

ПРИЛОЖЕНИЯ

Л. С. Полак

ГУСТАВ РОБЕРТ КИРХГОФ
(1824—1887)

Главная цель естествознания —
раскрывать единство сил природы.

Л. Больцман

I. ЖИЗНЬ

«Внешне жизнь Кирхгофа не отмечена ничем таким, что соответствовало бы необыкновенности его гения; напротив, его жизненный путь был обычным для немецкого университетского профессора. Великие события совершались исключительно в его голове»¹.

Густав Роберт Кирхгоф родился 12 марта 1824 г. в Германии — стране философии и фантазии², в Кенигсберге (ныне Калининград, СССР). Он был младшим сыном советника юстиции Карла-Фридриха Кирхгофа. Отец будущего ученого был спокойным серьезным человеком, а мать — женщиной с быстрым живым умом.

С детства Кирхгоф отличался общительностью, позднее у него выработался замкнутый, молчаливый характер. Вместе со старшими братьями (один из которых впоследствии стал врачом, а другой — советником суда сначала в Берлине, а затем в Лейпциге) Кирхгоф посещал в Кенигсберге гимназию Кнайпгофа.

Уже в гимназические годы определились способности Кирхгофа к математике и физике.

В 18 лет (в 1842 г.), получив аттестат зрелости, Кирхгоф поступил в Кенигсбергский университет, который дал ему глубокое математическое образование. Он слушал лекции Ф. Неймана, Бесселя, Якоби, Ришело.

Влияние Ф. Неймана на Кирхгофа видно во всех теоретических работах последнего. Ф. Нейман постоянно подчеркивал значение математики в естествознании, дающей ясное и точное знание.

Ф. Нейман работал в основном в области математической физики, под которой тогда понималось решение физических задач с помощью дифференциальных уравнений (главным образом в частных производных) на основе представления о непрерывных (сплошных) средах и процессах в них (от этого рассмотрения естественным был переход к физике полей). В эти же годы в области математической физики во Франции работали Фурье и Коши, а в Англии (в сороковых годах XIX в.) Стокс и В. Томсон и др.

С 1826 г. Ф. Нейман в течение 50 лет работал в Кенигсберге, и созданная им и Якоби кенигсбергская школа была первой, длительное время процветав-

¹ Больцман Л. Густав Роберт Кирхгоф. Речь, произнесенная на праздновании 30-й годовщины основания Университета в Граце. 15.XI.1887 г. // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 30.

² Стендаль. Собр. соч.: В 15 т. М.: Правда, 1959. Т. 5. С. 364.

шай школой, влиявшей на развитие математической физики в Германии, Франции, Англии.

В математическом семинаре Ф. Неймана Кирхгоф в 1845 г. (21 года) сделал свою первую работу о прохождении электричества через пластинку. В 23 года ему была присуждена первая ученая степень, и он получил от философского факультета университета редко предоставлявшуюся стипендию для научного путешествия в Париж. Осуществлению этой поездки помешали, по-видимому, политические события во Франции.

В 1848 г. Кирхгоф получил должность приват-доцента в Берлинском университете. В том же году он становится действительным членом молодого Берлинского физического общества³. Создание этого общества относится к 1845 г., когда шесть молодых ученых объединились для совместной работы. Идея организации общества была выдвинута Эмилем Дюбуа Реймоном, а организовал его Г. Карстен — приват-доцент физики в Берлине. Под его руководством вновь созданное общество стало издавать реферативный журнал «Fortschritte der Physik», содержащий годичные обзоры физической литературы.

В общество входили Г. Гельмгольц, Р. Клаузиус и другие физики, а также офицер инженерных войск Вернер Сименс (в 1849 г. он совместно с И. Г. Гальске основал электротехническую фирму, которая приобрела мировую известность). «Окружавшая атмосфера быстро растущего крупного европейского города не- мало способствовала развитию этого общества, которое благодаря созданной им оживленной и вдохновляющей к творчеству научной связи вскоре стало средоточием небывалого расцвета духовной жизни»⁴.

Благодаря помощи Магнуса и Якоби в 1850 г. Кирхгоф был приглашен экстраординарным (т. е. внештатным) профессором физики в Бреслау (штатным профессором физики в это время там был М. Франкенгейм). Через год в Бреслау приехал из Марбурга Роберт Вильгельм Бунзен (1811—1899). И хотя вскоре Бунзен принял приглашение в Гейдельберг на место Гмелина, между молодыми учеными на всю жизнь завязалась большая личная и научная дружба.

Бунзен постарался привлечь в Гейдельбергский университет Кирхгофа. Это удалось ему в 1854 г., когда Жолли (Jolly Ph.) переехал в Мюнхен и тем самым освободилось место профессора физики. Кирхгоф, отказавшись от приглашений в Бонн на место Ю. Плюккера и в Берлин на место Г. Магнуса, переехал в Гейдельберг.

В 1857 г. Кирхгоф женился на дочери профессора математики Кенигсбергского университета Ф. Ришело Кларе. Гейдельбергские друзья Кирхгофа охотно приняли в свой круг веселую молодую женщину.

Через некоторое время в Гейдельберг приехал и Г. Гельмгольц (тогда профессор физиологии), а позднее — математик Л. Кенигсбергер. Постепенно образовалась гейдельбергская школа математической физики, продолжавшая традиции кенигсбергской школы. В Гейдельберге Кирхгоф работал в течение 20 лет (до 1874 г.). Здесь он сделал свои важнейшие открытия, здесь же проходили

³ Warburg E. Zur Geschichte der Physikalische Gesellschaft // Naturwiss. 1925. N. 3. S. 35—38; Goldstein E. Aus vergangenen Tagen der Berliner Physikalischen Gesellschaft // Ibid. S. 39—44.

⁴ Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 265.



Берлинский университет (современный вид)

его совместные с Бунзеном исследования, приведшие к созданию спектрального анализа (1859 г. — год открытия спектрального анализа — принес Кирхгофу европейское признание и известность).

С 1863 г. обстановка работы Кирхгофа значительно улучшилась — в новом здании университета ему была отведена большая лаборатория и рядом квартира. Все, казалось, складывалось хорошо. Однако вскоре он повредил ногу, и хотя со временем боли в ноге утихли, но никогда не прекращались вполне.

В 1869 г. его постигло большое несчастье — умерла жена, оставив ему двух сыновей и двух дочерей. Он писал своему другу П. Дюбуа-Реймону (1831—1889 гг.): «Я имел в жизни много незаслуженного счастья; теперь ко мне пришло несчастье. Разрушена моя семья. Я хочу отвлечься научными занятиями, но работа удается плохо. Нож, которым я хочу резать, тупой»⁵. Тем не менее в этом же году Кирхгоф написал три работы.

В 1872 г. Кирхгоф женился вторично — на Луизе Броммель из Гослара, которая тогда работала в глазной клинике в Гейдельберге. В этом браке детей у Кирхгофа не было, но он был счастлив и как-то сказал, что для него дважды цвела весна жизни.

В 70-е годы XIX в. Гейдельбергский университет из-за недостатка средств стал приходить в упадок, и друзья Кирхгофа постепенно начали переезжать в другие университеты. И тогда Кирхгоф принимает приглашение переехать в Берлин, отклонив до этого предложение заведовать обсерваторией, построенной в Потсдаме.

⁵ Warburg E. Zur Erinnerung an Gustav Kirchhoff // Naturwiss. 1925. N. 11. S. 209.

В 1875 г. он становится профессором теоретической физики Берлинского университета. Из-за болезни глаз и острой боли в ноге он вынужден прекратить экспериментальные работы и целиком посвятить себя исследованиям в области математической физики. В 1876 г. из-за плохого состояния здоровья Кирхгоф перестал читать лекции; по этой же причине он отказался от почетной должности ректора, на которую был избран. В зимнем семинаре 1885/86 г., собрав последние силы, Кирхгоф прочел свой последний курс лекций.

Последние летние отпуска он, всегда любивший природу, проводил вместе с семьей в Бадене и Вернигероде на Граце, совершая прогулки в кресле на колесах. Физически надломленный, но еще бодрый духом Кирхгоф продолжал работать до последних дней. Он умер (от опухоли в мозгу) 17 октября 1887 г.

Кирхгоф был выбран сначала членом-корреспондентом (в 1861 г.), а затем в 1870 г. действительным членом Берлинской Академии наук. Он был избран по математическому отделению (в представлениях справедливо отмечено, что с неменьшим правом он мог бы быть избран по физическому отделению)⁶.

Интересно отметить, что математики в своем представлении расположили его работы по значимости в следующем порядке: теория упругости, электричество, гидродинамика, спектры и спектральный анализ, термодинамика излучения (отметив, впрочем, особую важность последней). Физики, наверное, расположили бы работы Кирхгофа в обратном порядке. Среди подписавших представление Кирхгофа мы видим таких замечательных ученых, как Вейерштрасс, Кронекер, Куммер и другие.

В 1863 г. Кирхгоф был избран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук, а в 1870 г. — членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Предником Кирхгофа по кафедре теоретической физики стал Макс Планк⁷.

II. УЧЕНЫЙ, УЧИТЕЛЬ

Кирхгоф принадлежит к тому поколению ученых 40—70-х годов XIX в., когда возникла фигура физика-теоретика, однако еще не отделившаяся полностью от экспериментальных исследований. Г. Гельмгольц, Л. Больцман, Дж. К. Максвелл, В. Томсон, Г. Кирхгоф, Г. Герц и многие другие разрабатывали основы теоретической физики, создавали методы математической физики и проводили эксперименты, достаточно сложные для их времени и имевшие в большинстве случаев принципиальное значение. Только в следующем поколении физик-теоретик отдалился от реального экспериментирования настолько, что стало необходимым различать физиков-теоретиков и физиков-экспериментаторов.

⁶ См. наст. издание раздел «Дополнения» (Представление Густава Роберта Кирхгофа в действительные члены Берлинской Академии наук). — Примеч. ред.

⁷ Биографические данные о Кирхгофе см., *Больцман Л.* Густав Роберт Кирхгоф // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 30. *Столетов А. Г.* Г. Р. Кирхгоф // Собр. соч.: В 3 т. М.; Л.: ГГТИ, 1939—1947. Т. 2. 1941. С. 33; *Heimholz H.* Gustav Robert Kirchhoff // Dtsch. Rundschau. Berlin, 1887. Bd. 54. S. 232—245; *Voigt W.* Zum Gedächtniss von Kirchhoff // Abhandl. Gesell. Wiss. Göttingen. 1889. (Math.). Bd. 35. S. 1—10; *Warburg E.* Zur Erinnerung an Gustav Kirchhoff // Naturwiss. Berlin, 1925. Н. 11. S. 205—212. См. также библиографию наст. книги.

Учениками Кирхгофа были многие выдающиеся физики и математики: М. Планк, К. Пирсон, А. Г. Столетов, А. Шустер и др. М. Лауз пишет, что своим решением посвятить себя физике он был обязан опубликованным лекциям Кирхгофа. Решающим фактором было «сознание того, как много можно высказать о природе при помощи математических методов»⁸.

Выдающиеся русские физики А. Г. Столетов⁹, Н. А. Умов¹⁰, В. И. Боргман слушали лекции и работали в лаборатории Кирхгофа.

В 1868/69 г. в Гейдельберг приезжает Дж. Гиббс и слушает лекции Гельмольца, Кирхгофа, Бунзена.

Кирхгоф, по общему мнению современников, исключительно удачно сочетал при подготовке молодых ученых теоретические лекции с самостоятельными экспериментальными работами, причем студенты производили и всестороннюю математическую обработку опытных данных. Это справедливо рассматривалось им как лучшая форма подготовки к самостоятельной научной работе. Бессспорно, Кирхгоф сделал большое дело для формирования современных методов обучения, постепенно ставших общепринятыми.

Для характеристики Кирхгофа как ученого-учителя приводим «свидетельские» показания современников, слушавших его и работавших у него. Думается, что эти высказывания не нуждаются в дополнительных комментариях. Вот, что пишет А. Шустер¹¹ — известный английский физик, основные работы которого относятся к оптике: «Кирхгоф в Гейдельберге придавал большое значение тщательно составленным схемам наблюдений и их точному выполнению. Раз в неделю он читал лекции для разъяснения принципа какого-либо опыта и способов его расчета. Так как у него было обыкновенно не более двенадцати студентов, то он мог представлять каждому из них раз в неделю утро или послеобеденное время для производства того опыта, о котором говорилось на предшествовавшей лекции. Студент в назначенное для него время находил прибор подготовленным, но установленным только отчасти и должен был без посторонней помощи окончить установку и получить точный результат. Один раз во время работы Кирхгоф приходил, чтобы посмотреть не встречается ли студент с каким-нибудь серьезным затруднением.

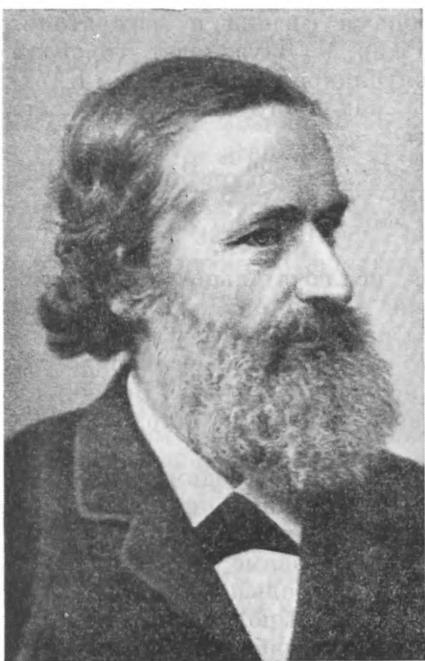
Результаты записывались и аккуратно вносились в книжку. В начале следующей лекции они выписывались на доску, профессор выражал относительно них свое мнение и обсуждал точность, которую можно было ожидать в отдельных случаях. Кроме этого так называемого семинария, в котором занятия шли только часть года, в лабораторию допускались еще несколько человек для занятий самостоятельными исследованиями. В течение двух семестров моего пребывания там, Липман произвел свое знаменитое исследование о капиллярном электрометре, а Каммерлинг-Оннес подготовил докторскую диссертацию

⁸ Лауз М. Мой творческий путь в физике // История физики. М.: Гостехиздат, 1956. С. 174.

⁹ Столетов А. Г. Г. Р. Кирхгоф // Собр. соч. М.; Л.: ГТТИ, 1941. Т. 2. С. 34—35.

¹⁰ Н. А. Умов представил Кирхгофу статью «О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида». В 1875 г. Кирхгоф опубликовал работу на ту же тему, использовав результаты Умова (чем последний был, естественно, недоволен), но изменил доказательство.

¹¹ Шустер А. Прогресс физики. Пг.: Изд-во «Естествоиспытатель», 1915. С. 15—17.



Густав Роберт Кирхгоф
1824—1887

о видоизмененном маятнике Фуко. Я сообщил Кирхгофу, что моя главная цель заключается в том, чтобы научиться от него возможно большему, и что я не забочусь о том, получу я или нет какие-либо положительные результаты моей работы. Он засадил меня поэтому за проверку приборов, предназначенных для исследования эллиптической поляризации света при отражении от металлического зеркала — типичный пример работы ортодоксальной чеканки. Прибор был не особенно удачен, но я приобрел при этом некоторые сведения теоретического и экспериментального характера и остался этим вполне доволен.

