

где  $\mathbf{p}_{\pm} = \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}$ . Подчеркнем еще раз, что наш результат относится только к чисто поперечной калибровке векторного потенциала. (Можно, однако, показать, что при произвольной калибровке полученные формулы остаются в силе, т. е. продольная часть выпадает из конечного результата.)

Поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  и ток  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  в сверхпроводнике меняются на расстояниях порядка глубины проникновения  $\delta$ , имеющей обычно порядок  $\sim 10^{-5}$  (т. е. на расстояниях, гораздо больших атомных расстояний). Поэтому в (37.11) существенны только компоненты  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$  в области величин  $k \sim \frac{1}{\delta} \ll p_0$ . Мы увидим ниже, что интегрирование в ядре (37.11) происходит в основном вблизи поверхности Ферми по узкой области значений  $|\mathbf{p}|$  порядка  $|\mathbf{p}| - p_0 \sim |\mathbf{k}|$ . Далее, в (37.11) фигурируют только два вектора  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ , причем  $(\mathbf{k} \mathbf{A}) = 0$ . Выбирая вектор  $\mathbf{k}$  в качестве полярной оси координат для переменной интегрирования  $\mathbf{p}$  и производя усреднения по углам в азимутальной плоскости, сразу же находим, что вектор  $\mathbf{j}(\mathbf{k})$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ . На основании вышеизложенного, подставляя для функций  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{F}$  их выражения (34.35), получим:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}) = -\frac{Ne^2}{m} \bar{Q}(\mathbf{k}) \mathbf{A}(\mathbf{k}),$$

где

$$\bar{Q}(\mathbf{k}) = 1 + \frac{3T}{4} \sum_{\omega} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \frac{(i\omega + \xi_+)(i\omega + \xi_-) + \Delta^2}{[\omega^2 + \xi_+^2 + \Delta^2][\omega^2 + \xi_-^2 + \Delta^2]} \quad (37.12)$$

(мы воспользовались тем, что  $\frac{p_0^3}{3\pi^2} = N$ ). При малых  $k$

$$\xi_{\pm} = \xi \pm \frac{(\mathbf{v} \mathbf{k})}{2}.$$

Для дальнейших вычислений надо иметь в виду, что подынтегральное выражение в правой части (37.12) при больших  $\omega$  и  $\xi$  ведет себя, как  $\omega^{-2}$  при  $\omega \gg \xi$  и как  $\xi^{-2}$  при  $\xi \gg \omega$ . Поэтому, строго говоря, интеграл по  $\xi$  и сумма по частотам  $\omega$  расходятся. Чтобы понять, в чем дело, рассмотрим особенности такого выражения для нормального металла (т. е. при  $\Delta = 0$ )

$$\frac{3}{4} T \sum_{\omega} \int d\xi \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \frac{1}{(i\omega - \xi_+)(i\omega - \xi_-)}. \quad (37.13)$$

Отметим, прежде всего, что в этом интеграле чрезвычайно существен порядок, в котором производится суммирование по частотам и интегрирование по  $\xi$ . В самом деле, при интегрировании сначала по  $\xi$  полюсы подынтегрального выражения при любом знаке  $\omega$  лежат по одну сторону от вещественной оси, вследствие чего результат оказывается равным нулю. Просуммируем теперь в первую очередь по частотам  $\omega = (2n + 1)\pi T$ . Легко проверить, что в результате суммирования этого простого ряда возникает следующее выражение:

$$\frac{3}{8} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta \int \frac{d\xi}{(v\mathbf{k})} \left[ \text{th} \frac{\xi_-}{2T} - \text{th} \frac{\xi_+}{2T} \right] = -1. \quad (37.14)$$

Причина такой неоднозначности от изменения порядка интегрирования и суммирования кроется в формальной расходимости всего выражения. Как видно, однако, суть дела состоит в том, что при суммировании в первую очередь по частотам оказывается, что результат суммирования отличен от нуля только в очень узкой области энергий вблизи поверхности Ферми (эта область, как следует из (37.14), имеет ширину  $\sim (v\mathbf{k})$ ). В этой области интеграл по импульсам оказывается быстро сходящимся, и только поэтому выражение для энергии возбуждений, отсчитываемой от поверхности

Ферми, можно приближенно написать в виде  $\xi = \frac{p^2 - p_0^2}{2m} \simeq v(|\mathbf{p}| - p_0)$ . По этой причине в интегралах рассматриваемого типа всегда надо сначала суммировать по частотам, а уже потом интегрировать по  $\xi$ , поскольку в противном случае интегрирование по  $\xi$  захватывает область  $\|\mathbf{p}| - p_0| \sim p_0$ , где

проведенное нами разложение всех величин около поверхности Ферми становится непригодным.

Можно, однако, избежать необходимости производить довольно сложное суммирование по частотам в (37.12). Для этого поступим следующим образом. В подынтегральном выражении (37.12) прибавим и вычтем соответствующее выражение (37.13) для нормального металла. Тогда интеграл и сумма по частотам от разности подынтегральных выражений быстро сходятся, благодаря чему в этом члене можно менять порядок суммирования и интегрирования. Соответствующее выражение для нормального металла было вычислено в (37.14), оно сокращает единицу в (37.12). Интегрируя по  $\xi$ , получим:

$$\bar{Q}(k) = \frac{3\pi T}{4} \sum_{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \mu^2) d\mu}{\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}} \cdot \frac{\Delta^2}{\omega^2 + \Delta^2 + \frac{1}{4} v^2 |k|^2 \mu^2}. \quad (37.15)$$

Дальнейшее преобразование этого ядра затруднительно, если не сделать тех или иных предположений о величине  $|k|$ . Из структуры подынтегрального выражения видно, что играет роль только соотношение между величиной  $v|k|$  и температурой перехода  $T_c$ . В самом деле, при  $T \ll T_c$  щель  $\Delta_0$  имеет порядок  $T_c$ ; вблизи  $T_c$ , т. е. при  $|T - T_c| \ll T_c$ , величина щели мала, но зато  $\omega = (2n + 1)\pi T \sim T_c$ . Величина размерности длины  $\xi_0 \sim \frac{v}{T_c}$  играет роль характерного параметра современной теории сверхпроводимости, это есть радиус корреляции связанных электронов. Глубина проникновения  $\delta$  может быть как больше, так и меньше  $\xi_0$ . В первом случае существенные  $|k| \sim \frac{1}{8}$  удовлетворяют неравенству  $v|k| \ll T_c$ , тогда как второй случай описывается обратным неравенством  $v|k| \gg T_c$ .

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть  $v|k| \ll T_c$ . В выражении (37.15) оставим только первый не исчезающий член разложения по  $v|k|$ :

$$\bar{Q}(k) = \frac{3\pi}{4} \Delta^2 T \sum_{\omega} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \mu^2) d\mu}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}} = \pi T \Delta^2 \sum_{\omega} \frac{1}{(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2}}. \quad (37.16)$$

Таким образом, при  $\delta \gg \xi_0$  ядро  $\bar{Q}(k)$  не зависит от  $k$  и связь тока с полем носит локальный характер в том

смысле, что значение тока в данной точке  $\mathbf{r}$  определяется только полем  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  в этой же точке:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{e^2 N_s}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}). \quad (37.17)$$

Уравнение такого вида было впервые предложено Г. Лондоном и Ф. Лондоном [62]. Поэтому случай сверхпроводника, в котором  $\delta \gg \xi_0$ , естественно назвать лондоновским. Функция  $N_s(T)$  играет роль числа «сверхпроводящих» электронов. Формула (37.16) выражает отношение  $\frac{N_s(T)}{N}$  как функцию от температуры. Подчеркнем, что фигурирующая здесь щель  $\Delta$  есть равновесная щель в отсутствие поля при данной температуре, определяемая из условия (34.37). При  $T=0$  суммирование по частотам можно заменить на интегрирование:  $2\pi T \delta n = d\omega$ . Вычисляя интеграл, мы получим, что при  $T=0$  число сверхпроводящих электронов равно полному их числу  $N$ .

Вблизи  $T_c$  величина  $\Delta(T)$  мала по сравнению с  $T_c$  и  $\omega$ . Пренебрегая в знаменателе  $\Delta^2$ , получаем ряд

$$\frac{N_s(T)}{N} = \frac{2\Delta^2}{\pi^2 T^2} \sum_{n>0} \frac{1}{(2n+1)^3},$$

который уже вычислялся нами в § 36. Используя выражение (36.6) для величины щели вблизи  $T_c$ , находим, что в рассматриваемом случае

$$\frac{N_s(T)}{N} = 2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right).$$

Рассмотрим теперь второй предельный случай  $v|\mathbf{k}| \gg T_c$ . Подынтегральное выражение имеет полюсы в точках  $\frac{v|\mathbf{k}|\mu}{2} = \pm i\sqrt{\omega^2 + \Delta^2}$ . Поскольку  $v|\mathbf{k}|$  велико, это означает, что подынтегральное выражение имеет резкий максимум в области углов  $\mu \simeq \frac{T_c}{v|\mathbf{k}|} \ll 1$ . Поэтому членом с  $\mu^2$  в числителе можно пренебречь по сравнению с единицей. Остающееся выражение представляет собой быстро сходящийся интеграл по  $\mu$ , причем выражение, стоящее под знаком интеграла, убывает как  $1/\mu^2$  в области  $\frac{T_c}{v|\mathbf{k}|} \ll \mu \ll 1$ . Сделав замену  $v|\mathbf{k}|\mu = x$  и полагая

пределы интегрирования равными бесконечности, вычислим интеграл с помощью теории вычетов:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}) = \frac{3T\pi^2}{v|\mathbf{k}|} \sum_{\omega > 0} \frac{\Delta^2}{\omega^2 + \Delta^2} = \frac{3\pi^2}{4v|\mathbf{k}|} \Delta \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}. \quad (37.18)$$

Мы видим, что ядро  $\bar{Q}(\mathbf{k})$  в этом случае существенно зависит от  $\mathbf{k}$ . Поэтому если глубина проникновения поля  $\delta \ll \xi_0$ , то соотношение (37.3) является нелокальным, иными словами, значение плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  в данной точке определяется значениями векторного потенциала в целой окрестности этой точки с линейными размерами порядка  $\xi_0$ . Нелокальная связь поля с током для некоторых сверхпроводников была впервые предсказана на основе анализа экспериментальных данных Пиппардом [63]. Ниже всюду соответствующий случай, когда  $\delta \ll \xi_0$ , мы будем называть пиппардовским.

Отметим сразу же следующее важное обстоятельство. Как об этом уже говорилось, для решения вопроса о том, какой случай в действительности имеет место, существенно только соотношение между глубиной проникновения  $\delta$  и параметром  $\xi_0 \sim \frac{v}{T_c}$ . Поэтому если при достаточно низких температурах выполняется условие  $\delta \ll \xi_0$ , то ввиду увеличения  $\delta$  по мере приближения к  $T_c$  при температурах, достаточно близких к  $T_c$ , возникает обратная ситуация, т. е.  $\delta$  станет гораздо больше  $\xi_0$ . Иными словами, в самой непосредственной окрестности температур вблизи  $T_c$  всегда имеет место лондоновский случай. Значительная часть известных сверхпроводников принадлежит к пиппардовскому типу почти во всей области температур и переходит в лондоновский только в очень узкой окрестности  $T_c - T \ll T_c$ . Остальные чистые сверхпроводники представляют при низких температурах промежуточный случай и потому имеют довольно заметную лондоновскую область температур вблизи  $T_c$ . Мы не касаемся сейчас вопроса о сплавах (см. § 39).

Имея в своем распоряжении выражение для ядра  $\bar{Q}(\mathbf{k})$  (37.15), можно с помощью уравнений Максвелла решить задачу о проникновении поля в сверхпроводник с плоской поверхностью. В лондоновском случае эта задача решается особенно просто: подставляя (37.17) в (37.2) и считая, что все величины суть функции только от координаты  $z$ , находим.

что распределение векторного потенциала в сверхпроводнике описывается выражением

$$A_y(z) = -H_0 \delta e^{\frac{z}{\delta}},$$

где  $\delta$  — лондоновская глубина проникновения

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_s e^2}} \quad (\text{в обычных единицах } \delta = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi N_s e^2}}). \quad (37.19)$$

Решение аналогичной задачи в пиппардовском случае гораздо сложнее и требует привлечения специальных математических методов. Мы не будем на этом останавливаться, отсылая читателя, который интересуется непосредственно самой теорией сверхпроводимости и ее выводами, к оригинальной литературе (см. [56], а также [61]).

