МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Харьковский политехнический институт»

А. А. Ларин

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Монография

Харьков 2019

УДК 534 (09)
Л25

Печатается по решению ученого совета Национального технического университета «ХПИ», протокол № 9 от 01.11. 2019 г.

Рецензенты: *К. В. Аврамов,* д-р техн. наук, проф. (Институт проблем машиностроения НАН Украины)
Ю. М. Андреев, д-р техн. наук, проф. (Национальный технический университет «ХПИ»)
В. Н. Скляр, д-р ист. наук, проф. (Национальный технический университет «ХПИ»)

Монография посвящена истории развития теории механических колебаний. В ней рассматривается история развития этой самостоятельной науки от ее зарождения до настоящего времени. Изучается влияние на развитие теории колебаний общего развития науки и техники.

Предназначено для научных сотрудников, аспирантов, студентов и всех тех, кто интересуется историей развития науки и техники.

Ларин А. А.
Л25 История теории механических колебаний : монография / А. А. Ларин ; Харьков : НТУ «ХПИ» 280 с.

Монографія присвячена історії розвитку теорії механічних коливань. У ній розглядається історія розвиток цієї самостійної науки від її зародження до теперішнього часу. Вивчається вплив на розвиток теорії коливань загального розвитку науки і техніки.

Призначено для наукових співробітників, аспірантів, студентів та усіх тих, хто цікавиться історією розвитку науки и техніки.

УДК 534 (09)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данная монография посвящена истории развития теории механических колебаний. Колебаниями называется движение или изменение состояния, обладающее той или иной степенью повторяемости. Колебания встречаются не только в технике, но и в природе, и в обществе, словом, во всех явлениях, поскольку всему присуще движение. Несмотря на разнообразие изучаемых объектов, явлений и методов их исследования, зачастую заимствованных из других наук, теория колебаний является самостоятельной наукой, имеющей общие модели и методы исследований. Она связана с наиболее сложным математическим аппаратом. Особое место в ней занимают механические колебания, именно к области механики относятся первые исследования колебаний. Вот что писал по поводу прикладной теории механических колебаний один из ее основоположников – С. П. Тимошенко еще в начале 1950-х гг.: «Современное машиностроение часто ставит проблемы, приводящие к исследованию напряжений, причиной которых являются динамические факторы. Такие проблемы, как крутильные колебания валов, вибрации турбинных лопаток и дисков, критические скорости вращающихся валов, колебания железнодорожных рельсов и мостов под катящимися нагрузками, колебания фундаментов, могут быть вполне поняты лишь в свете общей теории колебаний» [227]. Развитие техники привело к возрастанию роли теории колебаний. Уже к концу 1950-х гг. 80 % поломок машин и сооружений происходило вследствие их повышенных вибраций [33, с. 10]. Колебания также оказывают вредное воздействие на людей, связанных с эксплуатацией техники, поэтому их изучение имеет не только техническое, но и большое социальное значение.

Теория механических колебаний зародилась в XVIII веке, а на рубеже XX века стала самостоятельной наукой. При этом сама теория колебаний в развитии науки играет очень важную роль, в этой области знаний существует множество направлений и действует множество научных школ. Колебательные процессы играют важнейшую роль в технике, без их учета практически невозможно создавать новые машины и сооружения.

Несмотря на важность теории механических колебаний, истории ее развития не посвящено ни одного самостоятельного исследования. Имеющиеся главы в общей истории механики, в которых рассматривается развитие теории колебаний, носит характер поверхностных обзоров, где главным образом перечислены достижения отдельных школ и ученых. Что касается общего развития теории механических колебаний, то полной истории этого вопроса еще не предложил ни один автор. Предлагаемая монография призвана восполнить этот пробел. История развития теории колебаний в ней рассматривается под влиянием задач, диктуемых научно-техническим прогрессом.

Наиболее динамически нагруженными во все времена являются тепловые машины, так как они являются машинами циклического действия, а также транспортная, авиационная и космическая техника в силу ее облегченности по сравнению со стационарными сооружениями. В монографии излагается история развития только расчетных методов исследования колебаний механических систем. Что касается методов и средств измерений вибраций, то эти вопросы относятся, скорее, к другим наукам – электронике и информационно-измерительной технике. В книге также не рассматривается история такого важного направления, как вибрационная диагностика машин, поскольку мы считаем, что это тема отдельного исследования.

Особое внимание в монографии уделяется деятельности украинских ученых и научных школ, внесших огромный вклад в развитие теории механических колебаний и снискавших признание научной общественности не только в СССР, но и во всем мире.

Теория механических колебаний, возникшая в рамках классической механики, долгое время почти не находила применения в технике. Однако с появлением быстроходных двигателей внутреннего сгорания (ДВС), паровых и газовых турбин, самолетов, ракет и боевых кораблей облегченной конструкции и др., в них стали возникать опасные колебательные явления. Поскольку энергетические машины являются машинами циклического действия, в них всегда проявляются колебательные процессы, усугубленные повышенной температурой и высокой нагруженностью деталей. Многие задачи теории колебаний впервые проявлялись в энергетических машинах, и сейчас их прочность и надежность оцениваются только с учетом вибраций. Среди этих задач такие проблемы, как крутильные колебания валопроводов силовых установок, в том числе и содержащих нелинейные элементы; изгибные колебания балок и валов с учетом неравномерности распределения массы и податливости опор, в том числе и нелинейной; связанные колебания коленчатых валов ДВС с учетом податливости его корпуса; критические обороты валов, колебания турбинных лопаток и облопаченных дисков; нестационарные колебания машин, особенно наиболее важный их случай – проход через резонанс. В работе рассматривается также влияние достижений теории колебаний на прогресс техники вообще и энергомашиностроения в частности.