Кроме очень элементарного курса по экспериментальной физике, Кирхгоф прочел несколько в высшей степени интересных теоретических лекций. Он был чрезвычайно аккуратный человек и взвешивал каждое свое слово; о нем говорили, что он не пропустил ни одной своей лекции¹². Всякий раз, когда студент решался сделать замечание относительно какого-нибудь вопроса физики, он должен был приготовиться выдержать суровый допрос о точном смысле того, что он говорил; но вместе с тем Кирхгоф был весьма

любезным человеком. Он всегда отзывался о других мягко, хотя и требовал от них такой же аккуратности, какую обладал сам».

Выдающийся русский физик А. Г. Столетов слушал лекции и работал в «семинарии» Кирхгофа. Он пишет, что «. . . имел счастье несколько лет пользоваться и лекциями и частными беседами Кирхгофа и мог пристально всмотреться в личность знаменитого учителя. Простота обращения и неутомимая внимательность в отношении к учащимся, постоянная деятельность и самообладание мысли, дар сжатой, но отчетливой речи — вот что поражало нас в Кирхгофе. Во всем сказывается сильная воля, чувство долга, высокое и чуждое высокомерия самолюбие. . . Поучительно видеть ту аккуратность, с какой Кирхгоф ведет свои бумаги, красивым и неспешным почерком записывает *in extenso* все продуманное и сделанное. Видишь, что эта глубина и точность мысли далась не вдруг и не даром: она — плод упорной работы над собой».

¹² «Однако я могу рассказать об одном известном мне исключении. «Господа, — сказал он нам в конце одной лекции, — я, к сожалению, должен сообщить вам, что обстоятельства заставляют меня пропустить завтрашнюю лекцию». Эти обстоятельства заключались в том, что он собирался жениться. Пропущенная лекция приходилась на субботу, воскресенье было предназначено для свадебного путешествия, а в понедельник лекции шли опять обычным порядком».

Главную особенность Кирхгофа как преподавателя составляет его практический семинарий. Цель его — служить переходом от прослушанных и прочитанных курсов к самостоятельной работе, знакомя учащихся с классическими методами физических измерений. . . темами для таких измерений служат, например, сила тяжести в месте наблюдения, сила земного магнетизма, число качаний данного камертона, показатели преломления данной призмы, длина волны светового луча, емкость лейденской банки, электрическое сопротивление проволоки, тепло, отделяемое при растворении соли, и т. п. Испытав свои силы над подобными классическими задачами, где методы выработаны и результаты часто заранее известны, начинающий физик уже с большей уверенностью может взяться за более оригинальные исследования»¹³.

Приводим еще краткие заметки о Кирхгофе трех великих ученых. Макс Планк — преемник Кирхгофа по кафедре теоретической физики — отмечает в своей автобиографии:

«. . . Кирхгоф читал тщательно отработанный курс лекций, в котором была взвешена и стояла на своем месте каждая фраза. Ни словом меньше, ни словом больше. Но в целом — это действовало как нечто, заученное наизусть, сухое и однообразное. Мы восхищались самим лектором, а не тем, о чем он говорил»¹⁴.

Вот краткая, но всесторонняя характеристика, данная Кирхгофу Л. Больцманом:

«Тогдашние теоретические и экспериментальные лекции Кирхгофа отовсюду привлекали учеников, для которых он был не только почитаемым учителем, вдохновлявшим на научный поиск, но и отзывчивым другом. Он читал спокойно, ясно, тщательно, не произнося лишних слов и ничего не оставляя недосказаным. . . На экспериментальных демонстрациях Кирхгофа, всегда проводившихся с точностью и изяществом, нередко использовались изобретенные им самим приборы, например электрометр»¹⁵.

И, наконец, высказывание Феликса Клейна:

«. . . Он читал наизусть гладко отработанную рукопись и скорее позволил бы себе посреди лекции заглянуть в нее, чем дал бы повод обвинить себя в небольшом отступлении от нее»¹⁶.

Ограничение описанием (т. е. по уровню тогдашней экспериментальной техники в основном макроскопических величин — тогда и спектры, кстати сказать, рассматривались как макроскопически наблюдаемые), стремление свести все сложные физические явления к механике не могли не ограничивать физическую картину, рисуемую Кирхгофом. Наряду с большой достигаемой в силу такого подхода ясностью изложения, правда, далеко не всегда и не во всем, в согласии с особенностями самих предметов исследования и их немеханической природой у Кирхгофа возникло предубеждение против новых, незавершенных, еще только «кристаллизующихся» концепций.

¹³ Столетов А. Г. Г. Р. Кирхгоф // Природа. 1873. № 2. С. 178; Собр. соч. М.; Л.: ГТТИ, 1941. Т. 2. С. 34—35.

¹⁴ Планк М. Автобиография // Издр. тр. М.: Наука, 1975. С. 650.

¹⁵ Больцман Л. Густав Роберт Кирхгоф // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 31.

¹⁶ Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 261.

Не случайно с именем Кирхгофа связано много почти анекдотического типа высказываний, сохранившихся в устной передаче (эти высказывания, конечно, могли быть делом настроения, могли быть не точно переданы, но все же, как всякий «слух», они имеют известную информативную ценность).

Вот, что сообщает В. Вин: «Густав Кирхгоф сказал мне однажды, что он не может считать электромагнитную теорию света успехом»¹⁷.

Естественно, что такое отношение к теории Максвелла оставило только чисто исторический интерес ко второму и притом посмертно изданному тому «Vorlesungen über mathematische Physik» Кирхгофа, озаглавленному «Математическая оптика» и подготовленному к печати К. Хензелем (K. Hensel) в 1891 г.¹⁸ В этом томе Кирхгоф основывает изложение теории света на уравнениях упругой среды. Естественно, это приводит его к гипотезе Ф. Неймана о том, что упругие колебания эфира происходят в плоскости поляризации. Том этот в настоящее время, конечно, почти полностью устарел.

«Рассказывают, например, — сообщает Ф. Клейн, — что когда Kerr открыл в 1877 г. носящее его имя явление вращения плоскости поляризации при отражении света от полированного конца магнита, то Кирхгоф по этому поводу спросил: а разве вообще осталось что-нибудь открывать?»¹⁹.

Характерно отношение Кирхгофа к диссертации М. Планка: «... Кирхгоф категорически отклонил ее (диссертации М. Планка. — Л. П.) содержание, — пишет Планк, — заметив, что понятие энтропии, величина которой может быть измерена, а потому и определена только посредством обратимого процесса, не должно применяться к необратимому процессу»²⁰.

В заключение характеристики взглядов Кирхгофа приведем оценку его мировоззрения и позиции в философском размежевании, данную Ф. Энгельсом и В. И. Лениным. Ф. Энгельс писал, что «Кирхгоф... говоря: «Покой — это частный случай движения», — доказывал этим, что он способен не только вычислять, но и диалектически мыслить»²¹. В. И. Ленин отверг претензии маxистов зачислить Кирхгофа в число ученых, придерживавшихся взглядов, близких взглядам Э. Маха. Он отметил материалистическую точку зрения Кирхгофа в отношении «... объективной реальности, в существовании которой Кирхгоф и не думал сомневаться»²². В. И. Ленин отнес Кирхгофа к «механистской школе» в физике вместе с Гельмгольцем и В. Томсоном (Кельвином)²³ и прямо писал: «... продолжатели традиции „механизма“ (т. е. материализма) ... Кирхгоф, Герц, Больцман, Максвелл, Гельмгольц, лорд Кельвин»²⁴.

¹⁷ Вин В. Новейшее развитие физики и ее применений: Три доклада, прочитанные весной 1918 г. Одесса: ГИЗ Украины, 1922. С. 38.

¹⁸ Kirchhoff G. Mathematische Optik // Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig: Teubner, 1891. Bd. 2.

¹⁹ Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 262.

²⁰ Планк М. К истории открытия кванта действия // Избр. тр. М.: Наука, 1975. С. 433.

²¹ Энгельс Ф. Диалектика природы. М.: Госполитиздат, 1952. С. 70.

²² Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм // Собр. соч. М.: Политиздат, 1968. Т. 18. С. 117.

²³ Там же. С. 271.

²⁴ Там же. С. 279.

III. ТВОРЧЕСТВО

Основы математической физики

В 1865 г. в конце доклада «О цели естествознания»²⁵ Кирхгоф так определяет задачу наук и основное, необходимое условие достижения настоящего понимания природы:

«Наше понимание явлений природы, даже тех, которые происходят в мире неорганических веществ, до сих пор очень несовершенное. В значительно большей степени это справедливо для более сложных процессов, имеющих место в растениях и в мире животных. И здесь и там настоящее понимание не может быть достигнуто до тех пор, пока не удастся все свести к механике. Полностью эта цель науки не будет достигнута никогда.

Но уже тот факт, что она поставлена, дает некоторое удовлетворение, а в приближении к ней заключается наивысшее наслаждение, которое может дать занятие наукой»²⁶.

В настоящее время, спустя 120 лет, вряд ли нужно доказывать, что цель науки вовсе не сведение всего к механике и что эта задача является лишь исторически пройденным этапом развития естествознания. Но для Кирхгофа это означало, что все то общее, что он написал об основах механики и ее особенностях, полностью относится и ко всей теоретической (в том числе математической) физике. Многое в его взглядах явно устарело, а многое при известной переработке сохраняет смысл и поныне.

Термин «математическая физика» достаточно неопределенный²⁷. Обычно теперь под математической физикой понимают теорию уравнений в частных производных трех основных типов: $\varphi''=0$, $\varphi'' \sim \dot{\varphi}$, $\varphi'' \sim \ddot{\varphi}$. Где у Кирхгофа проходила граница между теоретической и математической физикой, неясно, да и нужна ли она? Можно пытаться уточнить это понятие, например, так: «Под „математической физикой“ я хотел бы понимать здесь по возможности всю область „феноменологической“ физики, оперирующей дифференциальными уравнениями, в том виде, как она была развита Францем Нейманом и англичанами и нашла свое завершение в уравнениях Максвелла. Это есть, следовательно, та физика, которая работает представлениями о непрерывной среде, в отличие от выступающей сейчас снова на передний план атомистической физики»²⁸.

²⁵ В этом докладе, единственном, в котором Кирхгоф публично высказался по общим вопросам естествознания, он излагает ставшую в середине XIX в. обычной точку зрения: задача науки — описать явления неорганической и органической природы на основе законов механики.

Интерес этого доклада не в этом. Поразительной является твердая убежденность Кирхгофа в том, что эта цель, являющаяся, по его мнению, идеалом научного познания, в полном объеме недостижима. Дело здесь отнюдь не в агностицизме или отзывах кантианства. К сожалению, для более конкретных выводов у нас нет материала (рукописей, писем, свидетельств современников).

²⁶ См. статью 28 наст. издания. — Примеч. ред.

²⁷ Термин «математическая физика» Коши применял уже в 1827 г. См., например: Cauchy A. L. Mémoire sur l'Application du calcul des résidus à la solution des problèmes de physique mathématique. Paris: De Bure Frères, 1827.

²⁸ Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.; Л.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 257.

Что такое определение достаточно произвольно и не может оправдываться даже исторической традицией, видно из того, что даже Кирхгоф, которого никак не обвинишь в стремлении подчеркнуть атомистический аспект математической физики, включил в четвертый том своих «*Vorlesungen über mathematische Physik*» несколько больших глав, посвященных молекулярно-кинетической теории газов²⁹.

Можно попытаться ограничить область математической физики, допустив, что в ней устанавливается соответствие между наблюдаемыми экспериментально величинами и некоторыми величинами математическими, подобранным так, чтобы их логическая последовательность и свойства соответствовали наблюдаемым явлениям. Так пытаются определить математическую физику многие авторы³⁰, но это мало что дает и вызывает естественные возражения, особенно когда надо проводить с не очень ясными целями демаркационную линию: математическая физика — теоретическая физика.

Что же лежит в основе механики, к которой должны быть, хотя бы в принципе, сведены все науки? Движение! А движение, по Кирхгофу, — это изменение положения со временем. Поэтому для понимания движения необходимы и достаточны представления о пространстве, времени и материи. Вот собственные слова Кирхгофа, открывающие первую лекцию первого тома его «*Vorlesungen über mathematische Physik*», посвященного механике:

«Механика есть наука о движении; мы охарактеризуем ее задачу так: описать полно и простейшим образом происходящее в природе движение.

Движение — это изменение положения со временем; то, что движется, есть материя. Для понимания движения необходимы и достаточны представления о пространстве, времени и материи. Опираясь на эти представления, механика должна стремиться достигнуть своей цели и создать необходимые ей вспомогательные понятия силы и массы»³¹.

Естественно возникает вопрос о том, каким условиям должно удовлетворять описание движения как собственно механическое, так и сводимое (основная задача!) к механическому. Кирхгоф выдвигает два требования:

«Описание движения должно быть полным. Значение этого требования совершенно ясно: не должно быть ни одного вопроса, относящегося к движению, который остался бы без ответа. Не столь ясно значение второго требования, состоящего в том, что описание должно быть простейшим. Здесь, возможно, возникнет сомнение, какое же из описаний известного явления будет проще; мысленно также, что какое-нибудь описание некоторого явления, которое в данный момент является простейшим, впоследствии, при дальнейшем развитии знаний, будет заменено еще более простым. История механики дает тому многочисленные примеры»³².

Требование полноты ясно и не вызывает сомнений. Иное дело — требование, чтобы описание было простейшим. Не только неясно, как устанавливается

²⁹ Kirchhoff G. *Vorlesungen über die Theorie der Wärme // Vorlesungen über mathematische Physik*. Leipzig: Teubner, 1894. Bd. 4. S. 134—210.

³⁰ См., например: *Vogel Th. Physique mathématique classique*. Paris: Colin, 1956. P. 214.

³¹ Кирхгоф Г. Механика: Лекции по математической физике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 5.

³² Там же. С. 5.

«простота» описания, а тем более как выяснить, что данное конкретное описание — простейшее. Неясно также, как соотносится это требование с устройством (структурой) реальной природы. Наконец, описание отвечает на вопрос «как?», а мучающий человека с детского возраста вопрос «почему?» остается открытым... может быть навсегда!

В итоге можно сказать, что в подходе Кирхгофа к основам построения физики (физика-механика) наряду с правильными и важными положениями есть много исторически преходящего, самоограничивающего. Впрочем, как это часто бывает, в реальных своих исследованиях он отнюдь не всегда следовал сформулированным им же общим положениям.

2. Основные понятия механики

Первый том «Лекций по математической физике» Кирхгофа, посвященный механике, восхищает читателя ясностью и прозрачностью изложения предмета. Вероятно, это лучшее изложение механики после Лагранжа в «довекторный» период. В этот том вошли и собственные результаты Кирхгофа, которые в виде оригинальных статей представлены в настоящем издании.

Здесь нам хотелось бы остановиться только на одном вопросе, который был предметом оживленных дискуссий как среди ученых, так и среди философов в последней четверти XIX в. — первом десятилетии XX в. Это вопрос о понятии «силы» в механике.

Общеизвестно, что механика Ньютона была основана на понятиях пространства, времени, массы (материи), силы. Многочисленные исследователи к середине XIX в. выяснили существенные трудности и неясности, связанные с последним понятием³³. Кирхгоф поэтому решил исключить «силу» из числа основных понятий механики и построить ее только на трех понятиях: пространство, время, материя. Понять его точку зрения нетрудно, она ясна из двух нижеследующих цитат (они длинноваты, но приведены полностью, поскольку «Механика» Кирхгофа как в подлиннике, так и в русском переводе давно стала библиографической редкостью).