**2. Сверхпроводник в переменном поле.** До сих пор мы ограничивались рассмотрением свойств сверхпроводника в постоянном магнитном поле. Большой физический интерес, однако, имеет также вопрос о поведении сверхпроводника в переменном электромагнитном поле, или, говоря конкретнее, вопрос о специфике поглощения и отражения электромагнитного излучения, падающего на поверхность сверхпроводника. Термодинамический, равновесный подход к вопросу, на котором основывалось предыдущее изложение, в случае переменного поля непосредственно неприменим. В этих условиях оказываются чрезвычайно полезными аналитические соотношения, выведенные нами в гл. III, связывающие различные временные функции с соответствующими функциями, определенными в термодинамической технике. Предположим, что переменное поле  $A$  (как и выше, будем считать, что  $\varphi = 0$ ) с частотой  $\omega$  существует внутри бесконечного сверхпроводника. Возникающий под влиянием поля ток в сверхпроводнике, очевидно, по-прежнему связан с полем соотношением вида (37.3). Разница состоит в том, что в случае переменного поля необходимо знать компоненту Фурье  $Q(k, \omega)$  с отличной от нуля  $\omega$ . [Ядро  $\bar{Q}(k)$ , которое мы определяли выше, есть, очевидно,  $\bar{Q}(k) \equiv Q(k, 0)$ .] Будем опять исходить из квантовомеханического выражения для оператора тока:

$$\begin{aligned} \hat{j}(x) &= \frac{ie}{2m} (\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r' \rightarrow r} \tilde{\psi}^+(x') \tilde{\psi}(x) - \frac{e^2}{m} A(x) \tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x) \equiv \\ &\equiv \hat{j}_1(x) - \frac{e^2}{m} A(x) \tilde{\psi}^+(x) \tilde{\psi}(x), \end{aligned}$$

где операторы написаны в гайзенберговском представлении и содержат зависимость от поля. Связь с соответствующими операторами в представлении взаимодействия, согласно (6.28), дается соотношением

$$\hat{j} = S^{-1}(t) j S(t),$$

где

$$S(t) = T \exp \left\{ i \int_{-\infty}^t (j(x) A(x)) d^4x \right\}.$$

В линейном по полю приближении

$$\begin{aligned} \hat{j}_\alpha(x) = \hat{j}_{1\alpha}(x) - \frac{e^2}{m} A_\alpha(x) \psi^+(x) \psi(x) + \\ + i \int_{-\infty}^t [\hat{j}_{1\alpha}(x), \hat{j}_{1\beta}(y)] A_\beta(y) d^4y. \end{aligned}$$

Значение тока в сверхпроводнике в данной точке и в данный момент времени есть среднее

$$j(x) = \langle \hat{j}(x) \rangle = \sum_m e^{\frac{\Omega + \mu N_m - E_m}{T}} \langle m | \hat{j}(x) | m \rangle.$$

Поскольку  $\langle \hat{j}_1 \rangle \equiv 0$ ,

$$j_\alpha(x) = - \frac{e^2 N}{m} A_\alpha(x) + \int P_{\alpha\beta}^R(x-y) A_\beta(y) d^4y, \quad (37.20)$$

где мы ввели обозначение

$$P_{\alpha\beta}^R(x-y) = \begin{cases} i \langle [\hat{j}_\alpha(x), \hat{j}_\beta(y)] \rangle & \text{при } t_x > t_y, \\ 0 & \text{при } t_x \leq t_y. \end{cases} \quad (37.21)$$

При переходе к компонентам Фурье ядро интегрального соотношения (37.3) имеет вид

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^2 N}{m} \delta_{\alpha\beta} - P_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega).$$

Рассмотрим теперь ту же задачу в технике при конечных температурах, считая формально поле  $A(\mathbf{r}, \tau)$  и  $j(\mathbf{r}, \tau)$

функциями «временного» параметра  $\tau$ . При этом вместо (37.20) возникает следующее соотношение:

$$j_{\alpha}(r, \tau) = -\frac{e^2 N}{m} A_{\alpha}(r, \tau) + \int dr \int_0^{\beta} \mathcal{P}_{\alpha\beta}(x-y) A_{\beta}(y) d\tau_y,$$

где

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(r-r', \tau-\tau') = \langle T(\hat{j}_{\alpha 1}(r, \tau), \hat{j}_{\beta 1}(r', \tau')) \rangle. \quad (37.22)$$

Вводя компоненты Фурье термодинамических величин, найдем, что роль ядра  $Q_{\alpha\beta}(k, \omega_0)$  играет следующее выражение:

$$Q_{\alpha\beta}(k, \omega_0) = \frac{e^2 N}{m} \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, \omega_0),$$

где частоты  $\omega_0$  пробегают дискретные значения  $\omega_0 = 2n\pi T$ .

Мы покажем сейчас в общем виде, что компоненты Фурье  $P_{\alpha\beta}^R(k, \omega)$  и  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, \omega_0)$  суть значения одной и той же функции комплексного переменного  $\omega$ , аналитической в верхней полуплоскости, взятые в первом случае на вещественной оси, а во втором — в точках  $\omega = i\omega_0$ . Доказательство проводится совершенно так же, как это уже делалось в предыдущих главах. Разложим (37.21) и (37.22) в суммы по промежуточным состояниям. Тогда для компоненты Фурье, определенной соответствующим образом в случае  $P_{\alpha\beta}^R$  и  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ , находим:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta}^R(k, \omega) &= - \sum_{m, p} \rho_{pm}(k) \frac{1}{\omega - \omega_{pm} + i\delta}, \\ \mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, \omega_0) &= - \sum_{m, p} \rho_{pm}(k) \frac{1}{i\omega_0 - \omega_{pm}}. \end{aligned} \quad (37.23)$$

где

$$\rho_{pm}(k) = e^{\frac{\varepsilon + \mu N_m - E_m}{T}} \left(1 - e^{-\frac{\omega_{pm}}{T}}\right) (j_{\alpha 1})_{mp} (j_{\beta 1})_{pm} (2\pi)^3 \delta(k - k_{pm}).$$

Из (37.23) видно, что  $P_{\alpha\beta}^R(k, \omega)$  получается из  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, \omega_0)$  заменой  $\omega_0$  на  $-i\omega$ , причем на вещественной оси значения  $P_{\alpha\beta}^R(k, \omega)$  должны выбираться как предел при стремлении  $\omega$  сверху.

Таким образом, вычисляя в технике Мацубары  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k, \omega_0)$  и аналитически продолжив ее на вещественные частоты



$P_{\alpha\beta}^R(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{P}_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, -i\omega)$  так, чтобы возникающая функция не имела особенностей в верхней полуплоскости  $\omega$ , принципиально можно найти ядро  $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ , определяющее связь  $\mathbf{j}$  с  $\mathbf{A}$  в переменном электромагнитном поле.

Имея в виду эту цель, рассмотрим формально уравнения для термодинамических функций  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{F}^+$  в переменном по  $\tau$  поле вида  $A(\mathbf{r}, \tau) = A(\mathbf{k}, \omega_0) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_0\tau}$ . Вместо (37.11) выражение для компоненты Фурье тока  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega_0)$  примет теперь вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega_0) = -\frac{2e^2}{(2\pi)^3 m^2} T \sum_{\omega} \int \mathbf{p} (p A(\mathbf{k}, \omega_0)) [\mathfrak{G}(p_+) \mathfrak{G}(p_-) + \\ + \mathfrak{F}(p_+) \mathfrak{F}^+(p_-)] d\mathbf{p} - \frac{Ne^2}{m} A(\mathbf{k}, \omega_0)$$

(здесь  $p_{\pm} = \left\{ \mathbf{p} \pm \frac{\mathbf{k}}{2}; \omega' \pm \frac{\omega_0}{2} \right\}$ ). Повторяя весь ход рассуждений, которые в случае постоянного поля привели нас к выражению (37.15), получим после интегрирования по  $\xi$ :

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{3\pi T}{4} \sum_{\omega'} \int_{-1}^{+1} (1 - \mu^2) d\mu \times \\ \times \left\{ \frac{i(\omega_+ + V\omega_+^2 + \Delta^2) [i(\omega_- + V\omega_+^2 + \Delta^2) - v|\mathbf{k}|\mu] + \Delta^2}{V\omega_+^2 + \Delta^2 [\omega_-^2 + \Delta^2 + (v|\mathbf{k}|\mu - iV\omega_+^2 + \Delta^2)^2]} + \right. \\ \left. + \frac{i(\omega_- + V\omega_-^2 + \Delta^2) [i(\omega_+ + V\omega_-^2 + \Delta^2) + v|\mathbf{k}|\mu] + \Delta^2}{V\omega_-^2 + \Delta^2 [\omega_+^2 + \Delta^2 + (v|\mathbf{k}|\mu + iV\omega_-^2 + \Delta^2)^2]} \right\}. \quad (37.24)$$

Как и выше, для дальнейшего упрощения этого выражения следует сделать некоторые допущения о величине  $v|\mathbf{k}|$ . Мы ограничимся ниже практически наиболее интересным случаем, когда  $v|\mathbf{k}| \gg (T_c, \omega_0)$ . В этом случае по-прежнему основной вклад в выражение для  $\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0)$  вносит область углов, где  $\mu \sim \frac{T_c}{v|\mathbf{k}|}$ ,  $\frac{\omega'}{v|\mathbf{k}|}$ , и потому в числителе под интегралом можно пренебречь  $\mu^2$  по сравнению с единицей. Остающееся выражение в фигурных скобках убывает при  $\mu \gg \frac{T_c}{v|\mathbf{k}|}$ ,  $\frac{\omega'}{v|\mathbf{k}|}$  несколько медленнее по сравнению со случаем  $T=0$ , а именно, как  $1/\mu$ .

Поэтому целесообразно сделать в (37.24) перегруппировку членов, выделив эти, более медленно убывающие члены:

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = &= \frac{3\pi T}{4} \sum_{\omega'} \int_{-1}^1 d\mu \left\{ \frac{\Delta^2 - (\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2})(\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})}{V\omega_+^2 + \Delta^2 [\omega_-^2 + \Delta^2 + (v|\mathbf{k}|\mu - i\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2})^2]} + \right. \\ &+ \frac{\Delta^2 - (\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})(\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2})}{V\omega_-^2 + \Delta^2 [\omega_+^2 + \Delta^2 + (v|\mathbf{k}|\mu + i\sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})^2]} - \\ &- i \frac{\omega_+ + \sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2}}{V\omega_+^2 + \Delta^2 [v|\mathbf{k}|\mu - i(\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})]} + \\ &\left. + i \frac{\omega_- + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2}}{V\omega_-^2 + \Delta^2 [v|\mathbf{k}|\mu + i(\sqrt{\omega_+^2 + \Delta^2} + \sqrt{\omega_-^2 + \Delta^2})]} \right\}. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование и переходя к пределу  $v|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ , получим:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{3\pi^2 T}{4v|\mathbf{k}|} \sum_{\omega'} \left[ 1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{V\omega'^2 + \Delta^2 V(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2} \right]. \quad (37.25)$$

При  $\omega_0 = 0$  этот результат переходит в (37.18).

Поскольку при суммировании в (37.25)  $\omega$  пробегает значения  $\omega = (2n + 1)\pi T$ ,  $\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0)$  можно представить в виде контурного интеграла:

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = \frac{3\pi i}{16v|\mathbf{k}|} \int_C \operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T} \left\{ 1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{V\omega'^2 + \Delta^2 V(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2} \right\} d\omega, \quad (37.26)$$

где контур  $C$  состоит из двух частей  $C_+$  и  $C_-$ , приведенных на рис. 98. Выбор аналитических ветвей функций  $V\omega'^2 + \Delta^2$  и  $V(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2$  понятен из этого же рисунка: на разрезах значения этих функций чисто мнимые, причем на правой стороне верхнего разреза и на левой — нижнего мнимая часть положительна. Перейдем от интегрирования по контурам  $C_+$  и  $C_-$  к интегрированию по четырем контурам  $C_+^{(1,2)}$  и  $C_-^{(1,2)}$  (рис. 99). Легко видеть, что интегралы по  $C_+^{(2)}$  и  $C_-^{(2)}$ , рассматриваемые формально как функция  $\omega_0$ , имеют особенности

при  $\omega_0 = (2n+1)\pi T$ , поскольку в данном случае контур интегрирования проходит через точку  $\omega' = (2n+1)\pi T$ , где  $\operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T}$  обращается в бесконечность. Поэтому, чтобы опре-

делить ветвь функции, аналитической в верхней полуплоскости переменной  $\omega = i\omega_0$ , надо так преобразовать выражение (37.26) при частных значениях  $\omega = 2n\pi Ti$ , чтобы в дальнейшем при распространении этого выражения на произвольные значения  $\omega$  контур интегрирования не проходил через осо-

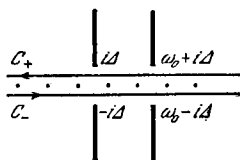


Рис. 98.

бенности подынтегрального выражения. Для этого заметим, что если  $\omega_0 = 2n\pi T$ , то в силу периодичности  $\operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T}$  интеграл по контуру  $C_-^{(2)}$  равен интегралу по контуру  $C_+^{(1)}$  (и то же самое для контуров  $C_+^{(2)}$  и  $C_-^{(1)}$ ). В справедливости сказанного

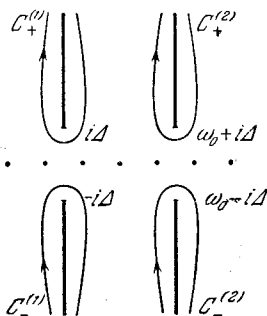


Рис. 99.

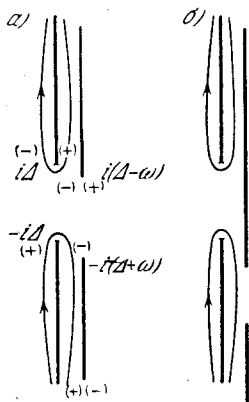


Рис. 100.