«В настоящих лекциях исходное положение — определение механики — отличается от общепринятого. Обычно механику определяют как науку о силах, и силы рассматривают, как причины, которые или производят движение, или стремятся его произвести. Несомненно, это определение оказалось чрезвычайно полезным при развитии механики; оно полезно и при изучении этой науки, когда она поясняется примерами, взятыми из опыта обыденной жизни. Однако это определение приводит ко многим неясностям, от которых не могут освободиться понятия причины и цели. Эти неясности проявляются, например, в различии взглядов на то, можно ли законы инерции и параллелограмма сил рассматривать как результаты опыта (как аксиомы) или как законы, которые могут и должны быть логически доказаны»³⁴.

³³ См. например: *Dugas R. Histoire de la Méchanique.* Р., 1950; *Dugas R. La Méchanique en XVII siècle.* Р., 1954; *Мах Э. Механика. Историко-критический очерк ее развития.* СПб., 1909; *Джеммер Дж. Понятие массы в современной и классической физике.* М.: Прогресс, 1967; *Дорфман Я. Г. Всеобщая история физики. Ч. 1.* М.: Наука, 1979; *Излинский А. Ю. Механика относительного движения и силы инерции.* М.: Наука, 1981.

³⁴ Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. С. 3.

И далее Кирхгоф говорит о том, что понятие силы не исключается им совершенно из механики, а остается в ней «как средство упростить изложение». Это означает лишь то, что причин изменения состояния движения механика не рассматривает: «...все сводится только к тому, чтобы раскрыть происходящие явления, а не к тому, чтобы доискиваться их причин. Если мы будем исходить из этого взгляния и введем представления о пространстве, времени и материи, то чисто математическим путем придем к общим уравнениям механики. Но при этом нам не обойтись без понятия силы, которому мы не в состоянии дать исчерпывающее определение. Однако эта неполнота определения силы не приводит к неясности. В самом деле, введение сил явится здесь только средством упростить изложение, а именно: выразить в кратких словах уравнения, которые без этого термина трудно поддаются словесному выражению. Чтобы устранить всякую неясность, достаточно так определить силу, чтобы каждое предложение механики, в котором идет речь о силах, могло быть выражено уравнениями...»³⁵.

Позиция Кирхгофа, как мы видим, не является столь уж экстремистской, какой была, например, позиция Герца, который пытался вообще исключить «силу» из механики, введя понятие о «скрытых движениях»³⁶.

Тем не менее термин «сила» в механике Кирхгофа употребляется лишь как общепринятый термин, для того чтобы кратко выражать словами дифференциальные уравнения движения.

Такой характер изложения основ механики (и в особенности понятия «силы») не мог не вызвать возражений со стороны ученых, придерживающихся более общепринятых взглядов. В 1872 г. Ф. А. Слудский опубликовал заметку³⁷ по этому поводу, содержащую довольно едкую критику изложения Кирхгофа.

В механике Кирхгофа, занимающейся лишь описанием движений, происходящих в природе, возникает, как это ни кажется с первого взгляда парадоксальным, проблема статики, так как неясно, как определить равновесие. В параграфе шестом третьей лекции «Механики» (с. 31) Кирхгоф говорит:

«Покой есть частный случай движения. Та часть механики, которая его рассматривает, называется статикой. Для перехода к случаю покоя мы должны предположить, что начальные скорости равны нулю, что связи... не зависят от времени и что действующие силы таковы, что вызываемые ими ускорения обращаются в нуль. О таких силах говорят, что они находятся в равновесии».

Несмотря на справедливость исходного утверждения — покой есть частный случай движения, — все остальное не слишком ясно.

Бессспорно, что, перешагнув исходные трудности и все-таки (не слишком обоснованно!) введя в механику ту же «силу», Кирхгоф далее блестяще излагает содержание механики.

Естественно также, что метод изложения Кирхгофа не нашел сколько-нибудь серьезных последователей и отнюдь не смог изменить общепринятый (при всех имеющихся в нем оттенках) метод изложения.

³⁵ Там же. С. 3.

³⁶ Герц Г. Принципы механики, изложенные в новой связи. М.: Изд-во АН СССР, 1959.

³⁷ Слудский Ф. А. Несколько слов о Kirchhoff's Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. М.: Моск. мат. о-во, 1872. С. 1—12.

Можно ли на основании этого сделать вывод о том, что Кирхгоф ошибался в своем критическом отношении к трудностям и неясностям, связанным с понятием «силы» в механике? Нет, конечно, нельзя. Трудности, связанные с понятием «силы» не преодолены до сих пор, аксиоматическое и замкнутое изложение механики не построено (неясно даже, может ли оно, так же как и аксиоматика других естественных наук, вообще быть построено).

В настоящее время вообще сколько-нибудь удовлетворительного определения силы не существует. Для того чтобы иллюстрировать это утверждение, приведем довольно случайную, а поэтому показательную выборку определений понятия силы в механике:

«Сила — величина, являющаяся мерой механического взаимодействия материальных тел»³⁸.

«... Внешние условия, заставляющие тело изменять свое движение, мы называем силами»³⁹.

«... Действия тел друг на друга, в результате которых тела могут сообщать друг другу ускорения, мы называем силами»⁴⁰.

«... Словесные определения бессодержательны, истинные же определения даются указанием способа измерения»⁴¹.

«Все силы вообще происходят от действия одних тел на другие»⁴².

«... Сила может представлять двойственную природу взаимодействия между двумя телами, в то время как ускорение не может...»⁴³.

«... Если тело ускоряется, значит, на него действует сила»⁴⁴.

«Вектор $F_a = -\partial U / \partial r_a$ (U — потенциальная энергия системы), стоящий в правой стороне уравнений $m_a \ddot{r}_a = -\partial U / \partial r_a$, называется силой, действующей на a -точку»⁴⁵.

Вряд ли эта выборка нуждается в каких-либо комментариях.

Нам представляется единственным возможным путем стройного построения механики как науки об одной из форм движения в природе путь, исходящий из принципа Гамильтона. Правда, на этом пути также немало своих трудностей.

3. Спектральный анализ

Открытие Кирхгофом совместно с Р. В. Бунзеном спектрального анализа (см. статью 5 наст. книги) сделало, как мы уже отмечали выше, имя Кирхгофа широко известным далеко за пределами научных кругов. Эти основополагающие работы действительно составили эпоху в развитии физики, астрофизики, многочисленных отраслей естествознания и техники. Основные причины этого таковы.

³⁸ Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1965. Т. 4. С. 522.

³⁹ Словарь Г. К. Теоретическая механика. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. С. 133.

⁴⁰ Хайкин С. Э. Механика. М.; Л.: ГТТИ, 1947. Гл. 4. С. 75.

⁴¹ Зоммерфельд А. Механика. М.: Изд-во Иностр. лит., 1947. С. 11.

⁴² Кирличев В. Л. Беседы о механике. М.; Л.: ГТТИ, 1950. С. 156.

⁴³ Webster A. G. Dynamics of particles and of Rigid, Elastic and Fluid Bodies. Leipzig: Teubner, 1925. Р. 24.

⁴⁴ Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс О. Фейнмановские лекции по физике. М.: Мир, 1965. Т. 1, гл. 12. С. 209.

⁴⁵ Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. М.: Физматгиз, 1958. Т. 1. С. 19.

1. Изящные и точные эксперименты, тщательно и детально проанализированные, показали единство мира (и прежде всего звездной Вселенной) в отношении составляющих небесные и земные тела химических элементов. Если механика Галилея—Ньютона разрушила аристотелевское разделение небо—земля, то спектральный анализ — экспериментально, а не только умозрительно, как это имело место в некоторых философских системах, — впервые показал, что космос, Солнце, планеты, Земля, человек, растительный и животный мир состоят из одного и того же конечного набора элементов. Присутствие в данном объекте наблюдений тех или иных элементов или их химических соединений, их состояние, количественная доля в составе могут быть практически однозначно определены спектральным анализом. В психике и сознании широкого круга культурных людей открытие с помощью спектрального анализа некоторых элементов первоначально на Солнце, а лишь потом на Земле отложилось как исключительно убедительное доказательство единства мира и могущества создаваемых человеком научных методов.

2. Спектры — язык атомов и молекул. Научившись получать и расшифровывать их, ученые смогли приступить к прочтению ранее закрытой книги о строении атомов и молекул и процессов, в них происходящих.

Данные спектроскопических наблюдений дали основной экспериментальный материал, который был использован при построении квантовой механики, квантовой химии и т. п.

Квантовая картина строения микрочастиц позволила прогнозировать ряд ранее неизвестных спектральных эффектов и тем самым подтвердить эту картину и показать ее эвристическую силу. Роль квантовых представлений в современной науке и мировоззрении невозможно переоценить.

3. В короткое время спектральный анализ как метод качественного и количественного анализа и контроля проник в самые различные области науки и техники. Круг этих в настоящее время необозримых в кратком очерке применений спектрального анализа в естественных науках, промышленности, сельском хозяйстве, медицине все более расширяется, а многосторонность получаемой с помощью этого метода информации все возрастает.

Развитие спектрального анализа вызвало и бурное развитие промышленности спектрального приборостроения и средств обработки спектральных данных.

Спектроскопия и спектральный анализ стали одной из самых важных областей фундаментальных и технических наук. Спектральный анализ, который в начале своего развития дал огромное количество данных о химии и физике небесных объектов, безгранично расширил наши знания о Вселенной, стал теперь необходимым орудием в руках физика, химика, геолога, астрофизика, биолога, физиолога, металлурга и др., позволяющим быстро проводить точные и высокочувствительные анализы. Число этих анализов в наше время исчисляется миллионами.

Литература, посвященная спектральному анализу, спектроскопии как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, поистине необозрима. Мы отсылаем читателя лишь к некоторым монографиям и статьям, в которых рассматривается история дальнейшего развития основополагающих работ Кирхгофа и Бунзена⁴⁶.

⁴⁶ Меншуткин Б. Н. Краткий очерк истории открытия спектрального анализа. Одесса: ЭКИС, 1895. Шпольский Э. В. Столетие спектрального анализа // УФН. 1959. Т. 69, вып. 4.

Несколько кратких замечаний о предыстории открытия Кирхгофа. Исследование спектров, приведшее в конце концов к замечательному открытию Кирхгофа, началось еще в знаменитых работах Ньютона, а расширение спектра за пределы видимой области было осуществлено Фридрихом Вильямом Гершелем, открывшим в 1800 г. и для своего времени обстоятельно исследовавшим инфракрасную часть спектра. В следующем, 1801 г. И. Риттер открыл ультрафиолетовые лучи по почернению хлористого серебра за границей фиолетовой части спектра. В 1802 г. У. Волластон опубликовал два важных наблюдения, значение которых было признано лишь много лет спустя. Он обнаружил, что прошедший через щель в ставне солнечный спектр пересечен несколькими темными линиями. Это было, несомненно, открытие фраунгоферовых линий. Независимо от Волластона 15 лет спустя И. Фраунгофер в значительно более полном и точном виде исследовал так называемые фраунгоферовы линии, что явилось одним из важнейших этапов в развитии спектроскопии.

Далее надо отметить работы Джона Гершеля, Ч. Уитстона, Д. Г. Стокса, В. Ф. Тальбота, Л. Фуко, Бальфура Стюарта. Таким образом, в отличие от открытия солнечного спектра Ньютоном, открытие спектрального анализа Кирхгофом имело многих предшественников. Оно, так сказать, носилось в воздухе. Авторы, изучавшие оптические спектры до Кирхгофа, были иногда очень близки к открытию спектрального анализа. Однако никто из них не сделал решающего шага. Ближе всех, по мнению самого Кирхгофа, подошел к этому открытию Леон Фуко⁴⁷, который за 10 лет до Кирхгофа, в сущности, уже наблюдал обращение натриевых линий, но он не дал теоретической интерпретации своим опытам, не сформулировал вытекающий из них вывод и не имел смелости определенно утверждать, что присутствие D-линий в солнечном спектре свидетельствует о присутствии натрия на Солнце. Он ограничился туманным выражением надежды на возможность при помощи спектрального анализа создания химии Солнца и звезд. Почему такой выдающийся физик, как Фуко, сделавший, в сущности, решающий эксперимент, не имел смелости сделать из него в отчетливой форме окончательный вывод, остается до сих пор психологической загадкой⁴⁸.

Это ставит работу Кирхгофа в один ряд с основными завоеваниями физики всех времен. Смелость и новизна его вывода тем более велика, что он резко противоречит мнению широко распространенной в то время позитивистской философии Огюста Конта, который считал, что можно исследовать движения небесных тел, но никогда человек не узнает их химического состава.

Кирхгоф совместно с Робертом Бунзеном предпринял специальное исследование, чтобы экспериментально обосновать новый метод химического анализа, претендующий на применимость не только в земной, но и в космической химии.

C. 657—678. Kangro H. Kirchhoff und die Spectralanalitische Forschung. Osnabrück: Cellar, 1972. 54 S.

⁴⁷ Foucault L. Note sur la lumière de l'arc voltaïque // Ann. chim. et phys. 1860. Т. 68 (3). Р. 476.

⁴⁸ Когда в начале 60-х годов XIX в. по инициативе В. Томсона возникла полемика о приоритете в открытии спектрального анализа, Фуко имел мужество честно признать, что для открытия спектрального анализа его опыты не хватало последнего решающего шага (см. цитированную статью Э. В. Шпольского (УФН. 1959. Т. 69. С. 663)).

До них никто не доказал, что такой анализ дает однозначные, воспроизводящиеся и правильные результаты, что натрий, например, всегда проявляется в спектре в виде двух желтых линий независимо от соединения или смеси, в которую он входит и от свойств пламени; никто до них не доказал, что присутствие в спектре дублета D-линий натрия или красной линии лития при введении в пламя NaCl или LiCl свидетельствует о наличии элемента, а не его соединения. Они исследовали спектры известных тогда трех щелочных металлов (Li , Na , K) и трех щелочноземельных металлов (Ca , Sr , Ba), привели данные замечательной чувствительности спектрального анализа пламен. Согласно Кирхгофу и Бунзену, в пламени бунзеновской горелки можно обнаружить приблизительно (в мг): $\text{Li} - 1/6 \cdot 10^4$; $\text{Na} - 1/14 \cdot 10^6$; $\text{K} - 1/3 \cdot 10^3$; $\text{Rb} - 1/2 \cdot 10^8$; $\text{Cs} - 1/2,5 \cdot 10^4$; $\text{Ca} - 1/5 \cdot 10^4$; $\text{Sr} - 1/3 \cdot 10^4$; $\text{Ba} - 1/2 \cdot 10^8$ и т. д. В этой и следующей работе⁴⁹ с помощью спектрального анализа открыты Cs и Rb — первый замечательный успех спектрального анализа в земной аналитической химии.

В 1861 г. Кирхгоф опубликовал свою главную работу по спектральному анализу⁵⁰, в которой дан рисунок солнечного спектра рядом со спектром большого числа элементов: Ag , Al , Au , Cu , Fe и т. д., всего 22 элементов.

Кирхгоф установил совпадение линий испускания определенных элементов с фраунгоферовыми линиями солнечного спектра. Он констатировал их наличие на Солнце. Возникла химия Солнца. Успех классических работ Кирхгофа и Бунзена был, конечно, обусловлен сочетанием двух исключительно благоприятных свойств щелочных металлов и их соединений: низких потенциалов их возбуждения и легкой термической диссоциации из галоидных солей.

Рассмотренные работы произвели колossalное впечатление на современников. Так, Роско, одно время работавший в лаборатории Бунзена, пишет: «Я никогда не забуду то изумление, которое я испытал, когда в задней комнате старого Физического института я посмотрел в установленный там очень хороший спектроскоп Кирхгофа и увидел совпадение ярких линий спектра железа с темными фраунгоферовыми линиями солнечного спектра. Убеждение, что наше земное железо имеется также в солнечной атмосфере, напрашивалось само собой с принудительной силой»⁵¹.