легко убедиться, заменяя, скажем, в интеграле по контуру  $C_-^{(2)}$  переменную интегрирования  $\omega' - \omega_0 = -u$ . Поэтому (37.26) можно написать в виде

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\mathbf{k}, \omega_0) = & \\ = & \frac{3\pi i}{8v|\mathbf{k}|} \left( \int_{C_-^{(1)}} + \int_{C_+^{(1)}} \right) \left\{ \operatorname{tg} \frac{\omega'}{2T} \left[ 1 + \frac{\Delta^2 - \omega'(\omega' - \omega_0)}{V_{\omega'^2 + \Delta^2} V_{(\omega' - \omega_0)^2 + \Delta^2}} \right] \right\} d\omega' \end{aligned}$$

Полученное выражение, рассматриваемое формально как функция переменной  $\omega = i\omega_0$ , представляет собой аналитическую в верхней полуплоскости  $\omega$  функцию, поскольку в данном случае контур интегрирования при  $\text{Im } \omega > 0$  никогда не пересекает никаких особенностей подынтегрального выражения.

Интересующая нас величина  $\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega)$  при  $\omega > 0$  может теперь быть непосредственно написана. При этом возникают два случая: а)  $\omega < 2\Delta$  и б)  $\omega > 2\Delta$ . Вычисление в обоих случаях производится элементарно в соответствии с рис. 100, на котором в скобках указан выбор знака мнимой части функций на различных берегах разрывов. Приведем получающийся результат [64, 65]:

а)  $\omega < 2\Delta$

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{3\pi}{4v|\mathbf{k}|} \left\{ \int_{\Delta}^{\Delta+\omega} \text{th} \frac{\omega'}{2T} \frac{\omega'(\omega' - \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{\Delta^2 - (\omega' - \omega)^2}} d\omega' + \right. \\ \left. + i \int_{\Delta}^{\infty} \left[ \text{th} \frac{\omega'}{2T} - \text{th} \frac{\omega' + \omega}{2T} \right] \frac{\omega'(\omega' + \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' + \omega)^2 - \Delta^2}} d\omega' \right\},$$

б)  $\omega > 2\Delta$

$$\bar{Q}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{3\pi}{4v|\mathbf{k}|} \left\{ \int_{\omega-\Delta}^{\omega+\Delta} \text{th} \frac{\omega'}{2T} \frac{\omega'(\omega' - \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{\Delta^2 - (\omega' - \omega)^2}} d\omega' + \right. \\ \left. + i \int_{\Delta}^{\omega-\Delta} \text{th} \frac{\omega'}{2T} \frac{\omega'(\omega' - \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' - \omega)^2 - \Delta^2}} d\omega' + \right. \\ \left. + i \int_{\Delta}^{\infty} \left[ \text{th} \frac{\omega'}{2T} - \text{th} \frac{\omega' + \omega}{2T} \right] \frac{\omega'(\omega' + \omega) + \Delta^2}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta^2} \sqrt{(\omega' + \omega)^2 - \Delta^2}} d\omega' \right\}.$$

### § 38. Свойства сверхпроводника в произвольном магнитном поле вблизи температуры перехода

Особый случай представляют свойства сверхпроводника вблизи критической температуры. Величина щели при этом достаточно мала, вследствие чего все уравнения значительно упрощаются. Из результатов § 36 (выражение (36.4)) легко усмотреть, что в данном случае возможно разложение урав-

нений по величине  $1 - T/T_c \ll 1$ . Кроме того, как мы уже отмечали в предыдущем параграфе, вблизи  $T_c$  глубина проникновения слабого магнитного поля  $\delta \gg \xi_0$ , т. е. все величины в поле, в том числе и само поле, меняются на расстояниях, гораздо больших параметра теории  $\xi_0 \sim v/T_c$ . Указанное обстоятельство позволит в этой области температур построить теорию (Горьков [66]), описывающую поведение сверхпроводников в произвольных магнитных полях (порядка величины критического поля).

С этой целью перепишем снова уравнения (37.6)

$$\begin{aligned} & \left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + \mu \right\} \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Delta(\mathbf{r}) \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \\ & \left\{ -i\omega + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Delta^*(\mathbf{r}) \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \end{aligned}$$

вместе с уравнением, определяющим величину щели:

$$\Delta^*(\mathbf{r}) = |\lambda| T \sum_{\omega} \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (38.1)$$

Поскольку  $|\Delta|$  мало, разложим функцию  $\mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  по степеням  $|\Delta|$  и, подставляя это разложение в (38.1), найдем уравнение для  $\Delta^*(\mathbf{r})$ . При этом полезно ввести компоненты Фурье функции Грина  $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  для электронов в нормальном металле (в данном поле  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ). Уравнение, которому удовлетворяет  $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , можно записать двояким образом:

$$\left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \mu \right\} \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (38.2)$$

или

$$\left\{ i\omega + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + ie\mathbf{A}(\mathbf{r}') \right)^2 + \mu \right\} \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (38.2')$$

С помощью функции  $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , привлекая второе из этих уравнений, приведем систему уравнений для  $\mathfrak{G}_\omega$  и  $\mathfrak{F}_\omega^+$  к интегральной форме:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{l}) \Delta(\mathbf{l}) \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{l}, \mathbf{r}') d\mathbf{l}, \\ \mathfrak{F}_\omega^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(\mathbf{l}, \mathbf{r}) \Delta^*(\mathbf{l}) \mathfrak{G}_\omega(\mathbf{l}, \mathbf{r}') d\mathbf{l}. \end{aligned} \quad (38.3)$$

Прежде чем переходить к дальнейшему, найдем, чему равна функция  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ . В отсутствие магнитного поля  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  равна ( $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ )

$$\mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(R) = \begin{cases} -\frac{m}{2\pi R} e^{ip_0 R - \frac{|\omega|}{v} R} & \text{при } \omega > 0, \\ -\frac{m}{2\pi R} e^{-ip_0 R - \frac{|\omega|}{v} R} & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (38.4)$$

В этом можно убедиться или непосредственной подстановкой (38.4) в уравнение (38.2) в отсутствие поля, или воспользовавшись известным нам выражением для компоненты Фурье  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{p}) = [i\omega - \xi]^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(R) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{p}) d\mathbf{p} e^{i\mathbf{p}R} = \\ &= \frac{m}{(2\pi)^2 i R} \int \frac{e^{ip_0 R + i \frac{\xi}{v} R} - e^{-ip_0 R - i \frac{\xi}{v} R}}{i\omega - \xi} d\xi \end{aligned}$$

(нас интересует, разумеется, вид функции  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(R)$  на расстояниях, больших по сравнению с атомными:  $Rp_0 \gg 1$ ). Интегрируя по  $\xi$ , непосредственно получаем (38.4).

Функция  $\mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(R)$  быстро осциллирует. Поскольку  $p_0 R \gg 1$ , это обстоятельство позволяет для определения функции  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в магнитном поле применить своего рода квазиклассическое приближение. В самом деле, будем искать  $\tilde{\mathfrak{G}}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в виде

$$\tilde{\mathfrak{G}}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \mathfrak{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (38.5)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = 0$ . Подставляя (38.5) в (38.2) и дифференцируя только главные члены, найдем уравнение для добавки  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  к действию

$$(n, \nabla_{\mathbf{r}} \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = e(n, \mathbf{A}(\mathbf{r})); \quad (n = \frac{R}{|R|}). \quad (38.6)$$

В этом уравнении мы отбросили квадратичные по  $\mathbf{A}$  члены, поскольку радиус закручивания электронов  $\frac{ep_0}{H}$  в интересующих нас полях очень велик по сравнению с глубиной проникновения:  $p_0 \gg eA \sim eH\delta$  ( $\delta$  — порядок глубины проникновения).

Вернемся теперь к уравнениям (38.3) и произведем в них разложение по степеням  $|\Delta(r)|$ . Как видно из (38.4) и (38.6), это разложение в  $\mathfrak{F}_\omega^+(r, r')$  достаточно произвести до членов третьего порядка по  $|\Delta|$  включительно. Что касается функции Грина  $\mathfrak{G}_\omega(r, r')$ , то ее достаточно знать с точностью до членов второго порядка по  $|\Delta|$ :

$$\mathfrak{G}_\omega(r, r') = \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(r, r') - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(r, l) \Delta(l) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(l, r') \Delta^*(m) \times \\ \times \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(m, l) dm dl. \quad (38.7)$$

Подставляя это выражение во второе из уравнений (38.3), найдем разложение  $\mathfrak{F}_\omega^+(r, r')$ , с помощью которого из (38.1) получаем следующее уравнение относительно  $\Delta^*(r)$ :

$$\Delta^*(r) = |\lambda| T \sum_\omega \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(l, r) \Delta^*(l) \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(l, r) dl - \\ - |\lambda| T \sum_\omega \int \int \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(l, m) \Delta(m) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(s, r) \Delta^*(s) \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(s, m) \times \\ \times \Delta^*(l) \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(l, r) dl dm ds. \quad (38.8)$$

Существенные расстояния в интегралах в этом уравнении порядка  $\xi_0$ , поскольку, как это видно из (38.4) и (38.5), функция  $\tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(r, r')$  экспоненциально убывает при  $|r - r'| > \xi_0$ . Между тем изменение щели  $\Delta(r)$  и поля  $A(r)$  происходит на расстояниях порядка глубины проникновения, которая вблизи критической температуры много больше  $\xi_0$ . По тем же причинам фаза  $\varphi(r, r')$  в (38.5) может быть написана в виде

$$\varphi(r, r') \simeq e(A(r), r - r').$$

Вблизи  $T_c$   $A(r) \sim H\delta \sim \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$ , поэтому фаза  $\varphi(r, r')$  мала и экспоненту можно разложить по  $\varphi$ .

Рассмотрим сначала первый член в правой части. Пусть

$$K(l, r) = T \sum_\omega \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(l, r) \tilde{\mathfrak{G}}_{-\omega}^{(0)}(l, r) = K_0(l - r) e^{2ie(A(r), l - r)}.$$

Воспользовавшись представлением (38.4) для функции Грина в координатном пространстве и произведя суммирование

по частотам, найдем для  $K_0(R)$  следующее выражение:

$$K_0(R) = \frac{m^2 T}{(2\pi R)^2} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{2\pi T R}{v}}. \quad (38.9)$$

Поскольку, как мы уже отмечали, все величины меняются мало на расстояниях порядка  $\xi_0$ , можно в интеграле

$$\int K_0(\mathbf{l} - \mathbf{r}) e^{2ie(A(\mathbf{r}), \mathbf{l} - \mathbf{r})} \Delta^*(\mathbf{l}) d\mathbf{l}$$

разложить все величины в ряд по степеням  $(\mathbf{l} - \mathbf{r})$  около точки  $\mathbf{r}$ . Ограничиваясь членами второго порядка по  $(\mathbf{l} - \mathbf{r})$ , получим:

$$\Delta^*(\mathbf{r}) \int K_0(R) d\mathbf{R} + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \Delta^*(\mathbf{r}) \int K_0(R) R^2 d\mathbf{R}.$$

Функция  $K_0(R)$ , согласно (38.9), при  $R=0$  обращается в бесконечность как  $1/R^3$ . Поэтому формально первый из этих двух интегралов расходится. Обрезание расходящегося выражения удобнее произвести в импульсном пространстве. В результате мы получаем знакомое выражение:

$$\int K_0(R) d\mathbf{R} = \frac{mp_0}{2\pi^2} \int_0^{\omega_D} \operatorname{th} \left( \frac{\xi}{2T} \right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Второй член при интегрировании вблизи  $\mathbf{R}=0$  особенностей не содержит. Вычисляя этот интеграл непосредственно в координатном представлении, получим:

$$\int R^2 K_0(R) d\mathbf{R} = \frac{7\zeta(3) v^2}{8(\pi T)^2} \cdot \frac{mp_0}{2\pi^2}.$$

В члене третьего порядка по  $|\Delta|$  в уравнении (38.8) зависимостью  $\Delta(\mathbf{r})$  от координат можно пренебречь. Этот член равен поэтому

$$\begin{aligned} \left( \frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \Delta^*(\mathbf{r}) |\Delta(\mathbf{r})|^2 T \sum_{\omega} \int d\xi \frac{1}{(\omega^2 + \xi^2)^2} = \\ = \left( \frac{mp_0}{2\pi^2} \right) \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T)^2} \Delta^*(\mathbf{r}) |\Delta(\mathbf{r})|^2. \end{aligned}$$



Собирая вместе полученные результаты, найдем, что вблизи критической температуры функция  $\Delta^*(r)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left\{ \frac{1}{4m} \left( \frac{\partial}{\partial r} + 2ieA(r) \right)^2 + \frac{1}{\eta} \left[ \frac{T_c - T}{T_c} - \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_c)^2} |\Delta(r)|^2 \right] \right\} \Delta^*(r) = 0, \quad (38.10)$$

где

$$\eta = \frac{7\zeta(3)}{6(\pi T_c)^2} \varepsilon_F.$$

В отсутствие поля  $\Delta$  постоянно по пространству и уравнение (38.10) совпадает с первыми членами разложения (36.4).