Интерес к спектроскопии, возбужденный работами Кирхгофа и Бунзена, был так велик, что У. Крукс поставил себе задачу в издававшемся им журнале «Chemical News» печатать и перепечатывать все, что появляется где-либо и появлялось когда-либо относительно спектров.

Великий шаг в конкретизации общей идеи единства мира был сделан. Поэтому «с полным основанием открытие спектрального анализа связано с именем Кирхгофа, не только теоретически обосновавшего сделанное им в совершенно отчетливой форме открытие обращения D-линий натрия, но и распространившего это открытие на целый ряд других металлов и без всяких оговорок сделавшего из этого открытия вывод о присутствии соответствующих элементов на Солнце»⁵².

⁴⁹ См. статьи 5 и 6 наст. издания. — Примеч. ред.

⁵⁰ «Солнечный спектр» (см. статью 7 наст. издания). — Примеч. ред.

⁵¹ Roscoe H. Ein Leben der Arbeit: Erinnerungen. Leipzig, 1919. S. 57.

⁵² Шпольский Э. В. Столетие спектрального анализа // УФН. 1959. Т. 69, вып. 4. С. 672.

Там же краткий очерк развития спектрального анализа после Кирхгофа.

Историю открытия спектрального анализа до Кирхгофа см. в его работе (статья 9 наст. издания), там же дано вполне объективное изложение дискуссии о приоритете открытия спектрального анализа.

Кроме этого Кирхгоф объяснил термодинамические явления обращения спектральных линий. Это объяснение с трудом воспринималось современниками. Так, из отчета в журнале «Chemical News» за 1861 г. (с. 130—138) о лекции Роско в Лондонском химическом обществе видно, что даже Фарадей, бывший на этой лекции, нашел понимание обращения весьма трудным.

Легко видеть, что объяснение Кирхгофа не отличалось ни прозрачностью, ни строгостью. В настоящее время мы считаем, что руководящей нитью для Кирхгофа была физическая интуиция, а теоретические соображения привлекались позже, для ее обоснования.

Кирхгоф сделал исключительно смелый для того времени вывод, что из наличия в спектре Солнца D-линии натрия следует с достоверностью наличие натрия в солнечной атмосфере: «Итак найден путь определить химический состав солнечной атмосферы, и тот же путь обещал дать возможность делать некоторые заключения о химическом составе ярких неподвижных звезд»⁵³.

4. Термодинамика излучения — закон Кирхгофа

Понятие теплового излучения было установлено химиком К. В. Шееле (1742—1786), а первые эксперименты произвели М. О. Пикте (1752—1825) и П. Прево (1751—1839). Прево в 1791 г. сделал вывод о том, что каждое тело излучает независимо от окружающей его среды.

Объединив оба основных начала термодинамики и накопленный оптикой материал, Кирхгоф проложил совершенно новый путь в развитии проблем термодинамики лучистой энергии. За несколько месяцев до установления закона, носящего его имя, Кирхгоф совместно с Р. Бунзеном опубликовал работу об открытом ими спектральном анализе. Кирхгоф считал связь между этим открытием и термодинамикой более тесной, чем она есть на самом деле. Он ошибочно считал, что испускание спектральных линий происходит за счет тепловой энергии.

Подлинный механизм излучения и совпадение линий поглощения и испускания в спектре атомов были по-настоящему объяснены лишь квантовой теорией.

При рассмотрении проблемы излучения Кирхгоф впервые ввел понятие абсолютно черного тела, оказавшегося фундаментальным не только для теории излучения, но и для подготовки квантовой теории. Тем самым проблема излучения свелась к исследованию излучения черного тела; первое время, однако, считали невозможным наблюдение излучения черного тела. В 1895 г. Отто Люммер (1860—1925) и Вильгельм Вин (1864—1928) изобрели способ изучать его, глядя внутрь замкнутого пространства через маленькую щель, столь маленькую, что это не изменяет состояния излучения в замкнутой полости. Лишь с тех пор стали возможны измерения интенсивности излучения черного тела.

В 1853 г. Ангстрём сформулировал предположение, что тело «в раскаленном состоянии должно испускать излучение всех тех видов, которое оно поглощает

⁵³ См. статью 7 наст. издания. — Примеч. ред.

при обычной температуре»⁵⁴. Следовало, конечно, сказать «при той же температуре». В 1858 г. Бальфур Стюарт, изучив поглощение и излучение тепла пластинками, сделал вывод: «Поглощение пластинки равно ее лучеиспусканию, и это справедливо для любого вида тепловых лучей»⁵⁵.

Правильная формулировка закона была дана только Кирхгофом⁵⁶ в 1860 г. Основанием для его работы было открытие, сделанное несколько месяцев ранее им и Бунзеном. Они обнаружили, что фраунгоферовы линии солнечного спектра совпадают с линиями испускания известных паров и газов. Кирхгоф предположил поэтому, что вещество Вселенной (вне Земли) и на Земле состоит из одних и тех же химических элементов⁵⁷. Он не знал, что на самом деле в большинстве случаев излучение газов вызывается химическим или электрическим возбуждением и поэтому совпадение линий поглощения и испускания здесь не может быть объяснено теорией теплового излучения. В статье Кирхгофа оптические подробности порой заслоняют термодинамику.

Интересно отметить глубокое и верное наблюдение В. Вина, который писал, что «в основу нашего рассмотрения будут положены мысленные эксперименты (курсив мой. — Л. П.), которые, как у Больцмана, а ранее у Кирхгофа и Клаузиуса, настолько близки к действительности, что их реальное осуществление должно быть возможно, по-видимому, с неограниченной степенью точности»⁵⁸.

Замечательная статья Вина (1893 г.) прямо посвящена исключительно важной задаче, поставленной Кирхгофом: нахождению универсальной функции $\varphi(\lambda, T)$, зависящей только от двух переменных.

Кирхгоф показал, что интенсивность излучения в полости повсюду равна лучеиспускателю способности абсолютно черного тела. Это отождествление излучения полости с излучением абсолютно черного тела есть также один из важнейших результатов анализа проблемы Кирхгофом. Он открыл путь к экспериментальному осуществлению черного излучения, введенного вначале в качестве идеализированного объекта: надо просто взять излучение, исходящее из маленького отверстия полости. В целом аргументация Кирхгофа, приведенная в настоящей книге, воспроизведена у Друде⁵⁹ и Х.-Г. Шёпфа⁶⁰ с достаточной близостью к оригиналу, хотя и с учетом современного состояния проблемы.

Кирхгоф доказал теорему о том, что испускаемое абсолютно черным телом излучение одинаково для всех черных тел, т. е. представляет собой универсальную функцию длины волны и температуры $\varphi(\lambda, T)$. Эту функцию мы называем теперь лучеиспускателю способностью⁶¹. Кирхгоф говорит, что искомая функция, несомненно, имеет простую форму, как и все функции, которые не зависят от свойств отдельных тел.

Для доказательства этой теоремы необходимо составить баланс энергии после интегрирования по λ . Здесь возникает трудность, состоящая в том, что из ра-

⁵⁴ Angström A. // Ann. Phys. 1853. Bd. 94. S. 144.

⁵⁵ Stewart B. // Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1858.

⁵⁶ Статья 2 наст. издания. — Примеч. ред.

⁵⁷ Статья 7 наст. издания. — Примеч. ред.

⁵⁸ Wien W. // Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1893. Bd. 55.

⁵⁹ Друде П. Оптика. Л.; М.: ОНТИ, 1935.

⁶⁰ Шёпф Х.-Г. От Кирхгофа до Планка. М.: Мир, 1981. 190 с.

⁶¹ Кирхгоф же называет лучеиспускателю способностью черного тела величину W .

венства нулю интеграла надо сделать вывод о равенстве нулю подынтегрального выражения. Для этого Кирхгоф предполагает, что коэффициент отражения пластины имеет специальный вид

$$k_{\text{отр}} = \rho \sin^2 p / \lambda \quad (4.1)$$

и выполняет изящное математическое преобразование (см. § 5 статьи 2 наст. издания).

Формулу (4.1) можно обосновать, исходя из предположения, что показатель преломления пластины бесконечно мало отличается от единицы, т. е. что $k_{\text{отр}}=0$ (отражение почти отсутствует). Конечно, это сильная идеализация, во всяком случае, не меньшая, чем использование идеального цветного фильтра.

Закон Кирхгофа утверждает, что отношение спектральной плотности равновесного излучения $\rho(\lambda, T)$ любого температурного источника при произвольной длине волны λ и температуре T к его коэффициенту поглощения $a(\lambda, T)$ (при тех же значениях λ и T) не зависит от свойств излучающего материала и является универсальной функцией от λ и T . Это отношение равно спектрально плотности равновесного излучения абсолютно черного тела $\rho_0(\lambda, T)$, т. е. $\rho_i(\lambda, T)/a_i(\lambda, T)=\rho_0(\lambda, T)$, где $\rho_i(\lambda, T)$ — спектральные плотности излучения произвольных температурных излучателей, а $a_i(\lambda, T)$ — их коэффициенты поглощения. Закон этот относится не только к спектральной плотности потока, излучаемого нагретым телом по всем направлениям, но и к каждому отдельному направлению и каждому состоянию поляризации луча ⁶².

Кирхгоф показал также, что яркости двух черных поверхностей относятся как квадраты показателей преломления окружающих их сред ⁶³. Это положение часто ошибочно приписывается Клаузису, который, однако, высказал его только через несколько лет после того, как оно было опубликовано Кирхгофом.

Позже М. Планк ⁶⁴ дал доказательство закона Кирхгофа, существенно отличающееся от доказательства Кирхгофа, а именно тем, что у последнего испускательная и поглощающая способности вещества отнесены к элементу поверхности, а у Планка — к элементу объема. В связи с этим для Планка важно, что интенсивность излучения каждой объемной частоты при термодинамическом равновесии вполне определяется температурой, в то время как Кирхгоф не мог использовать этот закон, так как считал, что среда совершенно прозрачна.

Следует отметить, что доказательство закона Кирхгофа было значительно упрощено Э. Принсгейном ⁶⁵.

Обобщение, дополнение и строгое доказательство закона Кирхгофа было сделано Д. Гильбертом ⁶⁶ в 1913 г.

Мы не анализируем здесь сколько-нибудь подробно установление закона Кирхгофа, вывод его Кирхгофом, последующее экспериментальное обоснование и теоретические обобщения и уточнения, а также его приложения в технике. Хорошее изложение вопросов, связанных с законом Кирхгофа, и состояния

⁶² Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1962. Т. 2. С. 384.

⁶³ Там же. С. 384.

⁶⁴ Планк М. Теория теплового излучения: Пер. с 5-го нем. изд. М.; Л.: ОНТИ, 1935. С. 45.

⁶⁵ Pringsheim E. // Verhandl. Dtsch. Phys. Gesell. 1903. Bd. 3. S. 81.

⁶⁶ Hilbert D. Begründung der Elementären Strahlungstheorie // Phys. Zeitschr. 1912. Bd. 13. S. 1056; 1913. Bd. 14. S. 592.

проблемы на пороге XX в. дано в статье А. Коттона «The present status of Kirchhoff's Law» (Astrophys. J. Chicago, 1899. Vol. 9, N 4, P. 237—268).

Эволюция термодинамики лучистой энергии от Кирхгофа до Планка хорошо изложена также в книге Х.-Г. Шёпфа (*Шёпф Х.-Г.* От Кирхгофа до Планка. М.: Мир, 1981. С. 1—90), к которой приложена и основная статья Кирхгофа.

Мы не останавливаемся на дальнейшем развитии термодинамики теплового излучения. Отметим лишь важнейшие этапы: 1) закон T^4 (Стебана—Больцмана); 2) закон смещения Вина; 3) закон Рэлея — Джинса; 4) закон распределения энергии в спектре излучения абсолютно черного тела Планка—Эйнштейна; 5) квантование гармонического осциллятора; 6) световые корпускулы (фотоны); 7) квантовая теория.

5. Обобщение принципа Гюйгенса—Френеля

Принцип Гюйгенса⁶⁷ в той формулировке, которая была ему дана Френелем⁶⁸, еще не может считаться вполне строгим. В рассуждениях Френеля можно отметить два недостатка: 1) от любой волновой поверхности свет должен был бы распространяться не только в одном направлении, но также всегда и в отраженном — обратная волна (при суммировании действия отдельных волн заметный световой эффект получался не только для внешней огибающей отдельных волн или главной волны по Гюйгенсу, но и для внутренней огибающей, что не соответствует никакому физическому явлению); 2) вычисления Френеля приводят к неправильному выражению для фазы светового возмущения φ в точке p . В самом деле, при прямолинейном распространении света должно было бы быть

$$\varphi = \frac{A}{a+b} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda} \right), \quad (5.1)$$

в то время как при передаче посредством элементарных волн от поверхности волны получается

$$\varphi = \frac{k_1 \lambda A}{a+b} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a+b}{\lambda} \right). \quad (5.2)$$

Чтобы получить тождество амплитуд в этих выражениях для φ , можно принять $k_1=1/\lambda$, но фазы в этих выражениях привести к совпадению нельзя.

Что касается первого недостатка, то попытки Френеля⁶⁹ разъяснить явную трудность страдают некоторой неясностью. В свое время это слабое место теории Френеля привело к очень интересной полемике⁷⁰ между ним и Пуассоном.

Оба недостатка отпадают при строгом аналитическом обосновании принципа Гюйгенса. Впервые это сделал Кирхгоф⁷¹. Более простой вывод дан Фохтом⁷² и затем Друде⁷³.

⁶⁷ Гюйгенс Х. Трактат о свете. М.; Л.: ОНТИ, 1935.

⁶⁸ Френель О. О свете. М.; Л.: ГИЗ, 1928.

⁶⁹ Там же. С. 66 и примечание на с. 67.

⁷⁰ Poincaré H. Théorie mathématique de la lumière. Paris, 1889. T. 1.

⁷¹ См. статью З наст. книги. — Примеч. ред.

⁷² Voigt W. Kompendium der theoretische Physik. 1896. Bd. 2. S. 776.

⁷³ Друде П. Оптика. М.; Л.: ОНТИ, 1935. С. 145 и сл. Далее до конца этого параграфа следует текст, написанный М. Г. Шраером.

Работа Кирхгофа «К теории световых лучей» явилась итогом многолетних исследований, которые позже были изложены в его знаменитых «Vorlesungen». И здесь, как и в теории потенциала, обнаруживается связь исследований Кирхгофа и Гельмгольца. Именно по аналогии с электростатическим потенциалом Гельмгольц в своей работе⁷⁴ вводит понятие потенциала скоростей смещения частиц воздуха при установившихся колебаниях и показывает, что этот потенциал удовлетворяет уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$ (называемому в дальнейшем уравнением Гельмгольца) всюду, где отсутствуют источники звука, а также аналогу уравнения Пуассона $\Delta u + k^2 u = -4\pi q$ внутри объема, где такие источники имеются.

Рассматривая непрерывно распределенные источники звука, Гельмгольц в полной аналогии с объемными и поверхностными потенциалами электростатического поля вводит такого же типа потенциалы скоростей.

Далее, применяя формулу Грина к функции Ψ , удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, и $\Phi = A(\cos kr)/r$, являющейся аналогом функции $A/2$ в теории потенциала, он получает формулу

$$\Psi(P) = \int_s (\Psi(Q)) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\cos kr}{r} - \frac{\partial \psi(Q)}{\partial n} \frac{\cos kr}{r} \right) ds, \quad (5.3)$$

дающую аналитическое выражение принципа Гюйгенса.