Перейдем теперь к вычислению плотности тока  $j(r)$ . Формула (37.5) предыдущего параграфа, конечно, верна и в данном случае. Пользуясь, однако, тем, что величина  $\Delta$  мала по сравнению с  $T_c$ , мы будем и здесь производить разложение по  $A$  и  $\Delta$  до первых не исчезающих членов. Заметим, что член в плотности тока (37.5)

$$-\frac{2e^2 A(r)}{m} \mathfrak{G}_{t'=t+0}(r, r) \equiv -\frac{e^2}{m} A(r) N.$$

Здесь  $N$  — плотность полного числа электронов, которая равна своему значению для нормального металла. Изменение  $N$  противоречило бы условию электронейтральности. (Решение (38.7) удовлетворяет этому требованию, т. е. если

$$\mathfrak{G}_\omega(r, r') = \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(r, r') + \delta\mathfrak{G}_\omega(r, r'), \text{ то } T \sum_\omega \delta\mathfrak{G}_\omega(r, r) \equiv 0).$$

Подставляя (38.7) в (37.5), найдем:

$$T \sum_\omega \frac{ie}{m} (\nabla_{r'} - \nabla_r) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(r, r')_{r' \rightarrow r} - \frac{e^2}{m} N A(r) \equiv 0,$$

поскольку в постоянном магнитном поле ток в нормальном металле равен нулю. Таким образом,

$$j(r) = \frac{ie}{m} (\nabla_{r'} - \nabla_r)_{r' \rightarrow r} T \sum_\omega \delta\mathfrak{G}_\omega(r, r'),$$

где

$$\begin{aligned} \delta\mathfrak{G}_\omega(r, r') &= \\ &= - \int \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(r, l) \Delta(l) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(m, r') \Delta^*(m) \tilde{\mathfrak{G}}_\omega^{(0)}(m, l) dm dl. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (38.5), разлагая все величины около точки  $r$  до членов первого порядка и опуская члены, которые дают нуль при интегрировании по углам, получим:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \left[ \frac{ie}{m} \left( \Delta \frac{\partial \Delta^*}{\partial \mathbf{r}} - \Delta^* \frac{\partial \Delta}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{4e^2 |\Delta|^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \right] C, \quad (38.11)$$

где

$$C = \frac{1}{3} T \sum_{\omega} \int \int \left[ \left( (\nabla_r \mathbb{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{l})) \mathbb{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{m} - \mathbf{r}) - \mathbb{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{l}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (\nabla_r \mathbb{G}_{\omega}^{(0)}(\mathbf{m} - \mathbf{r})) \right) \cdot \mathbf{m} \right] \mathbb{G}_{-\omega}^{(0)}(\mathbf{m} - \mathbf{l}) d\mathbf{m} d\mathbf{l}.$$

Вычисление  $C$  удобно произвести в компонентах Фурье, заменяя обычным образом  $\mathbf{r} \rightarrow i \frac{d}{d\mathbf{p}}$ . Не останавливаясь на этом довольно простом вычислении, приведем окончательный результат:

$$C = \frac{7\zeta(3) N}{16 (\pi T_c)^2}.$$

Система уравнений (38.10) и (38.11) описывает свойства сверхпроводников в постоянном магнитном поле вблизи  $T_c$ . Введем волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$ , пропорциональную  $\Delta(\mathbf{r})$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{7\zeta(3) N}{8 (\pi T_c)^2}} \Delta(\mathbf{r}). \quad (38.12)$$

Взяв комплексно сопряженное от уравнения (38.10) и подставляя всюду выражение (38.12), приведем эти уравнения к следующему виду:

$$\left\{ \frac{1}{4m} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - 2ie\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 + \frac{1}{\eta} \left[ \frac{T_c - T}{T_c} - \frac{1}{N} |\psi|^2 \right] \right\} \psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (38.13)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{2ie}{4m} \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial \mathbf{r}} \right) - \frac{(2e)^2}{2m} \mathbf{A}(\mathbf{r}) |\psi|^2.$$

Теперь становится понятным смысл введения волновой функции  $\psi(\mathbf{r})$ : получающиеся уравнения имеют вид, похожий на квантовомеханические уравнения для частицы с массой  $2m$  и зарядом  $2e$ . Физически этот результат совершенно ясен, поскольку  $\Delta(\mathbf{r})$  имеет смысл величины, пропорциональной волновой функции связанной пары, или, точнее, волновой функции относительно координат ее центра инерции. Интересно, что подобного вида уравнения были предложены

в феноменологической теории Гинзбурга — Ландау [67], где, однако, фигурировал однократный элементарный заряд. Помимо этого существенного изменения, новая теория сверхпроводимости, подтверждая правильность теории Гинзбурга — Ландау вблизи  $T_c$ , дает возможность вычислить фигурирующие в последней теории постоянные.

В заключение отметим еще раз тот факт, что при выводе мы использовали малость изменения всех величин на расстояниях порядка  $\xi_0$ . Поскольку, как легко видеть из (38.13) и (37.19), все величины меняются в общем случае на расстояниях порядка лондоновской глубины проникновения вблизи  $T_c$ , а для пиппардовских металлов эта глубина проникновения становится больше  $\xi_0$  только в самой близости от  $T_c$ , то область применимости этих уравнений для металлов пиппардовского типа представляет собой очень незначительную окрестность температур вблизи критической температуры перехода. Для металлов лондоновского типа, или промежуточных, эти уравнения справедливы в довольно широкой области температур вблизи  $T_c$ . С экспериментальной точки зрения это — весьма интересная область температур, и следует отметить, что уравнения (38.13) приводят к очень хорошему согласию теории с результатами измерений в этой области.

## § 39. Теория сверхпроводящих сплавов

**1. Постановка вопроса.** Одним из интересных вопросов в теории сверхпроводимости является вопрос о свойствах «сплавов», т. е. сверхпроводников с примесью атомов других элементов и иными нарушениями решетки (Абрикосов и Горьков [68]).

В нормальном состоянии эти дефекты решетки обуславливают так называемое остаточное сопротивление металла. В сверхпроводящем состоянии примеси играют новую роль. Как мы уже указывали, в сверхпроводнике взаимодействие между электронами приводит к установлению определенной пространственной корреляции между ними. В частности, зависимость тех или иных гриновских функций в координатном представлении от своих пространственных аргументов на расстоянии порядка  $\xi_0$  (эффективный размер пары) существенно меняется с переходом металла из нормального

в сверхпроводящее состояние. Наличие атомов посторонних элементов или других дефектов решетки приведет к тому, что электроны станут рассеиваться на примесях. Поскольку такое рассеяние происходит случайным образом, на произвольные углы, а рассеивающиеся электроны обладают очень малой длиной волны, то корреляции электронов будут очень чувствительны к актам рассеяния. Иными словами, рассеяние электронов на атомах примесей должно уменьшать пространственную корреляцию между ними.

При очень малых концентрациях роль примесей невелика. Увеличение концентрации примесей приведет, очевидно, к тому, что радиус корреляции электронов в сверхпроводнике будет уменьшаться. Для достаточно концентрированного сплава роль параметра корреляции перейдет от  $\xi_0$  к длине свободного пробега электронов. При таких концентрациях мы вправе ожидать появления новых характерных свойств у сверхпроводника. Не ставя своей целью в этой книге последовательное изложение теории сверхпроводимости, мы коснемся здесь только одного вопроса — о свойствах сплавов в постоянном слабом магнитном поле. Это позволит нам, однако, в полной мере продемонстрировать своеобразную технику теории поля, чрезвычайно полезную при изучении такого рода объектов.

Выше, в § 37, уже отмечалось, что большинство реальных сверхпроводников в отношении их электромагнитных свойств в слабом поле принадлежит к нелокальному типу («пиппардовскому» и промежуточному). Иными словами, величина тока, возникающего в данной точке сверхпроводника при помещении его в электромагнитное поле, определяется значениями поля в целой окрестности этой точки. Такая нелокальность заложена, конечно, в самой основе теории, базирующейся на идее Купера об образовании связанных электронных пар. Размеры пары обуславливают существование корреляции электронов на расстоянии порядка  $\xi_0 \sim 10^{-4}$  см, которая и проявляется в виде нелокальной связи между полем и током, если поле меняется на расстояниях, существенно меньших  $\xi_0$  (эти расстояния порядка глубины проникновения поля). В обратном, лондоновском, случае поле почти не меняется на расстояниях  $\sim \xi_0$ , существенных в интегральном соотношении (37.3), и может быть вынесено из-под интеграла в точке  $\mathbf{r}$ .

Соображения, которые были изложены выше, о роли примесей в сверхпроводнике, показывают, что при достаточной концентрации примесей сверхпроводящий сплав должен принадлежать ко второму типу. Поскольку с увеличением числа примесей роль длины корреляции начинает играть величина свободного пробега, то наступает момент, когда этот пробег становится меньше глубины проникновения поля, т. е. возникает лондоновская ситуация.

Прежде чем переходить к дальнейшему, необходимо разъяснить еще следующее обстоятельство. В реальных сверхпроводниках  $\xi_0$  имеет порядок  $10^{-4}$  см. Однако из предыдущего следует, что новые свойства у сверхпроводника наступают при концентрациях, когда длина свободного пробега становится сравнимой с глубиной проникновения поля, порядок которой есть  $\sim 10^{-5}$  см. Чрезвычайно существенно, что эти концентрации еще являются малыми ( $\sim 1\%$ ). Дело в том, что при больших концентрациях примеси мы имеем дело, по существу, с новым веществом, свойства которого не имеют ничего общего с исходным сверхпроводником. В частности, меняются свойства электрон-фононного взаимодействия и, следовательно, меняется температура сверхпроводящего перехода. Этими изменениями основных свойств решетки можно пренебречь при достаточно малых концентрациях.

Однако уже такие малые концентрации существенно меняют поведение сверхпроводника в магнитном поле. Интересно, что при этом его термодинамические свойства, как это и подтверждает эксперимент, практически не отличаются от свойств чистого сверхпроводника.

Обычные методы, использующие кинетическое уравнение, с помощью которого изучается, например, остаточное сопротивление нормального металла, оказываются непригодными для решения поставленного выше вопроса. Поэтому мы ниже вновь обратимся к методам квантовой теории поля.

**2. Остаточное сопротивление нормального металла.** С целью сделать наше дальнейшее изложение наиболее понятным, мы сформулируем используемую ниже технику на примере вычисления остаточного сопротивления нормального металла с примесями при температуре абсолютного нуля

(Абрикосов и Горьков [68], Эдвардс [69]). Разумеется, получающиеся результаты в этом случае совершенно эквивалентны общеизвестным результатам, найденным с помощью метода кинетического уравнения.

Как известно, наличие примесей приводит в нормальном металле к конечной проводимости  $\sigma$ , так что плотность тока  $j$  в приложенном однородном электрическом поле  $E$  при достаточно малых частотах дается формулой

$$j = \sigma E.$$

Вводя векторный потенциал  $A(t)$  обычным образом,  $E = -\frac{\partial A}{\partial t}$ , можно представить это соотношение в следующем виде (для монохроматической компоненты поля):

$$j_{\omega} = i\omega\sigma A_{\omega}.$$

В таком виде это соотношение совпадает с (37.3'). Ядро  $Q(k, \omega)$  в данном случае просто равно

$$Q(k, \omega) = -i\omega\sigma.$$

Ниже мы будем определять  $Q(k, \omega)$  методами квантовой теории поля.

Учитывая разницу в определении гриновских функций в полевой технике при абсолютном нуле и в технике при  $T \neq 0$ , вместо (37.5) получим:

$$j(x) = \frac{ie}{m} (p_{r'} - p_r) \underset{r' \rightarrow r, t' = t+0}{G(x, x')} - \frac{Ne^2}{m} A(x)$$

$$(p = -i\nabla).$$

Разлагая функцию  $G(x, x')$  обычным образом до линейных по полю членов, получим:

$$j(x) = -\frac{ie^2}{2m^2} (p_{r'} - p_r) \int \underset{r' \rightarrow r}{(A(y), p_{y'} - p_y)} \underset{y' \rightarrow y}{G^{(0)}(x, y')} \times \\ \times G^{(0)}(y, x') d^4y - \frac{Ne^2}{m} A(x). \quad (39.1)$$

В этом соотношении функции  $G^{(0)}(x, y)$  суть функции Грина нормального металла в отсутствие поля. Заметим, что эти величины уже зависят не только от разности аргументов  $x - y$ , как это было всюду до сих пор; в функциях  $G^{(0)}(x, y)$

мы считаем учтенным взаимодействие электронов с атомами примесей. (В дальнейшем мы будем функции Грина металла с примесями обозначать через  $G(x, y)$  и т. д. (без значка), соответствующие функции чистого металла — через  $G^{(0)}(x, y)$  и т. д.) Взаимодействию электронов с атомами примеси соответствует гамильтониан

$$H_{int} = \sum_a H_a,$$

$$H_a = \int u(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \psi^+(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{r}.$$

Прежде чем продолжать дальнейшее преобразование (39.1), найдем функцию  $G(x, x')$ .

При наличии примесей функция Грина не совпадает с выражением (7.7). Напишем ее в виде

$$G(x, x') = (2\pi)^{-4} \int G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r} - i\mathbf{p}'\mathbf{r}' - i\omega(t-t')} d\mathbf{p} d\mathbf{p}' d\omega. \quad (39.2)$$

Функция  $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$  выражается по известным правилам теории поля как сумма диаграмм, изображенных на рис. 101. Каждой линии соответствует  $G^{(0)}(\mathbf{p})$ . Примесную вершину

$$\frac{\text{---}}{\mathbf{p}} \frac{\text{---}}{\mathbf{p}'} = \frac{\text{---}}{\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')} + \frac{\text{---}\times\text{---}}{\mathbf{p} \quad \mathbf{p}'} + \frac{\text{---}\times\text{---}\times\text{---}}{\mathbf{p} \quad \mathbf{p}'' \quad \mathbf{p}'} + \dots$$

Рис. 101.

мы будем обозначать крестиком. Ей соответствует множитель, равный  $u(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_a} \delta(\omega - \omega')$ , где  $u(\mathbf{q})$  — фурье-компонента потенциала  $u(\mathbf{r})$ , а  $\mathbf{q}$  — передаваемый импульс.

Суммирование диаграмм приводит к интегральному уравнению для  $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$ :

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') G^{(0)}(\mathbf{p}) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_a G^{(0)}(\mathbf{p}) \int u(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')\mathbf{r}_a} G(\mathbf{p}'', \mathbf{p}'; \omega) d\mathbf{p}''.$$

(39.3)

Нас не интересует точное решение (39.3). Поскольку атомы примесей хаотически распределены по металлу, мы должны усреднить все выражения по положению каждого атома

примеси. При этом существенно, что в силу нашего предположения о малости атомной концентрации среднее расстояние между атомами примесей гораздо больше атомных расстояний в решетке металла, благодаря чему усреднение может производиться в объемах, с размерами, большими по сравнению с межатомными расстояниями. После такого усреднения функция Грина  $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$ , очевидно, примет вид

$$\overline{G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)} = G(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (39.4)$$

Интересующие нас импульсы  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  имеют величины порядка граничного фермиевского импульса  $p_0$ , который в свою очередь имеет порядок обратных межатомных расстояний. Это обстоятельство сразу облегчает выполнение усреднения.

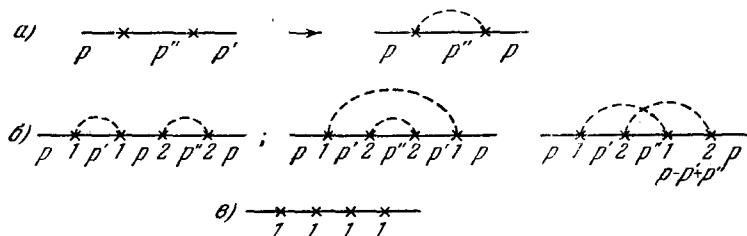


Рис. 102.

Мы произведем вычисления в борновском приближении, т. е. будем предполагать  $p_0^3 \int u(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \ll \epsilon_F$ . Можно показать, что окончательные результаты, выраженные через время столкновений, будут справедливы и в общем случае.

Простейшая диаграмма для  $G(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$  содержит всего один крест. Усредненное значение по положению атома примеси есть постоянная  $\overline{u(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_a}} = u(0)$ , которую можно включить в энергию основного состояния и в дальнейшем считать равной нулю. Следующая по сложности диаграмма содержит два креста (рис. 102, а). Если эти кресты относятся к разным атомам, то матричный элемент содержит множитель  $u(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}') u(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}'')\mathbf{r}_a + i(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}')\mathbf{r}_b}$ , среднее от которого равно нулю. Если в обоих крестах рассеяние происходит на одинаковых атомах и  $\mathbf{p} = \mathbf{p}'$ , то среднее значение



от этой диаграммы (без внешних  $G^{(0)}(p)$ ) отлично от нуля и равно

$$\frac{1}{V} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 G^{(0)}(p') \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}, \quad (39.5)$$

где  $V$  — объем системы. (Чтобы получить этот результат, удобно в формулах (39.2) и (39.3) перейти от интегралов по импульсам к дискретным суммам и, выполнив усреднение, совершить обратный переход.)

Нас в дальнейшем будут интересовать значения  $\mathbf{p}$ , близкие по абсолютной величине к  $p_0$ . Как и в § 21, интеграл в выражении (39.5) может быть разбит на две части: по значениям  $\mathbf{p}'$ , далеким от поверхности Ферми, и по значениям, близким к поверхности Ферми (пределы второго интеграла по  $|\mathbf{p}'|$  могут быть взяты симметричными относительно  $|\mathbf{p}'| - p_0$ ). Интеграл по далеким областям дает действительную константу, которая вместе с  $u(0)$  является перенормировкой химического потенциала и может не рассматриваться. Во втором интеграле можно считать  $u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$  медленно меняющейся функцией. Подставляя формулу (7.7) для  $G^{(0)}(p)$  и суммируя по атомам примеси (это означает просто умножение на число атомов), получаем существенный вклад в  $G$ -функцию:

$$\frac{i \operatorname{sign} \omega}{2\tau},$$

где

$$\frac{1}{\tau} = \frac{nm p_0}{(2\pi)^2} \int |\mathbf{u}(\theta)|^2 d\Omega \quad (39.6)$$

( $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Согласно (39.6)  $\tau$  есть в борновском приближении время между столкновениями,  $n$  — число атомов примеси в единице объема). Отсюда видно, что основную роль в интегралах играет область вблизи поверхности Ферми ( $v(|\mathbf{p}| - p_0) \sim \frac{1}{\tau}$ ).

С этой точки зрения не все диаграммы являются эквивалентными. Сравним, например, между собой три диаграммы, изображенные на рис. 102, б (пунктиры соединяют кресты, относящиеся к одному атому). Нетрудно видеть, что в первых двух выражениях интегрирование по  $\mathbf{p}'$  и  $\mathbf{p}''$  может производиться вблизи Ферми-поверхности при произвольных углах между импульсами. Наоборот, в третьем интеграле

требование близости всех аргументов  $G$ -функций к поверхности Ферми приводит к ограничению углов. В результате вклад такого графика оказывается меньшим в  $\frac{1}{vp_0G}$  раз по сравнению с остальными. Так как в дальнейшем нам понадобятся значения  $\omega$  и  $\xi \sim \frac{1}{\tau}$ , где  $\tau$  — время между столкновениями, то малость «пересекающихся» графиков можно оценить как  $\frac{1}{p_0 l}$ , где  $l = v\tau$  — длина пробега.

Легко показать, что малый вклад дают также диаграммы, содержащие более двух крестов от одного атома примеси. Сравним, например, между собой полный вклад (от всех атомов примеси) диаграмм типа первой диаграммы на рис. 102, б с диаграммами типа 102, в. Первые диаграммы дают величину порядка

$$\frac{1}{\tau^2} G^{(0)}(p) \sim \frac{1}{\tau},$$

а вторые — величину порядка

$$\frac{1}{\tau} \frac{u^2(q)}{v^2} p_0^4 \sim \frac{1}{\tau} \left[ \frac{\int u d\mathbf{r} p_0^3}{\varepsilon_F} \right]^2 \ll \frac{1}{\tau}$$

(это обстоятельство есть следствие борновского приближения). Отсюда ясно, что мы должны рассматривать только диаграммы, содержащие по два креста на один атом примеси.

Суммируя все существенные диаграммы (т. е. только «парные» и не содержащие «пересечений», наподобие третьей диаграммы рис. 102, б), получаем следующее уравнение для  $G$ -функции:

$$G(p) = G^{(0)}(p) + \frac{n}{(2\pi)^3} G^{(0)}(p) \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 G(p') d\mathbf{p}' G(p). \quad (39.7)$$

Если отказаться от борновского приближения, то необходимо учитывать диаграммы со многими крестами на один атом примеси. Можно показать, что все изменение, которое при этом возникает, заключается в замене борновской амплитуды  $u(\theta)$  на полную амплитуду рассеяния. Это останется справедливым и для всех дальнейших расчетов. Поэтому во всех формулах под  $u(\theta)$  можно подразумевать полную амплитуду рассеяния.

Решением уравнения (39.7) является:

$$G(p) = \frac{1}{\omega - \xi - \bar{G}_\omega},$$

где  $\bar{G}_\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\bar{G}_\omega = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \frac{1}{\omega - \xi' - \bar{G}_\omega} d\mathbf{p}'.$$

Полагая  $\bar{G}_\omega$  чисто мнимым  $\bar{G}_\omega = -i\beta$  и вычисляя интеграл в правой части тем же способом, что и в (39.5), находим:

$$\beta = \frac{\text{sign } \beta}{2\tau},$$

где  $\tau$  определено формулой (39.6). Сравнивая полученные таким образом  $G(p)$  с результатом в случае малого количества примесей ( $G \rightarrow G^{(0)}$ ), находим  $\beta = \frac{\text{sign } \omega}{2\tau}$  или

$$G(p) = \frac{1}{\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau}}. \quad (39.8)$$

Переходя к  $x$ -представлению, нетрудно видеть, что все изменение в  $G$  по сравнению с  $G^{(0)}$  сводится к умножению на экспоненциально затухающий множитель

$$G(x - x') = G^{(0)}(x - x') e^{-\frac{|x - x'|}{2l}}. \quad (39.9)$$

Действительно, имеем после интегрирования по углам

$$\begin{aligned} G(x - x') &\propto \int p dp d\omega \frac{\sin p R e^{-i\omega(t-t')}}{R\left(\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau}\right)} \propto \\ &\propto m \int d\xi d\omega e^{-i\omega(t-t')} \frac{e^{i\left(p_0 + \frac{\xi}{v}\right)R} - e^{-i\left(p_0 + \frac{\xi}{v}\right)R}}{R\left(\omega - \xi + \frac{i\omega}{2|\omega|\tau}\right)}. \end{aligned}$$

Интегрируя по  $\xi$  и беря вычет, находим (39.9).

Обратимся к вычислению ядра  $Q(\mathbf{k}, \omega)$ . Переходя к компонентам Фурье, удобно написать получающееся из (39.1) выражение  $Q$  в виде

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{Ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta} - \frac{2ie^2}{m^2} \int \mathbf{p}'_\alpha \Pi_\beta(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}' d\omega', \quad (39.10)$$

где  $p_{\pm} = (p' \pm \frac{k}{2}, \omega' \pm \frac{\omega}{2})$ . В (39.10) выделена одна из фотонных вершин, вторая вершина содержится в  $\Pi_{\beta}(p_{+}, p_{-})$ , которое с точностью до коэффициента может рассматриваться как результат включения фотонной вершины  $p'_{\beta}$  в электронную линию. Вставляя эту вершину в электронную гриновскую функцию  $G(p, p'; \omega)$ , получаем:

$$\begin{aligned} \Pi(p'_{+}, p'_{-}) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int G(p'_{+}, p''_{+}; \omega' + \frac{\omega}{2}) p'' G(p''_{-}, p'_{-}; \omega' - \frac{\omega}{2}) dp''. \end{aligned} \quad (39.11)$$

Входящие сюда функции  $G(p, p'; \omega)$  соответствуют сумме диаграмм на рис. 101 и удовлетворяют уравнению (39.3). При усреднении по расположению атомов примеси надо

учесть, что среднее от двух гриновских функций не равно произведению двух усредненных значений.

Для чистого металла выражению (39.11) соответствует диаграмма, изображенная на рис. 103, а.

После усреднения по поло-

жению атомов примеси, помимо простых диаграмм, соответствующих переходу от нулевых функций Грина  $G^{(0)}(p)$  к функциям  $G(p)$  (39.8), для величины (39.11) оказываются существенными графики, изображенные на рис. 103, б. Большой вклад от этих поправок связан с тем, что импульс фотона, стоящий в вершине,  $k \ll p_0$ , благодаря чему при интегрировании основной вклад в интеграл дает область импульсов вблизи поверхности Ферми. Диаграмма другого типа, например, график на рис. 103, в, гораздо меньше, поскольку одно из интегрирований происходит по области импульсов, удаленной от поверхности Ферми. Таким образом, усреднение величины (39.11) сводится к суммированию «лестницы» диаграмм на рис. 103, б.

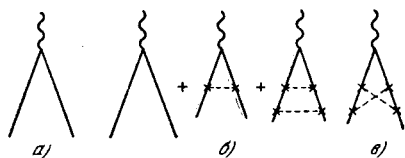


Рис. 103.

Интегральное уравнение для  $\Pi(p_+, p_-)$  выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi(p_+, p_-) = \\ = G(p_+) G(p_-) \left[ p + \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(p - p')|^2 \Pi(p'_+, p'_-) dp' \right]. \end{aligned} \quad (39.12)$$

Возможны два предельных случая:

1) аномальный скин-эффект ( $|k|v \gg 1/\tau$ ); легко убедиться, что интеграл в правой части (39.12) в этом случае пренебрежимо мал  $\sim 1/|k|v\tau \ll 1$ ;

б) нормальный скин-эффект ( $|k|v \ll 1/\tau$ ); именно этот случай представляет для нас интерес. В уравнении (39.12) при этом можно считать  $p_+ = p_-$ .