С математической точки зрения эта формула показывает, что всякая непрерывная дифференцируемая в некоторой области функция, удовлетворяющая в этой области уравнению Гельмгольца, может быть представлена в виде суммы поверхностных потенциалов скоростей: потенциалов простого и двойного слоя источников звука, распределенных на замкнутой поверхности, ограничивающей данную область (результат, аналогичный формуле Грина в теории потенциала).

Значение этих исследований Гельмгольца для математической оптики выяснилось после появления упомянутой работы Кирхгофа. В отличие от Гельмгольца, Кирхгоф рассматривает волновые явления с произвольной временной зависимостью, а поэтому исходит не из уравнения Гельмгольца, а из общего волнового уравнения

$$\partial^2 V / \partial t^2 = a^2 \Delta V.$$

При этом в ходе вывода упомянутого обобщения формулы Гюйгенса Кирхгоф вводит функцию, обладающую всеми свойствами известной теперь δ -функции Дирака. Это вызвало возражения со стороны многих математиков, усилия которых направлялись на то, чтобы освободить вывод Кирхгофа от использования такого рода функций.

Три таких вывода дает Маджи⁷⁵; они тоже основаны на теореме Грина и представляют решение волнового уравнения в виде поверхностного интеграла, который затем преобразуется в объемный. Из условия равенства нулю этого интеграла получается формула, совпадающая с формулой Кирхгофа. Исследуя

⁷⁴ Helmholtz H. Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden // J. reine und angew. Math. 1860. Bd. LVII. S. 1—72.

⁷⁵ Maggi G. A. Sulla propagazione libera perturbata delle onde luminose in un mezzo isotropico // Ann. matem. 1888. T. 16. P. 20—42.

далее распространение сферических волн, он представляет их не с помощью тригонометрических функций, а функций, удовлетворяющих, кроме обычных требований непрерывности, еще и требованиям, связанным с возможностью реализовать интерференцию волн.

Наконец, с помощью формулы Стокса Маджи преобразует поверхностный интеграл в криволинейный, вводя тем самым дифракционные волны, идущие от края экрана. В дальнейшем это преобразование Маджи было использовано Коттлером для исследования вопроса о дифракции на черном экране.

Улучшение в вывод формулы Кирхгофа вводит и Бельтрами: в работе ⁷⁶ он указывает обобщение формулы Грина, на основе чего получает формулу Кирхгофа без использования δ -функции. Во второй работе ⁷⁷ он обобщает принцип Гюйгенса на случай неоднородного волнового уравнения и указывает более простой способ вывода формулы Кирхгофа.

Еще более простой вывод этой формулы дает Гутцмер ⁷⁸, исходя из известной формулы теории потенциала

$$4\pi V(P) = \int_S \left(V(Q) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{2} \frac{\partial V(Q)}{\partial n} \right) dS - \int_T \frac{\Delta V(Q)}{r} d\tau, \quad (5.4)$$

в которой объемный интеграл преобразуется в поверхностный, а функция $V(P, t-r/a)$ удовлетворяет волновому уравнению.

Все эти результаты и некоторые другие представляют интерес не столько с точки зрения истории формулы Кирхгофа, сколько показывают, как формировался математический аппарат в связи с исследованием вопросов теории дифракции.

Однако эти «улучшения» вывода формулы Кирхгофа представляют не главный аспект дальнейшего развития теории дифракции. Применяя формулу Кирхгофа к плоскому экрану с отверстием, сам Кирхгоф вынужден был предположить, что значения искомой функции и ее нормальной производной в точках отверстия экрана таковы, как если бы экран отсутствовал, а на остальной части экрана он принял бы их равными нулю.

Первым, кто высказал возражение относительно этих допущений Кирхгофа, был Пуанкаре. В своих работах ⁷⁹ он высказывает мысль, что хотя формула Кирхгофа и дает строгую математическую форму принципа Гюйгенса, но она не пригодна для решения задач дифракции. Дело в том, что упомянутые условия Кирхгофа противоречивы: нельзя одновременно произвольно задавать на поверхности экрана функцию и ее нормальную производную. С другой стороны, если точка приближается к краю экрана, то значения функции, полученной по

⁷⁶ Beltrami E. Sul principio di Huygens // Nuovo cimento. 1889. T. 26, ser. 3. P. 233—243.

⁷⁷ Beltrami E. Sulla teorie generale della onde plane // Palermo rend. 1891. T. V. P. 227—235.

⁷⁸ Gutzmer A. Über den analitischen Ausdruck des Huygenschens Prinzips. 1895. J. Math.

⁷⁹ Poincaré H. Sur un mode anormal de proposition des ondes // C. r. Acad. sci. 1892. T. CXIV. P. 16—18; Sur la polarisation par diffraction // Acta math. 1892. T. 16. P. 297—339; Théorie mathématique de la lumière. Paris, 1892. T. 2.

формуле Кирхгофа, могут и не приближаться к заданным ее значениям на поверхности экрана.

Кроме того, краевые условия Кирхгофа разрывны, что может повлечь нарушение единственности решения задачи дифракции. Далее, пренебрегать присутствием экрана недопустимо потому, что вдоль его края должны выполняться определенные граничные условия, не имеющие места, если экран отсутствует. Наконец, поле за экраном не является резким, так как проникает за экран на расстояние нескольких длин волн, т. е. условия Кирхгофа противоречат и опытным данным.

Пуанкаре впервые ставит задачу дифракции как задачу интегрирования уравнений Максвелла при определенных краевых условиях на дифрагируемом теле и с помощью цилиндрических функций решает задачу о дифракции света на экране с простым краем.

Зоммерфельд⁸⁰ показывает, что формула Кирхгофа может быть использована для приближенного решения задач дифракции, причем приближение, даваемое этой формулой, тем лучше, чем меньше длина волны источника света, чем на большем расстоянии от экрана рассматривается дифракционная картина. Как и Пуанкаре, он рассматривает задачи дифракции как краевые задачи математической физики, присоединяет к известным условиям на бесконечности открытое им условие излучения, обеспечивающее единственность решения дифракционных задач.

Вызывает интерес и один из методов решения задач дифракции, предложенный Зоммерфельдом, связанный с рассматриваемым Кирхгофом понятием «черного экрана». Это так называемый метод разветвленных решений, суть которого состоит в том, что при рассмотрении дифракции на плоском экране удобно пользоваться принципом симметрии, но при этом поле обременяется новой особенностью — образом источника света. Для преодоления этой трудности он выскивает замечательную идею рассмотрения вместо обычного пространства двойного риманова пространства.

Если каждое из этих пространств разрезать вдоль экрана и склеить каждую сторону поверхности разреза с противоположной стороной разреза в другом пространстве, то край экрана окажется линией разветвления. Изображение источника света, принадлежащего «физическому» пространству, попадает во второй, «математический» экземпляр пространства, так что в обычном пространстве новых особых точек не будет. Теперь «черный экран» получает смысл отверстия, ведущего из «физического» пространства в «математическое».

Проблема «черного экрана», физическую несостоительность которой установил Зоммерфельд и которая вновь возникла в связи с его методом разветвленных решений, обсуждается и в работах Ф. Коттлера⁸¹ и А. Рубиновича⁸².

⁸⁰ Sommerfeld A. Zur mathematischen Theorie der Beugungerscheinungen // Göttinger Nachr. 1894. S. 338—342; Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ auf Riemannsche Fläche // Ibid. 1895. S. 267—274; Mathematische Theorie der Diffraction // Math. Ann. 1896. Bd. 47. S. 317—374.

⁸¹ Kottler F. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen // Ann. Phys. 1923. Bd. 70. S. 405—456.

⁸² Rubinowicz A. Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen // Ann. Phys. 1926. Bd. 81. S. 140—154.

Коттлер считает, что, несмотря на физическую несостоительность понятия «черный экран», теория дифракции нуждается в этом понятии, так как от этого зависит развитие основных положений этой теории, не связанных со свойствами материала экрана.

В связи с этим Коттлер и Рубинович считают, что функция, определяемая интегралом Кирхгофа, отвечает не решению краевой задачи, а задаче с заданным разрывом; именно краевые условия Кирхгофа должны выполняться на черном экране: скачок происходит на освещенной стороне черного экрана, так как свет переходит из физического пространства в фиктивное; другими словами, рассмотрение формулы Кирхгофа как решения задачи с заданным разрывом приводит к непротиворечивому определению черного экрана.

Таким образом, исследования, связанные с формулой Кирхгофа, привели к неожиданным новым применением идей многолистного риманова пространства, привели к переосмысливанию некоторых понятий, введенных Кирхгофом в его теории дифракции, благодаря чему сама формула Кирхгофа получила новую интерпретацию.

6. Электростатический потенциал⁸³

Задача о распределении электричества на двух проводящих шарах имеет долгую и поучительную историю, начало которой было положено Пуассоном⁸⁴, а среди активных ее участников мы встречаем имена знаменитых математиков и физиков — В. Томсон, Г. Кирхгоф, Б. Риман, К. Нейман, К. Максвелл и др.

Столь пристальное внимание к этой задаче вызвано не ее практической важностью, а тем, что она была и остается пробным камнем для применения математики к проблеме многих тел, в частности, к общей электростатической задаче о распределении электричества на данной совокупности проводников в заданном внешнем поле неподвижных зарядов. Даже в рассматриваемом частном случае двух шаров математические трудности толкали исследователей к поиску путей их преодоления, благодаря чему формировался и сам математический аппарат физических исследований.

Известно, что Пуассон свел задачу о распределении электричества на двух сферах к функциональному уравнению относительно потенциала $f(x)$ электричества, распределенного на одном из них в точках линии центров, отстоящих на расстоянии x от центра этого шара. С помощью этой функции он строит другую функцию, дающую потенциал упомянутого шара в точках вне линии центров, и определяет плотность распределения электричества на каждом из данных шаров. Решение этой задачи Пуассон находит лишь для частного случая сфер одинакового радиуса и при малом расстоянии между ними, причем в виде рядов, мало пригодных для вычислений.

В. Томсон⁸⁵ для решения поставленной задачи пользуется открытым им же

⁸³ Параграф написан М. Г. Шраером.

⁸⁴ Poisson S. D. Sur la distribution de l'electricité à la surface des corps conducteurs // Mém. Inst. France. 1811. T. 12.

⁸⁵ Thomson W. On the mutual attraction or repulsion between two electrified spherical conductors // Phil. Mag. 1853. Vol. 5.

методом электрических изображений, применяя метод последовательных наведений Морфи⁸⁶.

Густав Кирхгоф в своей работе⁸⁷ по данному вопросу подвергает критике методы решения рассматриваемой задачи, данные Пуассоном, и, исходя из функционального уравнения Пуассона, указывает другой путь его решения, в частности, представление этого решения в виде ряда.

Основная идея Кирхгофа состоит в том, что он заменяет уравнение Пуассона

$$f(x) - \frac{ab}{c^2 - b^2 - cx} f\left(\frac{a^2(c-x)}{c^2 - b^2 - cx}\right) = h - g \frac{b}{c-x} \quad (6.1)$$

(a, b — радиусы шаров; c — расстояние между их центрами; g, h — потенциалы свободного электричества на данных шарах) системой

$$\begin{aligned} f_1(x) - \frac{b}{c^2 - b^2 - cx} f_1\left(\frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx}\right) &= 1, \\ f_2(x) - \frac{b}{c^2 - b^2 - cx} f_2\left(\frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx}\right) &= \frac{b}{c-x}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$f(x) = hf_1(x) - gf_2(x)$$

(ради простоты Кирхгоф полагает $a=1$), следствием которой является уравнение (6.1), и для нахождения искомой функции f пользуется методом последовательных приближений. Именно исходя из уравнения (6.2), естественно искать такое значение $x=\xi$, при котором

$$\frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx} = 1.$$

Это уравнение имеет два действительных положительных корня, меньший из которых ξ принадлежит интервалу $(0, 1)$. При $x=\xi$ из уравнений (6.2) легко отыскивается $f_1(\xi)$ и далее, полагая

$$x_1 = \frac{c-x}{c^2 - b^2 - cx}, \quad x_n = \frac{c-x_{n-1}}{c^2 - b^2 - cx_{n-1}}$$

($n=2, 3, \dots$), устанавливается, что $x_n \rightarrow \xi$, а значит в силу предполагаемой непрерывности $f_1(x)$, что $f_1(x_n) \rightarrow f_1(\xi)$. Этим открывается возможность отыскания $f_1(x)$. Найдя таким же путем $f_2(x)$ и представляя их в виде рядов, Кирхгоф замечает, что эти ряды могут быть преобразованы в ряды для эллиптических функций Якоби $Z(u)$.

Таким путем, в отличие от Пуассона, Кирхгоф находит общие члены полученных рядов, благодаря чему может их исследовать на сходимость. При этом оказывается несущественным предположение Пуассона о малости расстояния между рассматриваемыми шарами.

В своей второй работе⁸⁸ по рассматриваемой проблеме Кирхгоф, используя предыдущую работу, находит ряды для коэффициентов уравнения, связываю-

⁸⁶ Murphy R. Elementary principles on the theories of electricity heat and molecular actions. Cambridge, 1833.

⁸⁷ См. статью 10 наст. издания. — Примеч. ред.

⁸⁸ См. статью 11 наст. издания. — Примеч. ред.

щего заряды шаров и их потенциалы. Эти ряды он подвергает преобразованиям на предмет улучшения их сходимости. Полученные таким образом результаты он конкретизирует для некоторых численных значений радиусов шаров и расстояний между ними, сравнивая их с соответствующими численными результатами В. Томсона.

Интересы Кирхгофа к задачам теории потенциала не ограничивались проблемой распределения электричества на двух проводящих шарах. Известна работа Кирхгофа⁸⁹, посвященная доказательству существования решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в случае, когда поверхность рассматриваемого тела выпукла. Интересна судьба этой работы: она была опубликована после смерти автора, будучи представлена в «Acta mathematica» С. В. Ковалевской. Оказалось, что, написав эту работу, Кирхгоф обнаружил, что аналогичная работа, посвященная решению той же проблемы, была опубликована К. Нейманом. Поэтому Кирхгоф не решается ее публиковать, передав ее в дальнейшее распоряжение С. Ковалевской. Интересно, что подобно К. Нейману, Кирхгоф отыскивает решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в виде потенциала двойного слоя; и это несмотря на то, что после работ Робэна и В. А. Стеклова стало известно, что решение поставленной задачи проще было бы построить, исходя из свойств потенциала простого слоя.

Почему же Кирхгоф, как и Нейман, избрал в качестве исходного аппарата для решения задачи Дирихле потенциалы двойного слоя? Ответ на этот вопрос состоит в том, что различные проблемы электродинамики были связаны с прохождением постоянного тока через поверхности соприкосновения проводников различной формы. Постановка такого рода задач принадлежит Кирхгофу; он же показал, что эти задачи сводятся к отысканию потенциальной функции, которая должна обладать следующими свойствами: а) на поверхностях соприкосновения двух проводников разность потенциалов должна быть постоянной, зависящей от природы проводников, б) на этих же поверхностях соприкосновения должно быть постоянным количество электричества, протекающего в единицу времени через данное поперечное сечение в направлении нормали к поверхностям, что в случае однородных проводников приводит к равенству нормальных производных в рассматриваемых точках.