Вектор, получающийся из интеграла в правой части (39.12), будет, очевидно, направлен по  $p$ . Введем обозначение

$$p\Lambda(\omega', \omega) = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(p - p')|^2 \Pi(p'_+, p'_-) dp'. \quad (39.13)$$

Ввиду того, что  $|p| \simeq p_0$ ,  $\Lambda(\omega', \omega)$  можно считать не зависящим от  $|p|$ . Умножим (39.12) на  $\frac{n}{(2\pi)^3} |u(l - p)|^2$  и проинтегрируем по  $dp$ :

$$l\Lambda(\omega', \omega) = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(l - p)|^2 p G(p_+) G(p_-) [1 + \Lambda(\omega', \omega)] dp. \quad (39.14)$$

Подставляя для  $G(p)$  его выражение (39.8), легко найдем, что  $\Lambda(\omega', \omega)$  отлично от нуля только при  $|\omega'| < \frac{\omega}{2}$ , ибо в противном случае оба полюса в (39.14) при интегрировании по  $\xi$ , согласно (7.7), лежат в одной полуплоскости. В этом интервале  $\Lambda(\omega', \omega)$  не зависит от  $\omega'$ . Интегрируя по  $\xi$  и воспользовавшись соотношением

$$\cos \theta = \cos \theta' \cos \theta'' + \sin \theta' \sin \theta'' \cos(\varphi' - \varphi''), \quad (39.15)$$

получаем:

$$\Lambda(\omega', \omega) = \begin{cases} \frac{i}{\tau_1} \frac{1}{\omega + \frac{i}{\tau_{tr}}} & \text{при } \omega'^2 < \frac{\omega^2}{4}, \\ 0 & \text{при } \omega'^2 > \frac{\omega^2}{4}, \end{cases} \quad (39.16)$$

где

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_{tr}}, \quad \frac{1}{\tau_{tr}} = \frac{nm p_0}{(2\pi)^2} \int |u(\theta)|^2 (1 - \cos \theta) d\Omega. \quad (39.17)$$

После подстановки (39.16) в (39.12) и (39.10) и интегрирования, считая  $\omega\tau \ll 1$ , находим:

$$Q_{\alpha\beta}(\omega) = -i\omega\sigma\delta_{\alpha\beta}.$$

Как и должно быть, в проводимость  $\sigma = \frac{Ne^2\tau_{tr}}{m}$  входит «транспортное» время между соударениями.

Мы видели, таким образом, что вычислению различных характеристик металла, усредненных по положению атомов примеси, возможно придать форму своего рода полевой техники. Усреднение в нашем случае сводится к попарным усреднениям рассеяния на одинаковых атомах, каждому из которых на диаграмме может быть сопоставлена пунктирная линия, соединяющая два креста. В матричном элементе такой линии, несущей импульс  $q$ , соответствует множитель  $n |u(q)|^2$ , играющий роль  $D$ -функции для пунктирной линии. В вершине, из которой исходит пунктир, не меняется частота электронной линии. Очень существенно, что такой пунктир, охватывающий любую вершину, в которой происходит большое изменение импульса электронной линии ( $q \sim p_0$ ), дает малый вклад. В частности, по этой причине можно пренебрегать диаграммами с пересекающимися пунктирными линиями. Порядок относительной малости таких диаграмм есть  $1/p_0 l \ll 1$ .

**3. Электромагнитные свойства сверхпроводящих сплавов.** Изложенный метод мы теперь применим к изучению сверхпроводника, включающего примеси. Рассмотрим сразу же случай произвольных температур. Главное отличие по сравнению с изложенным выше состоит в том, что сверхпроводник описывается тремя функциями Грина — функциями  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{F}^+$  и  $\mathcal{F}$ . Это обстоятельство приводит к необходимости изменить диаграммную технику. Легко видеть, что в рассматриваемом случае такое видоизменение происходит совершенно аналогично § 35 и сводится к появлению  $\mathcal{F}$ - и  $\mathcal{F}^+$ -линий в диаграммах для  $\mathcal{G}$  и, аналогично,  $\mathcal{G}$ -линий в диаграммах для  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^+$ .

Гамильтониан взаимодействия с примесями содержит произведение операторов  $\bar{\psi}\psi$ . Поэтому при включении примесной вершины в каждую электронную линию возникает по две

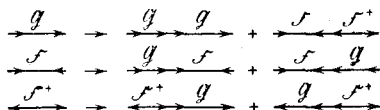


Рис. 104.

возможности отдельно для линий  $\mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}^+$ . Эти возможности приведены на рис. 104. Результат можно записать в виде

$$\mathfrak{G}(x, x') \rightarrow \mathfrak{G}(x, y) \mathfrak{G}(y, x') - \mathfrak{F}(x, y) \mathfrak{F}^+(y, x'),$$

$$\mathfrak{F}^+(x, x') \rightarrow \mathfrak{F}^+(x, y) \mathfrak{G}(y, x') + \mathfrak{G}(y, x) \mathfrak{F}^+(y, x'),$$

$$\mathfrak{F}(x, x') \rightarrow \mathfrak{G}(x, y) \mathfrak{F}(y, x') + \mathfrak{F}(x, y) \mathfrak{G}(x', y).$$

Вместо уравнения (39.3) мы будем иметь следующие уравнения для функций  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{F}^+$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(p, p'; \omega) = & \mathfrak{G}^{(0)}(p) \delta(p - p') + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \mathfrak{G}^{(0)}(p) \int u(p - p'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{G}(p'', p'; \omega) dp'' - \right. \\ & \left. - \mathfrak{F}^{(0)}(p) \int u(p - p'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{F}^+(p'', p'; \omega) dp'' \right\}, \quad (39.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^+(p, p'; \omega) = & \mathfrak{F}^{+(0)}(p) \delta(p - p') + \\ & + \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \mathfrak{F}^{+(0)}(p) \int u(p - p'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{G}(p'', p'; \omega) dp'' + \right. \\ & \left. + \mathfrak{G}^{(0)}(-p) \int u(p - p'') \sum_a e^{i(p-p'')r_a} \mathfrak{F}^+(p'', p'; \omega) dp'' \right\}. \end{aligned}$$

(39.19)

В принципе необходимо рассмотреть еще уравнение для

функции  $\mathfrak{F}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \omega)$ . Для чистого сверхпроводника  $\mathfrak{F}^{(0)}(x, x') = \mathfrak{F}^{+(0)}(x, x')$  в отсутствие поля. Не останавливаясь на доказательстве, мы заметим только, что то же самое будет иметь место и для сплавов после усреднения уравнений (39.18) и (39.19) по положению атомов примеси.

Обобщение техники усреднения предыдущего раздела на случай конечных температур и в применении к сверхпроводнику производится элементарным образом. При рассеянии электрона на статической примеси меняются только три компоненты его импульса. Поэтому пунктирной линии по-прежнему сопоставляется множитель  $n |u(\mathbf{q})|^2$ , а частота электронной линии в примесной вершине сохраняется. Все оценки, позволяющие пренебрегать пересечением пунктирных линий, а также диаграммами, в которых пунктир охватывает

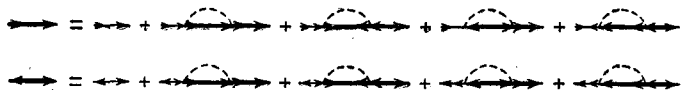


Рис. 105.

вершину с передачей импульса порядка фермиевского, остаются в силе. Для этих оценок существенны свойства гриновских функций нормального металла, для которого температуры сверхпроводящего перехода ничтожно малы. Уравнения для усредненных функций  $\mathfrak{G}(\mathbf{p})$  и  $\mathfrak{F}^+(\mathbf{p})$  изображены схематически на рис. 105. Структура их понятна без дальнейших пояснений. Заметим, что с диаграммной точки зрения уравнения рис. 105 аналогичны уравнениям § 35 (см. рис. 94) для системы с электрон-фононным взаимодействием. Отличие состоит в том, что на диаграммах рис. 105 имеются «нулевые» линии всех сортов:

$$\mathfrak{G}^{(0)}(\mathbf{p}), \mathfrak{F}^{+(0)}(\mathbf{p}) \text{ и } \mathfrak{F}^{(0)}(\mathbf{p}).$$

Систему уравнений рис. 105, пользуясь явными выражениями для функций чистого сверхпроводника  $\mathfrak{G}^{(0)}$  и  $\mathfrak{F}^{+(0)}$ , можно привести к очень простому виду:

$$\begin{aligned} (i\omega - \xi - \overline{\mathfrak{G}}_{\omega}) \mathfrak{G}(\mathbf{p}) + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}}_{\omega}^+) \mathfrak{F}^+(\mathbf{p}) &= 1, \\ (i\omega + \xi + \overline{\mathfrak{G}}_{-\omega}) \mathfrak{F}^+(\mathbf{p}) + (\Delta + \overline{\mathfrak{F}}_{\omega}^+) \mathfrak{G}(\mathbf{p}) &= 0, \end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{G}}_{\omega} &= \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \mathfrak{G}(\mathbf{p}') d\mathbf{p}', \\ \bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+} &= \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \mathfrak{F}^{+}(\mathbf{p}') d\mathbf{p}' \\ \bar{\mathfrak{G}}_{-\omega}(\mathbf{p}) &= \bar{\mathfrak{G}}_{\omega}(-\mathbf{p})\end{aligned}\quad (39.20)$$

(мы обозначили  $\mathbf{p}' = (\mathbf{p}'; \omega)$ ). Решение предыдущей системы есть (ниже показано, что  $\bar{\mathfrak{G}}_{\omega} = -\bar{\mathfrak{G}}_{-\omega}$ )

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(\mathbf{p}) &= -\frac{i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_{\omega} + \xi}{(i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_{\omega})^2 + \xi^2 + (\Delta + \bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+})^2}, \\ \mathfrak{F}^{+}(\mathbf{p}) &= \frac{\Delta + \bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+}}{(i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_{\omega})^2 + \xi^2 + (\Delta + \bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+})^2}.\end{aligned}\quad (39.21)$$

Подстановка этих выражений в (39.20) дает два уравнения для определения  $\bar{\mathfrak{G}}_{\omega}$  и  $\bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+}$ . Мы видим, что, как и раньше,  $\bar{\mathfrak{G}}_{\omega}$  содержит постоянный член, означающий аддитивную добавку к химическому потенциалу. Этот член не зависит от температуры и обязан интегрированию по  $d\mathbf{p}'$  вдали от ферми-поверхности. Поэтому этот член тот же, что и для нормального металла:

$$\delta\mu \simeq \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \frac{d\xi}{\xi}.$$

За вычетом этого члена остальная часть  $\bar{\mathfrak{G}}_{\omega}$ , как видно из уравнений (39.20) и (39.21), определяется в точности тем же интегралом, что и  $\bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+}$ . Таким образом,

$$-\frac{\bar{\mathfrak{G}}_{\omega}}{i\omega} = \frac{\bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+}}{\Delta}.$$

Введем обозначения

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \bar{\mathfrak{F}}_{\omega}^{+} = \Delta\eta_{\omega}, \quad i\tilde{\omega} = i\omega - \bar{\mathfrak{G}}_{\omega} = i\omega\eta_{\omega}.$$

Тогда для функции  $\eta_{\omega}$  получим уравнение

$$\eta_{\omega} = 1 + \frac{\eta_{\omega}}{2\pi} \int \frac{d\xi}{\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2)\eta_{\omega}^2},$$

решение которого есть

$$\eta_{\omega} = 1 + \frac{1}{2\tau \sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}. \quad (39.22)$$

Таким образом, усредненные по положению атомов примесей функции  $\mathfrak{G}(p)$  и  $\mathfrak{F}^+(p)$  могут быть получены из функций чистого сверхпроводника заменой

$$\{\omega, \Delta\} \rightarrow \{\omega\eta_{\omega}, \Delta\eta_{\omega}\}. \quad (39.23)$$

Нетрудно проверить, что, как и для случая нормального металла, эти формулы в координатном пространстве означают умножение нулевых функций на  $e^{-R/2l}$ . Отсюда, в частности, следует, что величина

$$\Delta = |\lambda| \mathfrak{F}^+(x, x)$$

в сплаве совпадает с  $\Delta$  чистого сверхпроводника. Поскольку, как мы видели в § 36, термодинамические величины зависят в сверхпроводнике только от  $\Delta$ , то тем самым оправдывается сделанное выше утверждение, что термодинамические свойства сверхпроводника не меняются в присутствии примесей при достаточно малых концентрациях примеси<sup>1)</sup>.

Перейдем к вопросу о температурной зависимости глубины проникновения слабого статического магнитного поля в сверхпроводящий сплав. Выражение для плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  в линейном по полю приближении в соответствии с (37.10) имеет вид

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{m^2} T \sum_{\omega} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'} )_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \int [\mathfrak{G}_{\omega}(\mathbf{r}, l) (A(l), \nabla_l) \mathfrak{G}_{\omega}(l, \mathbf{r}') + \\ + \mathfrak{F}_{\omega}(l, \mathbf{r}) (A(l), \nabla_l) \mathfrak{F}_{\omega}^+(\mathbf{r}', l)] dl - \frac{Ne^2}{m} A(\mathbf{r}),$$

где, однако, функции  $\mathfrak{G}_{\omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  и  $\mathfrak{F}_{\omega}^+(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  включают в себя взаимодействие с атомами примеси. Усредняя это равенство по положениям примесей и переходя к компонентам Фурье,

<sup>1)</sup> Может показаться, что этот вывод верен только с точностью до членов порядка  $\sim 1/\omega_D \tau \sim 10^{-6}$  см/л (см. (32.2), (34.37)). В более реалистической фононной модели обрезание происходит по частотам, благодаря чему таких членов вообще не возникает. Остальные результаты совпадают в обоих моделях.

представим ядро  $Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k})$  следующим образом:

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = \frac{Ne^2}{m} \delta_{\alpha\beta} + \frac{2e^2 T}{(2\pi)^3 m^2} \sum_{\omega'} \int \mathbf{p}' \Pi_{\beta}^{(1)}(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}' \quad (39.24)$$

( $p'_{\pm} = p' \pm \frac{k}{2}$ ,  $k = (\mathbf{k}, 0)$ ), где  $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$  есть компонента Фурье от

$$\Pi^{(1)}(x-y, y-x') =$$

$$= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} [\mathfrak{G}(x, y') \mathfrak{G}(y, x') - \overline{\mathfrak{F}^+(y', x') \mathfrak{F}(x, y)}];$$

$$\Pi^{(1)}(x-y, y-x') = \frac{T^2}{(2\pi)^6} \sum_{\omega_+, \omega_-} \int \int \Pi^{(1)}(p_+, p_-) \times \\ \times e^{ip_+(x-y) - i\omega_+(\tau_x - \tau_y)} e^{ip_-(y-x') - i\omega_-(\tau_y - \tau_{x'})} dp_+ dp_-.$$

Как и в случае нормального металла, среднее от произведения двух гриновских функций не равно произведению средних. Для выполнения усреднения по положениям атомов

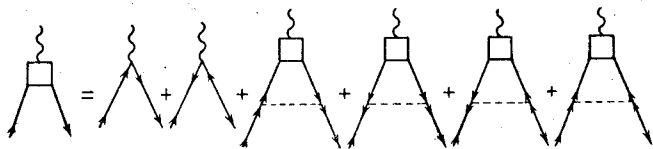


Рис. 106.

примесей опять надлежит просуммировать целую совокупность диаграмм. Поскольку сверхпроводимость искажает гриновские функции лишь вблизи поверхности Ферми, нужные диаграммы, как и в предыдущем разделе, будут «лестничного» типа. Наличие трех разных гриновских функций в сверхпроводнике приведет, однако, к несколько более сложным уравнениям, чем уравнение (39.12), выражающее суммирование диаграмм рис. 103 в нормальном металле. Из рис. 106 видно, что для того, чтобы определить  $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$ , надо знать еще три величины, отличающиеся на графике от  $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$  иными направлениями стрелок на электронной линии. Каждой из этих величин отвечает

своя комбинация  $\mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{F}^+$ :

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(x-y, y-x) &= \\ &= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} [\overline{\mathfrak{F}^+(x, y') \mathfrak{G}(y, x')} + \overline{\mathfrak{G}(y, x) \mathfrak{F}^+(y', x')}], \\ \Pi^{(3)}(x-y, y-x') &= \\ &= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} [\overline{\mathfrak{G}(y, x) \mathfrak{G}(x', y')} - \overline{\mathfrak{F}^+(x, y') \mathfrak{F}(y, x')}], \\ \Pi^{(4)}(x-y, y-x') &= \\ &= -\frac{i}{2} (\nabla_y - \nabla_{y'})_{y' \rightarrow y} [\overline{\mathfrak{G}(x, y') \mathfrak{F}(y, x')} + \overline{\mathfrak{F}(x, y) \mathfrak{G}(x', y')}]. \end{aligned}$$

Таким образом, вместо простого уравнения (39.12) в рассматриваемом случае необходимо решать систему из четырех уравнений для компонент Фурье  $\Pi^{(i)}(p_+, p_-)$  ( $i=1, \dots, 4$ ).

Введем обозначение

$$\Lambda^{(i)}(\omega') = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(\mathbf{p} - \mathbf{p}')|^2 \Pi^{(i)}(p'_+, p'_-) d\mathbf{p}'. \quad (39.25)$$

Принцип построения уравнений ясен из рис. 106. Например, имеем:

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(p_+, p_-) &= p \{ \mathfrak{G}(p_+) \mathfrak{G}(p_-) + \mathfrak{F}(p_+) \mathfrak{F}^+(p_-) \} + \\ &+ \mathfrak{G}(p_+) \mathfrak{G}(p_-) \Lambda^{(1)}(\omega) - \mathfrak{F}^+(p_+) \mathfrak{G}(p_-) \Lambda^{(2)}(\omega) - \\ &- \mathfrak{F}(p_+) \mathfrak{F}^+(p_-) \Lambda^{(3)}(\omega) - \mathfrak{G}(p_+) \mathfrak{F}(p_-) \Lambda^{(4)}(\omega). \end{aligned}$$

Аналогично выглядят остальные четыре уравнения. Подстановка их в (39.25) приводит к системе уравнений для величин  $\Lambda^{(i)}(\omega)$ . Мы не будем выписывать ее полностью, поскольку в общем виде эта система может быть решена только в случае сферически симметричного рассеяния. Нас, однако, не будет интересовать решение при произвольных соотношениях между величинами. При малых концентрациях сверхпроводящий сплав близок по своим свойствам к чистому сверхпроводнику. Мы уже говорили, что большинство последних принадлежит к пиппардовскому или промежуточному типу. Внесение примесей, уменьшая радиус корреляции, переводит при достаточной концентрации примеси сверхпроводник в сверхпроводящий сплав лондоновского типа, для

которого электродинамика является уже локальной. Критерием локальности в данном случае служит соотношение между глубиной проникновения  $\delta$  и длиной свободного пробега относительно рассеяния электронов на атомах примеси  $l$  (или, что то же, между величиной характерных  $|k| \sim \frac{1}{\delta}$  и  $\frac{1}{l}$ ).

Ниже мы будем считать, что концентрация примесей такова, что сплав стал лондоновским ( $|k|l \ll 1$ ). В этой ситуации вышеупомянутая система уравнений значительно упрощается. В  $\Pi^{(1)}(p_+, p_-)$  можно пренебречь величиной  $k(p_+ = p_-)$ ; оказывается, что при этом

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = -\Lambda^{(3)}(\omega);$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = \Lambda^{(4)}(\omega)$$

и

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = p\Lambda^{(1)}(\omega);$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = p\Lambda^{(2)}(\omega).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(p, p) = p \{ \mathfrak{G}^2(p) + \mathfrak{F}^{+2}(p) \} [1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - \\ - 2p\mathfrak{G}(p)\mathfrak{F}^+(p)\Lambda^{(2)}(\omega), \quad (39.26) \end{aligned}$$

а система уравнений для  $\Lambda^{(i)}(\omega)$  принимает вид

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = [\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} + \overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}}] [1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - 2\overline{\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{F}_\omega^+} \Lambda^{(2)}(\omega),$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = 2\overline{\mathfrak{G}_\omega\mathfrak{F}_\omega^+} [1 + \Lambda^{(1)}(\omega)] - [\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} + \overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}}] \Lambda^{(2)}(\omega),$$

где

$$p\overline{\mathfrak{G}_\omega^2} = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(p-p')|^2 \mathfrak{G}^2(p') p' dp' = \frac{\Delta^2 p}{4\tau_1 \eta_\omega (V\omega^2 + \Delta^2)^3},$$

$$p\overline{\mathfrak{F}_\omega^{+2}} = \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(p-p')|^2 \mathfrak{F}^{+2}(p') p' dp' = \frac{\Delta^2 p}{4\tau_1 \eta_\omega (V\omega^2 + \Delta^2)^3},$$

$$\begin{aligned} p\overline{\mathfrak{F}_\omega^+\mathfrak{G}_\omega} &= \frac{n}{(2\pi)^3} \int |u(p-p')|^2 \mathfrak{F}^+(p') \mathfrak{G}(p') p' dp' = \\ &= \frac{i\Delta\omega p}{4\tau_1 \eta_\omega (V\omega^2 + \Delta^2)^3}. \end{aligned}$$

Решение приводит к выражениям для  $\Lambda^{(1)}(\omega)$ ,  $\Lambda^{(2)}(\omega)$ :

$$\Lambda^{(1)}(\omega) = \frac{\Delta^2}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2) \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\tau_{tr}} \right)},$$

$$\Lambda^{(2)}(\omega) = \frac{i\Delta\omega}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2) \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\tau_{tr}} \right)}.$$

Подстановка последних в (39.26) и подстановка  $\Pi^{(1)}(p, p)$  в (39.24) дают следующее выражение для ядра  $Q(k)$ :

$$Q \equiv Q(k) = \frac{Ne^2}{m} \left\{ 1 + T \sum_{\omega} \int d\tilde{z} \left[ (\xi^2 - \omega^2 \eta_{\omega}^2 + \Delta^2 \eta_{\omega}^2) \times \right. \right. \\ \left. \times \left( 1 + \frac{\Delta^2}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2} \eta_{\omega tr}} \right) + \frac{2\Delta^2 \omega^2 \eta_{\omega}^2}{2\tau_1(\omega^2 + \Delta^2)^{3/2} \eta_{\omega tr}} \right] \frac{1}{[\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2) \eta_{\omega}^2]^2} \right\} \quad (39.27)$$

(мы ввели обозначение  $\eta_{\omega tr} = 1 + \frac{1}{2\tau_{tr} \sqrt{\omega^2 + \Delta^2}}$ ). Здесь, как

в § 37, мы снова сталкиваемся с формально расходящимся интегралом. По тем же основаниям в первую очередь следует выполнять суммирование по частотам. Сгруппировав в круглых скобках члены в виде  $\xi^2 + (\omega^2 + \Delta^2) \eta_{\omega}^2 - 2\omega^2 \eta_{\omega}^2$ , воспользуемся преобразованием Абеля, обобщающим для рядов принцип интегрирования по частям. Именно, имеет место

$$\sum_{n=1}^k (B_n - B_{n-1}) u_n = B_k u_k - B_0 u_1 - \sum_{n=1}^{k-1} (u_{n+1} - u_n) B_n.$$

Применяя это к ряду

$$2\pi T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + (\Delta^2 + \omega^2) \eta_{\omega}^2},$$

где

$$B_n = (2n + 1) \pi T = \omega,$$

$$B_n - B_{n-1} = 2\pi T,$$

удается сократить формально расходящиеся члены в (39.27).

После этого получаем:

$$Q = \frac{Ne^2}{m} 2\pi T \Delta^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + \Delta^2) \left( \sqrt{\omega^2 + \Delta^2} + \frac{1}{2\tau_{tr}} \right)}. \quad (39.28)$$

В эту формулу входит только «транспортное» время между соударениями. Для глубины проникновения  $\delta$  имеем:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{4\pi Q}}.$$

При  $\frac{1}{\tau} \rightarrow 0$  эта формула переходит в обычную лондоновскую формулу:

$$\delta = \sqrt{\frac{m}{4\pi N_s e^2}},$$

где  $N_s$  — «число сверхпроводящих электронов».

В обратном случае  $l \ll \xi_0$  можно пренебречь корнем в скобке (39.28). Остающийся ряд легко суммируется. В результате для глубины проникновения «грязных» сплавов получаем:

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{\Delta \sigma \operatorname{th} \frac{\Delta}{2T}}},$$

где  $\sigma$  — проводимость нормального металла.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, ГТТИ, 1951.
- 1а. Р. Е. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956.
2. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 11, 592, 1941.
3. Л. Д. Ландау, Journ. of Phys. 11, 91, 1947.
4. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 31, 536, 1956.
5. R. P. Feynman, Phys. Rev. 94, 262, 1954.
6. J. L. Yarnell, G. P. Arnold, P. J. Bendt, E. C. Kerr, Phys. Rev. 113, 1379, 1959.
7. И. М. Халатников, УФН 59, 673, 1956; 60, 69, 1956.
8. Е. М. Лифшиц, Приложение к книге В. Кеезома (см. 9).
9. В. Кеезом, Гелий, ИЛ, 1949.
10. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 30, 1058, 1956.
11. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 32, 59, 1957.
12. D. F. Brewer, J. G. Daunt, A. K. Sreedhar, Phys. Rev. 115, 836, 1959.
13. E. C. Kerr, Phys. Rev. 96, 551, 1954.
14. А. А. Абрикосов, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ 35, 771, 1958.
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, ГТТИ, 1948.
16. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. 11, 77, 1947.
17. K. Huang, C. N. Yang, J. M. Luttinger, Phys. Rev. 105, 776, 1957.
18. K. Brueckner, K. Sawada, Phys. Rev. 106, 1117, 1957.
19. K. Huang, C. N. Yang, Phys. Rev. 105, 767, 1957.
20. T. D. Lee, C. N. Yang, Phys. Rev. 105, 1119, 1957.
21. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ 33, 1154, 1957.
22. В. М. Галицкий, ЖЭТФ 34, 151, 1958.
23. В. А. Беляков, ЖЭТФ 40, 1210, 1961.
24. А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика. Физматгиз., 1959.
25. M. Gell-Mann, F. Low, Phys. Rev. 84, 350, 1951.
26. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, ЖЭТФ 34, 139, 1958.
27. H. Lehmann, Nuovo Cimento 11, 342, 1954.
28. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ, 32, 399, 1957.
29. T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. 14, 351, 1955.
30. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, ЖЭТФ 36, 900, 1959.
31. Е. С. Фрадкин, ЖЭТФ 36, 1286, 1959.
32. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 34, 262, 1958.
33. Н. Н. Боголюбов, С. В. Тябликов, ДАН 126, 53, 1959; см. также Д. Н. Зубарев, УФН 71, 71, 1960.



34. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 35, 97, 1958.
35. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 37, 1794, 1959.
- 35a. J. M. Luttinger, J. C. Ward, Phys. Rev. 118, 1417, 1960;  
J. M. Luttinger, Phys. Rev. 119, 1153, 1960.
36. А. Б. Мигдал, ЖЭТФ 34, 1438, 1958.
37. M. Gell-Mann, K. Brueckner, Phys. Rev. 106, 364, 1957.
38. А. А. Веденов, ЖЭТФ 36, 641, 1959.
39. С. Т. Беляев, ЖЭТФ 34, 417, 1958.
40. С. Т. Беляев, ЖЭТФ 34, 433, 1958.
41. D. Pines, N. M. Hugengoltz, Phys. Rev. 116, 489, 1959.
42. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 36, 1168, 1959.
43. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 39, 216, 1960.
44. D. G. Henshaw, A. D. B. Woods, B. N. Brockhouse,  
Bull. Am. Phys. Soc. 5, 12, C3, 1960.
45. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплош-  
ных сред, ГИТТЛ, 1957.
46. И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 36,  
1797, 1959.
47. М. И. Рязанов, ЖЭТФ 32, 1244, 1957.
48. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаев-  
ский, ЖЭТФ 37, 229, 1959.
49. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 29, 94, 1955.
50. F. London, Zs. f. Physik 60, 491, 1930.
51. H. B. C. Casimir, D. Polder, Phys. Rev. 73, 360, 1948.
52. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 37, 577, 1959.
53. E. Maxwell, Phys. Rev. 78, 447, 1949; 79, 173, 1950;  
C. A. Reynolds et al., Phys. Rev. 78, 487, 1950.
54. H. Fröhlich, Phys. Rev. 79, 845, 1950.
55. L. N. Cooper, Phys. Rev. 104, 1189, 1957.
56. J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev.  
108, 1175, 1957.
57. Н. Н. Боголюбов, ЖЭТФ 34, 58, 73, 1958.
58. Н. Н. Боголюбов, В. В. Толмачев, Д. В. Ширков,  
Новый метод в теории сверхпроводимости, Изд-во АН СССР,  
1958.
59. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 34, 735, 1958.
60. Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ 38, 966, 1960.
61. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, УФН 65, 551, 1958.
62. H. London, F. London, Proc. Roy. Soc. A149, 71, 1935;  
Physica 2, 341, 1935.
63. A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc. A216, 547, 1953.
64. D. C. Mattis, J. Bardeen, Phys. Rev. 3, 412, 1958.
65. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. М. Халатни-  
ков, ЖЭТФ 35, 265, 1958; 37, 187, 1959.
66. Л. П. Горьков, ЖЭТФ 36, 1918, 1959.
67. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 20, 1064, 1958.
68. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, ЖЭТФ 35, 1158, 1958;  
36, 319, 1959.
69. S. F. Edwards, Phil. Mag. 3, 1020, 1958.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                 |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Предисловие . . . . .                                                                                                                                                           | 7         |
| <b>Глава I. Общие свойства систем из многих частиц при низких температурах . . . . .</b>                                                                                        | <b>9</b>  |
| § 1. Элементарные возбуждения. Энергетический спектр и свойства жидкого $\text{He}^4$ при низких температурах . . .                                                             | 9         |
| 1. Введение. Квазичастицы (9). 2. Спектр бозе-жидкости (15). 3. Сверхтекучесть (22).                                                                                            |           |
| § 2. Ферми-жидкость. . . . .                                                                                                                                                    | 28        |
| 1. Возбуждения в ферми-жидкости (28). 2. Энергия квазичастиц (32). 3. Звук (38).                                                                                                |           |
| § 3. Вторичное квантование . . . . .                                                                                                                                            | 44        |
| § 4. Разреженный бозе-газ. . . . .                                                                                                                                              | 48        |
| § 5. Разреженный ферми-газ . . . . .                                                                                                                                            | 55        |
| <b>Глава II. Методы квантовой теории поля при <math>T=0</math> . .</b>                                                                                                          | <b>64</b> |
| § 6. Представление взаимодействия . . . . .                                                                                                                                     | 64        |
| § 7. Гриновская функция . . . . .                                                                                                                                               | 74        |
| 1. Определение. Гриновские функции свободных частиц (74). 2. Аналитические свойства (80). 3. Физический смысл полюсов (85). 4. Гриновская функция системы во внешнем поле (91). |           |
| § 8. Основные принципы диаграммной техники . . . . .                                                                                                                            | 93        |
| 1. Переход от переменной $N$ к переменной $\mu$ (93). 2. Теорема Вика (94). 3. Диаграммы Файнмана (97).                                                                         |           |
| § 9. Правила построения диаграмм для различных типов взаимодействия. . . . .                                                                                                    | 103       |
| 1. Диаграммная техника в координатном пространстве. Примеры (103). 2. Диаграммная техника в импульсном пространстве. Примеры (114).                                             |           |

|                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 10. Уравнение Дайсона. Вершинная часть. Многочастичные функции Грина. . . . .                                                                                                                                                           | 120 |
| 1. Суммирование диаграмм. Уравнение Дайсона (120).                                                                                                                                                                                        |     |
| 2. Вершинные части. Многочастичные функции Грина (125). 3. Энергия основного состояния (133).                                                                                                                                             |     |
| <b>Глава III. Диаграммная техника при конечных температурах</b> . . . . .                                                                                                                                                                 | 136 |
| § 11. Температурные гриновские функции. . . . .                                                                                                                                                                                           | 136 |
| 1. Общие свойства (136). 2. Температурные гриновские функции свободных частиц (142).                                                                                                                                                      |     |
| § 12. Теория возмущений . . . . .                                                                                                                                                                                                         | 144 |
| 1. Представление взаимодействия (144). 2. Теорема Вика (148).                                                                                                                                                                             |     |
| § 13. Диаграммная техника в координатном пространстве. Примеры . . . . .                                                                                                                                                                  | 154 |
| § 14. Диаграммная техника в импульсном пространстве . . .                                                                                                                                                                                 | 167 |
| 1. Переход к импульсному представлению (167). 2. Примеры (171).                                                                                                                                                                           |     |
| § 15. Ряд теории возмущений для термодинамического потенциала $\Omega$ . . . . .                                                                                                                                                          | 181 |
| § 16. Уравнение Дайсона. Многочастичные функции Грина . .                                                                                                                                                                                 | 187 |
| 1. Уравнение Дайсона (187). 2. Связь гриновских функций с термодинамическим потенциалом $\Omega$ (192).                                                                                                                                   |     |
| § 17. Временные гриновские функции $G$ при конечных температурах. Аналитические свойства гриновских функций . . . . .                                                                                                                     | 195 |
| <b>Глава IV. Теория ферми-жидкости.</b> . . . .                                                                                                                                                                                           | 208 |
| § 18. Свойства вершинной части при малых передачах импульса. Нулевой звук . . . . .                                                                                                                                                       | 208 |
| § 19. Эффективная масса. Связь граничного импульса с числом частиц. Бозевские ветви спектра. Теплоемкость . .                                                                                                                             | 215 |
| 1. Вспомогательные соотношения (215). 2. Доказательство основных соотношений теории ферми-жидкости (219). 3. Бозевские ветви спектра (221). 4. Другой вывод связи граничного импульса $p_0$ с числом частиц (223). 5. Теплоемкость (227). |     |
| § 20. Особенности вершинной части в случае малого суммарного импульса сталкивающихся частиц . . . . .                                                                                                                                     | 232 |
| § 21. Взаимодействие электронов с фононами при $T = 0$ . .                                                                                                                                                                                | 236 |
| 1. Вершинная часть (237). 2. Гриновская функция фононов (239). 3. Гриновская функция электронов (241).                                                                                                                                    |     |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 22. Некоторые свойства вырожденной плазмы. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 246        |
| 1. Постановка задачи (246). 2. Вершинная часть для малых передач импульса (249). 3. Электронный спектр (255). 4. Термодинамические функции (259).                                                                                                                                                       |            |
| <b>Глава V. Система взаимодействующих бозе-частиц. . .</b>                                                                                                                                                                                                                                              | <b>263</b> |
| § 23. Применение методов теории поля к системе частиц Бозе при абсолютном нуле температур. . . . .                                                                                                                                                                                                      | 263        |
| § 24. Функция Грина. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                            | 275        |
| 1. Структура уравнений (275). 2. Аналитические свойства функций Грина (280). 3. Поведение функций Грина при малых импульсах (285).                                                                                                                                                                      |            |
| § 25. Разреженный неидеальный бозе-газ. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                         | 287        |
| 1. Диаграммная техника (287). 2. Связь химического потенциала с собственно энергетическими частями одночастичных функций Грина (290). 3. Приближение малой плотности (294). 4. Эффективный потенциал взаимодействия (298). 5. Функции Грина бозе-газа в приближении малой плотности. Спектр (302).      |            |
| § 26. Свойства спектра одночастичных возбуждений вблизи точки окончания спектра. . . . .                                                                                                                                                                                                                | 303        |
| 1. Постановка вопроса (303). 2. Система уравнений (306). 3. Свойства спектра вблизи порога рождения фонона (309). 4. Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с параллельными не равными нулю импульсами (313). 5. Распад на два возбуждения, вылетающих под углом друг к другу (315). |            |
| § 27. Применение методов теории поля к системе взаимодействующих бозе-частиц при конечной температуре. .                                                                                                                                                                                                | 318        |
| <b>Глава VI. Электромагнитное излучение в поглощающей среде. . . . .</b>                                                                                                                                                                                                                                | <b>325</b> |
| § 28. Гриновские функции излучения в поглощающей среде. .                                                                                                                                                                                                                                               | 325        |
| § 29. Вычисление диэлектрической постоянной. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 335        |
| § 30. Силы Ван-дер-Ваальса в неоднородном диэлектрике. . . . .                                                                                                                                                                                                                                          | 340        |
| § 31. Молекулярные силы взаимодействия между твердыми телами. . . . .                                                                                                                                                                                                                                   | 347        |
| 1. Силы взаимодействия между твердыми телами (347). 2. Силы взаимодействия между атомами в растворах (355). 3. Тонкая пленка на поверхности твердого тела (359).                                                                                                                                        |            |

|                                                                                                                                                                                                        |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава VII. Теория сверхпроводимости . . . . .</b>                                                                                                                                                   | <b>362</b> |
| § 32. Общие сведения. Выбор модели . . . . .                                                                                                                                                           | 362        |
| 1. Явление сверхпроводимости (362). 2. Модель. Гамильтониан взаимодействия (364).                                                                                                                      |            |
| § 33. Феномен Купера. Неустойчивость основного состояния системы невзаимодействующих ферми-частиц относительно сколь угодно слабого притяжения между частицами . . . . .                               | 367        |
| 1. Уравнение для вершинной части (367). 2. Свойства вершинной части (372). 3. Определение температуры перехода (374).                                                                                  |            |
| § 34. Система основных уравнений для сверхпроводника . . .                                                                                                                                             | 376        |
| 1. Сверхпроводник при абсолютном нуле температур (376). 2. Уравнения при наличии внешнего электромагнитного поля. Градиентная инвариантность (383). 3. Сверхпроводник при конечных температурах (385). |            |
| § 35. Вывод уравнений теории сверхпроводимости в фононной модели. . . . .                                                                                                                              | 388        |
| § 36. Термодинамика сверхпроводников . . . . .                                                                                                                                                         | 393        |
| 1. Зависимость щели в спектре от температуры (393). 2. Термодинамика сверхпроводника (394).                                                                                                            |            |
| § 37. Сверхпроводник в слабом электромагнитном поле . . .                                                                                                                                              | 398        |
| 1. Постоянное слабое магнитное поле (398). 2. Сверхпроводник в переменном поле (408).                                                                                                                  |            |
| § 38. Свойства сверхпроводника в произвольном магнитном поле вблизи температуры перехода . . . . .                                                                                                     | 414        |
| § 39. Теория сверхпроводящих сплавов . . . . .                                                                                                                                                         | 421        |
| 1. Постановка вопроса (421). 2. Остаточное сопротивление нормального металла (423). 3. Электромагнитные свойства сверхпроводящих сплавов (432).                                                        |            |
| <b>Литература . . . . .</b>                                                                                                                                                                            | <b>442</b> |

*Абрикосов Алексей Алексеевич,  
Горьков Лев Петрович,  
Дзялошинский Игорь Ехцельевич*

**«Методы квантовой теории поля  
в статистической физике»**

**М., Физматгиз, 1962 г., 444 стр. с илл.**