На основе этого Гельмгольц строит понятие потенциала двойного слоя, которое стало рабочим инструментом при решении задач электродинамики. Сверх того наглядный физический смысл потенциала двойного слоя как «суммы моментов» в сочетании с простым геометрическим смыслом интеграла Гаусса делал особенно выгодным выбор этих потенциалов в качестве средств для решения различных задач электродинамики.

Метод, предложенный Кирхгофом для решения задачи Дирихле, близок к методу средних арифметических К. Неймана⁹⁰. Искомое решение он ищет в виде потенциала двойного слоя

$$V = \frac{1}{4\pi} \int_{(s)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \left(U + \sum_{i=1}^{\infty} U_i \right) ds,$$

⁸⁹ См. статью 13 наст. издания. — Примеч. ред.

⁹⁰ Neumann C. Untersuchungen über das logarithmischen und Newton'schen Potential. Leipzig, 1877.

где U — заданная на поверхности (s) функция, а U_1, U_2, \dots — функции, определенные на этой поверхности так, чтобы ряд $\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ был сходящимся. Дальнейшие рассуждения Кирхгофа как раз и связаны со свойствами потенциала двойного слоя: «Пусть V_1 и V_a (предельные) значения V на внутренней и внешней сторонах ds ; тогда $V_i - V_a = U + \sum_{i=1}^{\infty} U_i$. Если бы теперь удалось так определить величины U_1, U_2, U_3, \dots , чтобы было $\sum_{i=1}^{\infty} U_i = V_a$, то отсюда следовало бы, что $V_i = U$ и V было бы искомым потенциалом внутри рассматриваемого пространства».

Положив

$$U_1 = -\frac{1}{4\pi} \int_{(s)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U ds, \quad U_i = \frac{1}{4\pi} \int_{(s)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} U_{i-1} ds \quad (i = 2, 3, \dots),$$

он удовлетворяет одному из упомянутых требований, так что остается доказать, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} U_i$ сходится. Для этого достаточно доказать, что для всех значений натурального числа i имеет место неравенство

$$-\frac{M_i - N_i}{2} \leq U_{i+1} \leq \frac{M_i - N_i}{2}, \quad (6.3)$$

где M_i и N_i наибольшее и наименьшее значения U_i на поверхности (s). Для доказательства этого Кирхгоф рассматривает точку P , лежащую вне пространства, ограниченного данной замкнутой поверхностью (s), и строит конус с вершиной в этой точке, касающейся поверхности (s) по некоторой линии l .

Эта линия разделяет (s) на две части (s_1) и (s_2), на одной из которых $\partial 1/r / \partial n > 0$, на другой — отрицательна. Пользуясь геометрическим смыслом интеграла Гаусса, он полагает $\int_{(s)} \frac{\partial 1/r}{\partial n} ds = \theta$ и для выпуклой поверхности (s) получает $\theta \leq 2\pi$, $\theta \rightarrow 2\pi$ при $P \rightarrow (s)$; при этом, замечает Кирхгоф, как бы ни была расположена точка P вне (s), величина θ равна отверстию упомянутого конуса и этот конус переходит в плоскость, если $P \in (s)$. Разбивая интеграл, определяющий функцию U_{i+1} на два (по (s_1) и (s_2)) и заменяя в них U_i соответственно на M_i и N_i , Кирхгоф получает неравенство (6.3), из которого следует, что и

$$N_i \leq U_{i+1} \leq M_i. \quad (6.4)$$

Кирхгоф утверждает, что если поверхность не имеет плоских частей, то в неравенстве (6.4), хотя бы с одной стороны, знак равенства достигаться не может, откуда он делает вывод, что существует такое число ε ($0 < \varepsilon < 1$), что имеет место неравенство $M_{i+1} - N_{i+1} < \varepsilon (M_i - N_i)$. Это неравенство известным образом и обосновывает сходимость ряда.

Уязвимым местом этого рассуждения Кирхгофа является утверждение о существовании упомянутого выше числа $\varepsilon \in (0, 1)$. Аналогичное утверждение имеется и у Неймана. Интересно, что их недостаточная обоснованность сразу не была замечена математиками. Только Лебег⁹¹ в работе 1937 г. показал, что ошибочность этих рассуждений, по существу, состоит в том, что при исследовании положительного ряда $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ на сходимость условие $x_{i+1}/x_i \leqslant \lambda < 1$ заменено на $x_{i+1}/x_i < 1$.

7. Распространение электрического тока и законы электрических цепей Кирхгофа

Крупнейшие научные открытия в области учения об электричестве и свете, сделанные Ньютоном, Фарадеем, Ампером, Френелем, Омом, Ленцом, Джоулем, потребовали дальнейшего количественного описания этих явлений, математического анализа наблюдаемых данных и создания расчетных методов, необходимых для решения практических инженерных задач.

Эти исследования привели к выяснению аналогии между электростатикой и законами распространения тока в проводниках как одномерных, так и трехмерных, обобщению теории Ома, законам Кирхгофа о ветвлении тока и во многом (если не в главном) подготовили математический аппарат для электродинамики Максвелла.

В 1822 г. Фурье в «Аналитической теории тепла» указал на аналогию потока тепла и потока электричества. Сопоставление этих потоков потребовало введения для описания электрических проблем величины, поведение которой напоминало бы поведение температуры в теории тепла. Разница в значениях такой величины в двух точках электрического контура может позволить измерить «движущую силу», действующую на электричество между этими точками. Для того чтобы развить эту идею, Ом в своей фундаментальной работе «Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet», вышедшей в свет в 1827 г., вернулся к тому, как рассматривал Вольта открытый им «столб».

Было принято измерять «напряжение» батареи, заземляя один ее конец и испытывая другой электроскопом. Отталкивающая или притягивающая сила определялась поведением электроскопа. Эту силу называли электроскопической силой. Обозначив I — ток, текущий в проволоке, проводимостью γ при разности электроскопических сил на концах E , Ом пишет

$$I = \gamma E. \quad (7.1)$$

Несмотря на путаницу, связанную с понятием электроскопической силы, работа Ома была крупным продвижением вперед⁹². Отношение современников Ома к его работе подробно проанализировано в статье H. J. J. Winter «The Reception of Ohms Electrical Researches by his Contemporaries» (Phil. Mag. 1945. Vol. 245 (7). P. 371).

⁹¹ Lebesgue H. Sur la méthode de Carl Neumann // J. Math. 1937. Т. 16. P. 205—209.

⁹² Whittaker E. A history of aether and electricity. The classical Theories. London: Nelson, 1958. P. 91—93.

В своей первой работе (написанной им в возрасте 21 года) Кирхгоф рассмотрел протекание электрического тока через плоскую пластину, например, круглой формы (см. статью 14 наст. издания).

«Уже первые его (Кирхгофа. — Л. П.) работы о прохождении электричества через пластиинки, о развлечении тока и электростатическое доказательство закона Ома составили эпоху»⁹³.

В приложении к указанной первой работе были впервые сформулированы два знаменитых закона Кирхгофа, на которых в настоящее время строится теория электрических цепей (мы вернемся к ним ниже). Еще при жизни Кирхгофа его законы вошли во все курсы математической физики и широко применялись электротехниками всех стран. В русской научной литературе первое наиболее полное и обоснованное изложение этих законов было дано И. И. Боргманом⁹⁴ и О. Д. Хвольсоном⁹⁵.

Переходя к рассмотрению законов распространения электрического тока на поверхностях и в объеме проводящих тел, надо прежде всего отметить, что оно служило предметом исследования многих физиков. Общая теория этого явления разработана Кирхгофом⁹⁶, Смаазеном⁹⁷, Гельмгольцем⁹⁸, причем Кирхгоф и Гельмгольц дали теорию движения электричества в проводниках двух и трех измерений не только для постоянного, но и для переменного тока.

Кирхгофом⁹⁹ же был впервые теоретически проанализирован случай распространения тока в очень тонких пластинах плоских и произвольной кривизны. Он произвел также экспериментальную проверку выводов теории для круглых плоских пластиинок. Затем Квинке¹⁰⁰, а позже Лодж и Фостер¹⁰¹ подтвердили своими опытами правильность теории Кирхгофа распространения тока в плоских пластинах различной формы и при различных положениях на них электродов.

В 1857 г. Кирхгоф рассматривает движение электричества в проводниках. Пусть в любой точке V обозначает «напряжение», или «электроскопическую силу», — величину, значение которой в то время в электростатике не было еще достаточно корректно понято.

Для всех точек однородного изотропного проводящего тела при существовании в нем установившегося тока имеет место уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0, \quad (7.2)$$

а на границе поверхность проводника — воздух производная $\partial v / \partial N$, взятая по нормали, обращается в нуль, на границе же двух проводников из различного материала имеет разрыв.

⁹³ Большман Л. Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 45.

⁹⁴ Боргман И. И. Курс теории электричества. СПб., 1894. Т. 1, 2.

⁹⁵ Хвольсон О. Д. О выводе II теоремы Кирхгофа // Электричество. 1888. № 7. С. 53—54.

⁹⁶ См. статьи 16, 17 наст. издания. — Прим ч. ред.

⁹⁷ Smaazen W. // Ann. Phys. 1846. Bd. 61; 1847. Bd. 69.

⁹⁸ Helmholtz H. // Ann. Phys. 1853. Bd. 89.

⁹⁹ См. статьи 14 и 15 наст. издания. — Примеч. ред.

¹⁰⁰ Quincke G. H. // Ann. Phys. 1856. Bd. 97.

¹⁰¹ Foster C., Lodge O. // Phil. Mag. 1875. Vol. 50 (4). P. 475.

Согласно свойству потенциальной функции, уравнение (7. 2) выражает отсутствие свободного электричества внутри тела. Только в случае равенства объемной плотности электричества нулю возможно равенство нулю левой стороны уравнения (7. 2), т. е. при прохождении по проводнику постоянного тока в объеме электричества нет. Другое дело, когда имеет место переменный, неустановившийся ток. Теоретическое исследование Кирхгофа показало, что в этом случае электричество движется и внутри проводника. Объемная плотность электричества внутри проводника удовлетворяет, согласно Кирхгофу, уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -8k \left(2\pi\rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right),$$

где ρ — удельная проводимость данного проводника; c — некоторая постоянная, введенная В. Вебером в теорию электричества; V — потенциал в рассматриваемой точке. Кирхгоф показал также, что токи распределяются по проводникам так, чтобы производилось наименьшее возможное количество джоулева тепла.

Легко видеть, что производимое в единицу времени джоулево тепло будет

$$\int \int \int \sigma \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right)^2 dq_i, \quad (7.3)$$

где σ — удельная электропроводность. Интеграл имеет стационарное значение, когда V удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) = 0. \quad (7.4)$$

Кирхгоф занимался также вопросом о согласовании положений электростатики с теорией Ома, которая за двадцать с лишним лет своего существования была подтверждена многочисленными экспериментальными исследованиями. В 1849 г. он отождествил «электроскопическую силу» Ома с электростатическим потенциалом. Правильность этого была быстро подтверждена, и работа Кирхгофа продолжена другими исследователями (см. статью 18 наст. издания).

Тем самым была устранена неясность и неуверенность в том, как надо интерпретировать на языке электростатики «напряжение», «электроскопическую силу» и т. п. Правильность этой идентификации легко показать, сравнив различные выражения, полученные для электрической энергии: выражение Гельмгольца показывает, что энергия единичного заряда в какой-либо точке пропорциональна значению электростатического потенциала в этой точке, а выражение Джоуля показывает, что энергия, освобождаемая единичным зарядом при прохождении им от одной точки контура к другой, пропорциональна разности «электрических напряжений» в этих двух точках. Отсюда следует, что напряжение и потенциал одно и то же. Результат Кирхгофа был подтвержден последующими исследователями.

Огромное влияние на развитие теории прохождения тока по линейным

проводникам оказалось прокладывание Атлантического кабеля Европа—Америка, в котором непосредственно участвовал В. Томсон (Кельвин).

Теория передачи сигналов по подводному кабелю (проводу) впервые появилась в переписке Стокса и В. Томсона¹⁰². Приняв в законе Ома во внимание индуктивность L , получим для электрического потенциала V на расстоянии x от границы и тока i в этой точке

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \quad (7.5)$$

а для емкости C

$$C \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}, \quad (7.6)$$

откуда, исключив i , найдем

$$\frac{1}{c} V'' = L \dot{V} + R \dot{V}. \quad (7.7)$$

В таком виде уравнение получено О. Хевисайдом (1850—1925) в 1876 г.¹⁰³; оно носит название телеграфного уравнения. Решение его имеет вид

$$V = e^{-Rt/2L} \cdot \sin n [x - (CL)^{-1/2} t]. \quad (7.8)$$

Физический смысл этого решения состоит в том, что некоторое гармоническое возмущение и, следовательно, любое возмущение распространяется вдоль линейного проводника со скоростью

$$(CL)^{-1/2}.$$

В 1857 г. исследования В. Томсона были обобщены в замечательной работе Кирхгофа о распространении электрического возмущения в телеграфном проводе круглого сечения¹⁰⁴.

Его понимание природы тока (восходящее к Ому, Фехнеру и Веберу) состояло в представлении о двух равных потоках «стеклянного» и «смоляного» электричества, текущих в противоположных направлениях.

По Кирхгофу, для электрического потенциала V имеем

$$V = 2e \log(l/a), \quad (7.9)$$

где e — заряд на единице длины провода; l — его длина; a — радиус сечения. Строго говоря, Кирхгоф получил для V уравнение

$$V = 2e \log(\epsilon/a) + \int e'/r ds', \quad (7.10)$$

где $\epsilon \ll l$ и $\epsilon \gg a$, а интегрирование производится по всей длине провода, за исключением участка 2ϵ . Уравнение (7.9) получено при использовании некоторого приближения, которое, однако, вызывает возражения.

¹⁰² Thomson W. // Phil. Mag. 1854. June. Vol. 7. P. 396.

¹⁰³ Heaviside O. // Phil. Mag. 1876. Aug. Vol. 11. P. 135.

¹⁰⁴ См. статью 21 наст. издания. — Примеч. ред.

С помощью не слишком сложных преобразований, отбросив в уравнении (7.7) член \ddot{V} , что во многих случаях допустимо, найдем уравнение

$$V'' = \ddot{V}/c^2, \quad (7.11)$$

которое показывает, что электрическое возмущение распространяется вдоль проводника со скоростью c . Заметим, что у Вебера и Кирхгофа буквой c была обозначена величина $c/\sqrt{2}$. Незадолго до опубликования статьи Кирхгофа Вебер и Колльрауш¹⁰⁵ определили значение c экспериментально и нашли

$$c = 3,1 \cdot 10^{10} \text{ см/с},$$

которое в пределах ошибок измерения совпадает со скоростью распространения света в межпланетном пространстве. Кирхгоф был первым, кто заметил это совпадение, однако не сделал из этого факта никаких дальнейших выводов. Только гений и интуиция Максвелла позволили ему на этом основании утверждать единство природы этих процессов.

Исследования Кирхгофа по электричеству были выполнены под сильным влиянием исследований В. Вебера¹⁰⁶.

Выше нами отмечалось, что Кирхгоф считал необходимым, чтобы в математической физике фигурировали только измеряемые величины. В теории распространения тока присутствовало сопротивление проводника, способ абсолютного измерения которого не был разработан. Кирхгоф впервые указал метод, дающий возможность выполнять это измерение.

Пусть A_1 и A_2 — две катушки, коэффициент взаимной индукции M которых может быть вычислен; Γ — гальванометр; r — искомое сопротивление проводника. Гальванометром Γ определяется сила постоянного тока i_2 , проходящего по части цепи $Q\Gamma A_2 P$. После измерения i_2 катушка A_1 быстро перемещается в такое положение, при котором $M=0$. Вследствие изменения M в цепи возбуждается индукционный ток, причем Γ позволяет измерить то количество электричества q_2 , которое при развитии индукционного тока проходит через попечное сечение ветви $Q\Gamma A_2 P$ в течение всего периода существования такого тока, т. е.

$$q_2 = \int_0^\tau i'_2 dt, \quad (7.12)$$

где τ — продолжительность существования индукционного тока; i'_2 — сила тока в ветви $Q\Gamma A_2 P$ в какой-либо момент времени t . Если сопротивления обеих ветвей $P A_1 E Q$ и $Q \Gamma A_2 P$ велики по сравнению с искомым сопротивлением r , то, как нетрудно показать

¹⁰⁵ Weber W., Kohlrausch R. H. // Ann. Phys. 1856. Bd. 49. S. 10.

Вебер в этой работе продолжал исследования по абсолютным измерениям, начатые им и Гауссом в связи с изучением земного магнетизма.

¹⁰⁶ Whittaker E. A history of aether and electricity. The classical Theories. London: Nelson, 1958. P. 233.

$$\frac{r}{M} = \frac{i_2}{q_2}. \quad (7. 13)$$

По этой формуле и можно вычислить r . Максвелл¹⁰⁷ дал достаточно строгий вывод формулы (7. 13). По методу Кирхгофа абсолютные измерения сопротивления были произведены Глейзбруком¹⁰⁸, Химстедтом¹⁰⁹, Роити¹¹⁰, Роуландом¹¹¹ и др.

Как в настоящее время хорошо известно, статическое электричество можно наблюдать, используя плоский конденсатор. Его теория впервые была дана Клаузиусом, но он предполагал, что пластиинки конденсатора бесконечно тонкие. Кирхгоф же разработал расчетный метод, который позволял учитывать их толщину и, таким образом, превратил конденсатор в один из важнейших приборов электростатики. Используя ряд остроумных математических приемов (см. статью 12 наст. издания), он получил весьма простые формулы, позволяющие приближенно рассчитать емкость конденсатора с учетом краевого эффекта.

Этими формулами пользуются и в настоящее время при расчете удельных параметров диэлектриков на основании измерения емкости конденсатора, образованного двумя дисками с помещенной между ними пластиной исследуемого материала.

Кирхгофом описан эксперимент, являющийся первым примером моделирования потенциального плоскопараллельного поля в проводящей среде. При помощи электроскопа Кирхгоф исследовал изопотенциальные линии, наблюдаемые в круглой пластине из медной фольги при подведении тока к двум точкам края этой пластины. Он показал экспериментально и теоретически, что эти линии являются окружностями.

В последующих работах Кирхгоф рассмотрел токи в проводящих средах и в системе линейных проводников, причем здесь впервые проведено рассмотрение токов в проводящих средах, исходя из тех же положений, что и в электростатике, и показана полная аналогия электрического поля в проводниках и диэлектриках.

Проблема разветвления тока — основная проблема теории электрических цепей — для некоторых отдельных случаев была разработана Омом, Пуллье, Уитсоном, Поггендорфом, В. Вебером. Уитсон занимался этой проблемой для теоретического обоснования «мостика Уитсона»¹¹², а Поггендорф дал формулы для применения мостика Уитсона и совместно с В. Вебером экспериментально проверил их правильность¹¹³. Однако только Кирхгоф в 1845 г., еще будучи студентом, поставил и решил эту задачу в столь общем виде¹¹⁴, что все последующие работы основывались на его решении.

¹⁰⁷ Maxwell J. C. A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, 1881. Vol. 2. P. 368.

¹⁰⁸ Glaserbook R. // Phil. Trans. 1883. Vol. 174. P. 223.

¹⁰⁹ Himstedt F. // Ann. Phys. 1885. Bd. 26. S. 547; 1886. Bd. 28. S. 338.

¹¹⁰ Roitti A. // Nuovo Cimento. 1884. T. 15.

¹¹¹ Rowland H., Kimball I. P. // Am. J. Sci. 1878, vol. 15. P. 281; Electrotech. Zeitschr. 1881. Bd. 6. S. 441.

¹¹² Witestone W. // Ann. Phys. 1844. Bd. 62. S. 499.

¹¹³ Poggendorf I. // Ann. Phys. 1845. Bd. 67. S. 273.

¹¹⁴ См. статью 14 наст. издания. — Примеч. ред.

Первый закон Кирхгофа есть следствие закона сохранения заряда и состоит в том, что алгебраическая сумма сил всех токов, сходящихся в точке разветвления проводников¹¹⁵, равна нулю, т. е.

$$\sum_n i_n = 0. \quad (7.14)$$

Второй закон Кирхгофа есть следствие того, что потенциал проводника в каждой точке есть однозначная функция этой точки. Он гласит: если в любой системе линейных проводников, как бы сложна она ни была, выделить произвольный замкнутый контур, то сумма падений напряжений (произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков), подсчитанных вдоль контура, должна равняться сумме сторонних ЭДС E (элементов, аккумуляторов, динамомашин, термобатарей и т. п.) в этом контуре:

$$\sum_n i_n R_n = \sum_m E_m. \quad (7.15)$$

Законы Кирхгофа применимы к постоянным и квазистационарным токам.

Доказательство этих законов Кирхгоф сначала дал для линейных проводников, а в 1848 г. он распространил его и на случай проводников нелинейной формы.

Перечислим некоторые наиболее типичные, вошедшие в учебники физики и электротехники применения уравнений Кирхгофа к решениям отдельных задач: 1) параллельное соединение проводников (силы токов в двух параллельно соединенных проводниках обратно пропорциональны их сопротивлениям); 2) мостик Уитстона; 3) соединение элементов в батарею (при последовательном соединении одинаковых элементов ЭДС возрастает в n раз и в n раз возрастает внутреннее сопротивление, при параллельном соединении ЭДС не меняется, а внутреннее сопротивление уменьшается в n раз); 4) компенсационный метод определения электродвижущей силы элементов и т. д.

Не правда ли, от этих законов, ставших достоянием науки, техники и каждого культурного человека веет школьными воспоминаниями? Великолепна их ясность, прозрачность стиля, типичная для научного творчества Кирхгофа; трудно, если не невозможно, описать бесчисленные практические, технические приложения законов Кирхгофа.

Кирхгофу также принадлежит теоретическое решение вопроса о намагничении бесконечно длинного цилиндра под влиянием какой-либо системы магнитов, т. е. при произвольном законе распределения магнитной силы в пространстве. Случай намагничения очень длинного и тонкого стержня в однородном магнитном поле был исследован теоретически еще Грином¹¹⁶.

В последние годы жизни Кирхгоф провел очень интересные теоретические исследования, связанные с взаимодействием электрических и магнитных полей, с одной стороны, и механическим напряжением и деформациями — с другой,

¹¹⁵ Токи, подходящие к точке разветвления, считаются положительными, а токи, исходящие из нее, — отрицательными.

¹¹⁶ Green G. An essay of the application of mathematical analysis to the theory of electricity and magnetism. Nottingham, 1828; J. reine und angew. Math. 1852. Bd. 47. S. 215.

и успешно изучал законы, описывающие явления электрострикции и магнитострикции.

Остановимся в заключении еще на одном вопросе. В 1858 г. Гельмгольц¹¹⁷ показал, что если сопоставить магнитную индукцию со скоростью жидкости, то электрические токи соответствуют вихревым нитям в жидкости. Десятью годами позже Кирхгоф¹¹⁸ развил эту аналогию дальше (интересно отметить, что то направление развития электродинамики, которое привело к теории Максвелла, было на всех этапах связано с разнообразными аналогиями с гидродинамикой и теорией упругости).

Будем рассматривать аналогию, о которой идет речь, с точки зрения динамики. Тогда очевидно, что пондеромоторные силы между металлическими кольцами, несущими электрические токи, должны быть подобны пондеромоторным силам между теми же кольцами, когда они погружаются в бесконечную несжимаемую жидкость. Движение жидкости в этом случае будет таково, что ее циркуляция через отверстие каждого кольца будет пропорциональна силе электрического тока в соответствующем кольце. Для того чтобы рассмотреть этот вопрос, Кирхгоф решил гидродинамическую задачу движения двух тонких твердых колец в несжимаемой жидкости без трения, движение которой не является вращательным. Он нашел, что силы, действующие между кольцами, численно равны силам, которые кольца производили бы друг на друга, если бы они пересекались электрическими токами, пропорциональными циркуляциям жидкости.

8. Математическая теория упругости твердых тел

Из практики, техники, опыта известно, что макроскопические твердые тела под влиянием внешних сил претерпевают изменения формы, исчезающие при постепенном прекращении их действия; внезапное же прекращение такого действия вызывает колебательные движения. Задачей математической теории упругости является точное количественное описание возникших таким путем изменений геометрической формы и механического состояния тел: определение деформаций и напряженного состояния твердого тела, если известны действующие на него внешние силы и условия его закрепления.

Для этого используется обычный метод математической физики: 1) определяются механические величины, характеризующие физическую картину напряженного состояния твердого тела, и геометрические величины, определяющие деформацию тела; 2) дается математическая формулировка найденной из опыта зависимости между механическими и геометрическими величинами, приводящая к основным уравнениям теории упругости — дифференциальному уравнению в частных производных, интегрирование которых в каждом конкретном случае отвечает на поставленные выше вопросы; 3) разрабатывается теория интегрирования этих дифференциальных уравнений.

Классическая теория упругости использует два ограничения, во-первых, в соответствии с важнейшими практическими потребностями рассматриваются только столь малые деформации, что произведениями упругих перемещений и

¹¹⁷ Helmholtz H. // J. Math. 1858. Bd. 55. S. 25.

¹¹⁸ В книге E. Whittaker'a ошибочно указано, что «двумя годами позже».

их производных можно пренебречь по сравнению с линейными выражениями, и, во-вторых, рассматриваются нагрузки столь малые, что можно считать деформации пропорциональными силам, которыми они вызваны.

Полученные математической теорией упругости результаты имеют практическое значение для инженерного дела, архитектуры и других прикладных областей, где приходится иметь дело с конструкциями, материалами для которых являются твердые тела.

Развитие теории упругости, которое начинается с исследования Галилеем¹¹⁹ сопротивления твердых тел разрушению, продолжается в работах Гука, Марriotta, Я. Бернулли, Д. Бернулли, Эйлера, Лагранжа, Кулона, Т. Юнга, Софи Жермен, Лапласа, Пуассона, Навье, Коши, Ламе, Ф. Неймана, Грина, Фохта, Бетти, Клебша, Мора, Рэлея, Кристоффеля, Сен-Венана, Буссинеска. К тому времени, когда появились первые работы Кирхгофа по математической теории упругости, были достигнуты крупные и принципиальные результаты как в теоретическом анализе различных сторон проблемы, так и в экспериментальном исследовании деформаций, напряжений, равновесия изотропных и анизотропных упругих твердых тел, вибрации шаров и цилиндров, кручении, изгибе равномерно нагруженных балок, изгиба и растяжения тонких стержней, колебаний стержней, растяжения и изгиба пластинок, тонких оболочек и т. д. и т. п.¹²⁰)

Многочисленные важные результаты в математической теории упругости были получены Ф. Нейманом¹²¹.

Как ученик Ф. Неймана, Кирхгоф рано заинтересовался математической теорией упругости. Вклад Кирхгофа в теорию упругости состоит из шести статей, опубликованных в различных журналах в период 1848—1879 гг. и почти полностью перепечатанных в его «Gesammelte Abhandlungen» (S. 237—339), из четырех статей (1882—1884 гг.), перепечатанных в «Nachtrag» (1891 г.), и из пяти лекций в первом томе его «Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik» (лекции 10, 27—30; с. 84—96, 322—386 русского перевода).

Этот том был опубликован в трех частях, две из которых вышли в свет в 1874 г., а третья — в 1876 г. В проспекте издания, датированным февралем 1874 г., заглавие тома было таково: «Лекции по аналитической механике с включением гидродинамики и теории упругости твердых тел».

Две его ранние работы¹²² по теории упругости были изданы с многочисленными опечатками; основное содержание этих статей вовпло зато в статью

¹¹⁹ Galilei G. Discorsi e Dimonstrationi mathematiche. Leiden, 1638.

¹²⁰ Историю математической теории упругости см.: Todhunter J., Pearson K. A History of the Theory of Elasticity and of Strength of Materials from Galilei to the present time. Cambridge: Univer. Press, 1893. Vol. 1, 2, pt. 1, 2; Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: Госиздтехтеорлит, 1957; Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Введение. Исторический обзор. С. 15—43.

¹²¹ Исследования Ф. Неймана по теории упругости обобщены в изданной О. Э. Майером книге Ф. Неймана: Neumann F. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Leipzig, 1885. 374 S.

¹²² Kirchhoff G. Note relative à la théorie de la l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique // C. r. Acad. sci. 1848. T. 27. P. 394—397; Note sur les vibrations d'une plaque circulaire // C. r. Acad. sci. 1849. T. 29. P. 753—756.

1850 г.^{122а}. В этой статье изложены первая удовлетворительная теория изгиба пластины. Кирхгоф обосновал свою теорию пластинок двумя гипотезами, получившими впоследствии общее признание: 1) всякая прямая линия, которая до деформации перпендикулярна к средней плоскости, остается прямой, нормальной к искривленной средней плоскости после деформации; 2) элементы средней плоскости не подвергаются растяжению.

Эти допущения дали ему возможность выразить потенциальную энергию изогнутой пластинки через кривизну средней плоскости. Затем при помощи принципа виртуальной работы были выведены уравнения движения и граничные условия, которые применяются к колебаниям изгиба круглой пластинки¹²³.

Исходя из этих двух предпосылок, Кирхгоф находит правильное выражение для потенциальной энергии изогнутой пластинки

$$V = \frac{1}{2} D \int \int \left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \quad (8.1)$$

где $D = Eh^3/2(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластинки, а W — прогиб ее срединной поверхности. Используя принцип виртуальной работы

$$\int \int q \delta W dx dy = \delta U, \quad (8.2)$$

где q — нагрузка, распределенная по пластинке, и введя (8.1) в (8.2) и выполнив варьирование, Кирхгоф получает хорошо известное дифференциальное уравнение изгиба пластинки

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) = q. \quad (8.3)$$

Общая теория поперечных колебаний круговой пластинки была также развита Кирхгофом, который полностью исследовал задачу до численных результатов (статья 23 наст. издания).

Теория пластинок может быть построена при помощи рассуждений того же характера, как и те, которые Кирхгоф применил в теории тонких стержней. Исследование этим методом было выполнено Герингом¹²⁴, а затем в улучшенной форме самим Кирхгофом.

Кирхгоф находит общее решение своих уравнений для колебаний круглой пластинки с свободным краем (как для симметричной формы колебаний: узловые линии — концентрические окружности, так и для форм, для которых узловыми линиями являются диаметры пластинки — граничные условия Пуассона не применимы).

Проделав большую вычислительную работу, Кирхгоф дает таблицу частот, соответствующую различным формам колебаний. Эти численные результаты он использует для анализа опытных данных о колебаниях пластинок, полученных

^{122а} См. статью 22 наст. издания. — Прим. ред.

¹²³ Ляэ А. Математическая теория упругости. М.; Л.: ОНТИ, 1935. Введение.

¹²⁴ Исследования Геринга (Gehring) составили его диссертацию; они изложены Кирхгофом в первом томе его «Vorlesungen über mathematische Physik» (Leipzig, 1874. Bd. 1), посвященном механике.

Хладни¹²⁵ и Штрельке¹²⁶. Он хотел установить по этим данным правильное значение коэффициента Пуассона, но поскольку частоты очень слабо зависят от него, то эти опыты непригодны для точного определения этого коэффициента. Впоследствии Кирхгоф с той же целью поставил собственные опыты¹²⁷ на консолях из круглой стали. Угол кручения, а также угол, образуемый касательной к оси консоли на ее свободном конце с горизонталью, измерялись оптическим способом: с помощью зеркальца, укрепленного на конце консоли. Эти весьма тщательные измерения дали для коэффициента Пуассона для стали 0,294¹²⁸, современное значение для стали¹²⁹ с 1 % углерода 0,293, для мягкой стали — 0,291. Прекрасное согласие!

В книге «Механика» Кирхгоф обобщил свою теорию пластинок и на случай, когда прогибы нельзя считать весьма малыми. «Появление такое теории, — пишет С. П. Тимошенко¹³⁰, — было большим шагом вперед в теории упругости, и вся его важность выявила позднее в том широком применении, которое она получила в проектировании различного рода тонкостенных конструкций».

Другим ценным вкладом Кирхгофа в теорию упругости было выполненное им исследование деформации упругих стержней¹³¹. Он вывел общие уравнения равновесия для пространственной изогнутой кривой стержня в предположении больших прогибов.

В последнем параграфе этой статьи Кирхгоф указывает на интересную «упругую кинетическую аналогию». Тождественность уравнений вращения твердого тела относительно закрепленной точки и уравнений равновесия гибкого стержня, деформированного силами, приложенными по концам, была впервые обнаружена Кирхгофом: «Одним из наиболее красивых результатов мне всегда казался проведенный Кирхгофом параллелизм между изгибанием и закручиванием бесконечно тонкой проволоки, с одной стороны, и вращением твердого тела вокруг неподвижной точки — с другой»¹³².

Эта теорема носит название «кинетической аналогии Кирхгофа»¹³³ интересное обсуждение ее см.: Thomson W., Tait P.

¹²⁵ Chladni E. F. Die Akustik. Leipzig, 1802.

¹²⁶ Strelke J. // Ann. Phys. 1843. Bd. 58. S. 334.

¹²⁷ Kirchhoff G. // Ann. Phys. 1859. Bd. 108. S. 369—392.

¹²⁸ Подробные опыты по определению коэффициента Пуассона для различных сортов стали были выполнены в Петербурге в 1865—1866 гг. одним из учеников Кирхгофа, впоследствии профессором механики Петербургского университета, — Михаилом Федоровичем Окатовым (1829—1901). Результаты этих опытов приведены в докторской диссертации М. Ф. Окатова «Теория равновесия и движения упругой проволоки» (СПб., 1867). Ему же принадлежат: «Общая теория равновесия упругих твердых тел и разделение их на классы» (магистерская диссертация) (СПб., 1865); «Приложение второй основной теоремы механической теории тепла к упругому твердому телу» в книге «Термостатика» (СПб., 1871). Биографические данные см. «Биографический словарь профессоров и преподавателей СПб. университета» (СПб., 1898. Т. 2).

¹²⁹ Кэй Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. М.: Физматгиз, 1962. С. 38.

¹³⁰ Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений. М.: ГИТТЛ, 1957. С. 307.

¹³¹ Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen stabes // J. reine und angew. Math. 1859. Bd. 56. S. 285—313.

¹³² Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX в. М.: ОНТИ, 1937. Ч. 1. С. 263.

¹³³ В русском переводе книги С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов...» эта аналогия названа «динамической аналогией Кирхгофа» (С. 307).

Treatise on natural philosophy. Oxford, 1867. Vol. 2. P. 609—613.

Теория Кирхгофа вызвала много споров, в которых удалось устраниТЬ многочисленные трудности, упростить ее построение и в то же время подтвердить ее конечные выводы. Заметим, что она нашла применение в решении задач устойчивости упругих систем, как, например, поперечного выпучивания кривого стержня с узким прямоугольным поперечным сечением, подвергнутого чистому изгибу, и т. п.

Необходимо отметить работу Кирхгофа, в которой исследуется колебание стержней переменного поперечного сечения¹³⁴. Общее уравнение поперечных колебаний таких стержней было уже известно, и Кирхгоф показывает, что в определенных случаях оно поддается точному интегрированию.

Кирхгоф показал, что один единственный вариационный принцип содержит в себе шесть объемных и поверхностных уравнений теории упругости. Обозначим δU — работу приложенных сил, $dxdydz$ — элемент объема упругого тела. тогда

$$\delta U = \mu \delta \iiint \left[s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + \frac{\lambda}{2\mu} (s_1 + s_2 + s_3)^2 \right] dxdydz, \quad (8.4)$$

где s_1, s_2, s_3 — главные напряжения. Тело считается изотропным, интегрирование производится по всему объему. Кирхгоф отметил, что Грин уже раньше написал уравнение (8. 4), не применив, однако, главных напряжений.

Определив последние, Кирхгоф записывает левую сторону (8. 4) в виде

$$\delta U = \mu \delta \iint d\omega dz \left\{ \left[\left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_1} \right)^2 + \left(\frac{z}{\rho_2} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2\mu} \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2} \right)^2 \right\}, \quad (8.5)$$

где $d\omega$ — элемент средней поверхности; ось z — перпендикулярна к ней; ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны средней поверхности; $\partial q/\partial z$ — напряжение в направлении z в точке на расстоянии z от $d\omega$. После длинных и не очень ясных рассуждений Кирхгоф приходит к уравнению

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial q}{\partial z} + \lambda \left(\frac{z}{\rho_1} + \frac{z}{\rho_2} \right) = 0. , \quad (8.6)$$

Физический смысл (8. 6) состоит в том, что напряжение, перпендикулярное к лицевой стороне пластин, исчезает в каждой точке пластиинки. Так как пластина предполагается бесконечно тонкой и не имеет никакой нагрузки на поверхности, то по крайней мере приближенно этот вывод представляется правильным.

Используя (8. 6) и проинтегрировав (8. 5) по z , получим

$$\delta U - \frac{2}{3} \epsilon^3 \mu \delta \int d\omega \left[\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 \right] = 0. \quad (8.7)$$

Таким образом, Кирхгоф впервые выразил работу, произведенную при искривлении тонкой изотропной пластиинки с кривизнами $1/\rho_1$, $1/\rho_2$ в любой точке. в терминах этих кривизн. Это одно из достижений этой статьи (статья 22 наст. издания).

¹³⁴ Kirchhoff G. // Ann. Phys. 1859. Bd. 108.

Если какой-нибудь край пластинки совершенно свободен, то, естественно, что вдоль него не будет ни изгибающих, ни крутящих моментов, ни вертикальных поперечных сил:

$$M_{изг} = 0, \quad M_{крут} = 0, \quad F = 0.$$

В таком виде граничные условия были исследованы Пуассоном¹³⁵. Кирхгоф же показал, что трех условий на границе много и что достаточно двух для полного определения прогибов пластинки¹³⁶.

В четвертом параграфе статьи 1850 г. рассмотрены колебания свободной пластины круглой формы. Решение уравнения не нагруженной и не подверженной действию объемных сил пластины получается в виде дважды бесконечных рядов функций, похожих на функции I_{2x}^n Бесселя (статья 22 наст. издания).

Пятый параграф этой статьи посвящен численному решению тех же уравнений и включает очень много трудоемких вычислений. Зная характер Кирхгофа, можно с большой уверенностью предположить, что он проделал вычисления сам и пожалеть, что в его время еще не было ЭВМ (вычисления и их результаты занимают несколько страниц).

В 1852 г. Кирхгоф опубликовал статью¹³⁷ «Ueber die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers». Кирхгоф не отметил ее в своих «Gesammelte Abhandlungen», которые он сам составил. Возможно, что он был неудовлетворен методом, применяемым в этой статье, и полученными результатами.

Общие уравнения изгиба, кручения, растяжения применимы лишь тогда, когда смещения малы, однако во многих случаях (например, для специальных пружин) они вовсе не малы. Кирхгоф первым преодолел эту трудность. Он показал, что общие уравнения применимы со всей строгостью к малой части тонкого стержня, все линейные размеры которого такого же порядка малости, что и диаметры поперечного сечения. Для упрощения он в первом приближении пренебреж силами инерции и массовыми силами. Эти исследования Кирхгофа носят в значительной степени кинематический характер.

В работе 1859 г.¹³⁸ Кирхгоф доказал следующую теорему. Пусть заданы на граничной поверхности смещения или напряжения, в таком случае решение задачи о равновесии будет единственным в смысле однозначной определенности напряженного состояния или деформации.

Теория Кирхгофа явилась предметом весьма оживленного обсуждения. В нем приняли участие Кельвин, Тэт, Буссинеск и Клебиш¹³⁹. Все результаты теории независимо от метода их получения были подтверждены последующими исследованиями¹⁴⁰.

¹³⁵ Todhunter J., Pearson K. History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials: In 2 vol. Cambridge, 1886. Vol. 1. P. 250.

¹³⁶ Он показал также, что два из требований Пуассона относительно крутящего момента и поперечной силы можно заменить одним граничным условием.

¹³⁷ Kirchhoff G. / Sitzungsber. Math.-Naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Wien, 1852. Bd. 9. S. 762–773.

¹³⁸ Kirchhoff G. // J. reine und angew. Math. 1859. Bd. 56.

¹³⁹ Thomson W., Tait P. G. A treatise on natural philosophy. Oxford, 1867. Vol. 2; Bousinessq V. J., Liouville J. // C. r. Acad. sci. 1871. T. 16 (2); Clebsch A. Theorie der Elastizität fester Körper. Leipzig: Teubner, 1862.

¹⁴⁰ Basset A. B. // Proc. Math. Soc. London, 1892. T. 23; Mitchell J. H. // Proc. Math. Soc. London, 1900. T. 31. P. 130.

Статья «Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes» в основном воспроизведена в двадцать восьмой лекции «Механики» Кирхгофа. В обоих вариантах эта статья в силу ее краткости и общности представляет собой нелегкое чтение.

Кирхгоф рассмотрел также стержень, изогнутый по винтовой линии, и кинематику тонких стержней.

В 1879 г. в работе «Ueber Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt»¹⁴¹ Кирхгоф использует уравнение Рэлея¹⁴² в виде

$$A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(c \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right) = 0, \quad (8.8)$$

где y — смещение в момент времени t в центре сечения, находящегося на расстоянии z от конца стержня, и решает его для нескольких частных случаев, сведя с помощью надлежаще выбранной подстановки к дифференциальному уравнению второго порядка¹⁴³. Им же были рассмотрены некоторые специальные случаи колебания стержней переменного сечения, где точная форма собственных функций может быть определена при помощи функции Бесселя.

В работе 1884 г.¹⁴⁴ Кирхгоф рассмотрел изменение формы тела под действием электрической или магнитной поляризации.

Б. Томсон и Дж. К. Максвелл обсуждали механические силы, которые возникают в теле, помещенном в электромагнитное поле, а Гельмгольц обобщил их результаты, введя, кроме постоянной индукции, вторую константу, которая определяется изменениями, вызванными изменениями плотности среды.

Кирхгоф дал дальнейшее обобщение их выводов, введя третью постоянную, которая выражает изменения, производимые индукцией в силу существования наиболее общей формы напряжения, когда тело является упругим.

Одновременно Лерберг¹⁴⁵ с помощью других соображений получил те же результаты. Сравнение выводов Кирхгофа с экспериментом показывает, что они не дают полного представления об отношении магнетизма и упругого напряжения.

В заключение несколько замечаний об обозначениях в теории упругости.

Важность удачного выбора обозначений и наиболее подходящей терминологии в любой математической теории вряд ли нуждается в каком-либо дополнении.

¹⁴¹ Kirchhoff G. / Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1879. Oct. S. 815—828.

¹⁴² Strutt J. W. (Lord Rayleigh). The Theory of Sound. London: MacMillan, 1871. Vol. 1. P. 240.

¹⁴³ При исследовании вынужденных колебаний струны или стержня переменной плотности возникает необходимость, кроме основных факторов, учесть силу сопротивления (пропорциональную скорость), жестостей на изгиб, смещение концов, продольное удлинение. Если принять в расчет последнее, то, согласно Кирхгофу, дифференциальное уравнение колебаний примет вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \left[1 + \frac{E}{2Sl} \int_0^l \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \quad (8.9)$$

где второе слагаемое, стоящее в прямых скобках, описывает изменение напряжения стержня вследствие продольного удлинения.

¹⁴⁴ Kirchhoff G. — Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 1884. Dez. S. 1155—1170.

¹⁴⁵ Lorberg K. // Ann. Phys. 1884. Bd. 29. S. 300—320.

тельном обосновании. В математической теории упругости этот вопрос оказался весьма трудным. Он многократно обсуждался. Вот некоторая сводка ¹⁴⁶ обозначений, предлагавшихся для компонентов деформации и напряжения.

Компоненты деформации

Сен-Венан	Кирхгоф	Кельвин и Тэт	Пирсон	Карман	Ляв
$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ $\varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}$	x_x, y_y, z_z y_z, z_x, x_y	e, f, g a, b, c	s_x, s_y, s_z $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}$	$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$	$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{xy}$

Компоненты напряжения

Кирхгоф Ляв	Кельвин Тэт	Ламе	Сен-Венан	Карман	Пуассон
X_x, Y_y, Z Y_z, Z_x, X_y	P, Q, R S, T, U	N_1, N_2, N_3 T_1, T_2, T_3	t_{xx}, t_{yy}, t_{zz} t_{yz}, t_{zx}, t_{xy}	$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ T_{yz}, T_{zx}, T_{xy}	$\hat{x}x, \hat{y}y, \hat{z}z$ $\hat{y}z, \hat{z}x, \hat{x}y$

Обозначения Кирхгофа для компонент напряжения получили широкое распространение, но для компонент деформации его обозначения оказались не столь удобными и не привились.

Для двух постоянных теорий Кирхгоф пользуется обозначениями k — модуль сдвига, $\theta = \sigma / (1 - 2\sigma)$, где σ — коэффициент Пуассона.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Пожалуй, лучше всего закончить наш краткий обзор жизни и научного творчества Кирхгофа словами Больцмана: «Внешний блеск был чужд Кирхгофу, но тем в большей мере он был наделен духовным блеском чистого разума. . . ; ему были присущи благородная скромность и привлекающая сердца доброта»¹⁴⁷ . . . Его стиль «характеризует строгая формулировка гипотез, тонкость разработки, спокойное, почти эпическое развитие мысли с железной последовательностью, без замалчивания каких-либо трудностей, с разъяснением малейших неясностей»¹⁴⁸.

Гордые, но правдивые слова, которые великий римский поэт написал о себе самом, могут быть с полным правом отнесены и к Густаву Роберту Кирхгофу:

Non omnis moriar, multaque pars mei
Vitabit Libitin(am) . . .

Quintus Horatius Flaccus. Ad Melpomenen.
(Carmina III, 30)¹⁴⁹

¹⁴⁶ Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л., 1935. С. 642—643.

¹⁴⁷ Больцман Л. Густав Роберт Кирхгоф // Статьи и речи. М.: Наука, 1970. С. 34.

¹⁴⁸ Там же. С. 50.

¹⁴⁹ Квинт Гораций Флакк. К Мельпомене. Песня III, 30: «Нет! не весь я умру, — часть меня лучшая избежит похорон. . . » (Пер. Н. И. Шатерникова). — Примеч. ред.