Монография состоит из восьми глав. В первой главе формулируется предмет теории механических колебаний, раскрывается ее структура, дается периодизация и историография этого раздела механики. Вторая, третья и четвертая главы посвящены трем первым периодам развития теории механических колебаний – ее зарождению, выделению в самостоятельную науку, также становлению прикладной теории механических колебаний. В пятой главе рассматриваются разделы теории колебаний, в развитие которых украинские ученые внесли наибольший вклад. Это нелинейная теория колебаний, колебания с учетом рассеяния энергии в материале и теория нестационарных колебаний. Шестая глава посвящена развитию численных методов расчетов колебаний с применением ЭВМ.

И, наконец, в последних двух главах подробнее рассматриваются самые масштабные задачи, сыгравшие большую роль в развитии теории механических колебаний. Это задачи о расчете крутильных колебаний валопроводов и расчет поперечных колебаний судовых корпусов.

ГЛАВА 1

Теория механических колебаний как самостоятельная наука

1.1. Теория механических колебаний и ее роль в развитии физико-математических наук и техники

Изучение механического движения – изменения положения тел в пространстве с течением времени – основывается на применении законов и уравнений динамики. Динамика, созданная трудами Г. Галилея, И. Ньютона, Ж. Л. д'Аламбера, Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа и др., лежит в основе прикладной механики, изучающей законы движения механизмов и машин. Выполнение механизмами и машинами своих функций связано с движением и, как следствие, с износом и возможным разрушением.

На протяжении многих веков запросы практики при создании машин вполне удовлетворялись статическими и кинематическими расчетами. Это продолжалось вплоть до середины XIX века, когда развитие машиностроения, рост мощности и скорости машин при одновременном снижении их веса привели к необходимости проведения расчетов прочности с учетом динамических нагрузок.

При работе машин в них действуют переменные внешние силы, меняются скорости отдельных частей, следовательно, возникают ускорения и соответствующие им силы инерции. Определение сил, действующих в механической системе, представляет собой задачу кинетостатики. Кинетостатический расчет производится в том случае, когда не проявляются упругие свойства деталей рассматриваемой конструкции. Таким образом, исследование движения механической системы под действием переменных внешних сил и сил инерции, но без учета упругих сил не является предметом изучения в теории колебаний. Хотя движение при этом может носить и колебательный характер, однако такая задача не требует применения математического аппарата теории колебаний.

Когда при работе звенья механизмов и машин деформируются, возникают упругие силы, приводящие к колебательным движениям. Силы, возникающие при отклонении системы от положения равновесия и стремящиеся вернуть ее в это положение, называются ***восстанавливающими.*** Они занимают особое место среди позиционных сил. В качестве восстанавливающих могут выступать не только упругие силы, возникающие при деформировании элементов механических систем, но и силы другой физической природы – квазиупругие. Их роль могут играть силы тяжести (например, колебания маятника) или архимедова выталкивающая сила (качка корабля). Восстанавливающие силы обуславливают способность системы совершать свободные колебания. Таким образом, механические колебания машин и сооружений вызваны не только действующими в них переменными силами, но также и их упругими свойствами.

Изучение колебательных процессов в механических системах, происходящих под действием упругих или квазиупругих сил, а также внешних возмущающих и сил сопротивления (демпфирования) и составляет предмет теории механических колебаний.

Далее мы приведем классификацию теории механических колебаний, которая является общеизвестной, с ней можно подробнее ознакомиться в основополагающих трудах по данной дисциплине, например [18; 186; 241–243]. Механические колебания можно классифицировать по виду дифференциальных или интегральных уравнений, описывающих колебательные процессы, по типу механических систем, виду решения и др. Если в системе действуют только восстанавливающие силы и кроме них еще, возможно, силы сопротивления, то движение под действием таких сил называется ***свободными колебаниями.*** При наличии внешних сил, зависящих от времени, называемых

возмущающими силами система совершает ***вынужденные колебания***. Особое место среди вынужденных колебаний занимает явление ***резонанса*** – резкого возрастания амплитуд вынужденных колебаний, когда их частота близка к частоте возмущающей силы. Резонансные колебания представляют для машин и механизмов особую опасность и для борьбы с ними применяются средства в виде «отстройки» от резонанса, ***виброгашения*** (применение ***демпферов*** и ***антивибраторов***), ***виброизоляции***, ***уравновешивания*** сил инерции и др.

По характеру процесса колебания можно разделить на ***установившиеся***, в этом случае механическая система совершает периодические движения и ***нестационарные*** (переходные режимы), при которых движение, хотя и носит повторяющийся характер, но не является периодическим. Наиболее важной для техники разновидностью переходного режима является ***проход через резонанс***. В случае переходного режима интегрирование дифференциальных уравнений движения является более трудоемким.

Важнейшим вопросом при изучении колебательных процессов является вопрос схематизации физической модели, т.е. построение механической модели, адекватно отражающей поведение реальной системы при изучении интересующих нас явлений. В теории колебаний наибольшее распространение получили детерминированные модели, т.е. такие, все параметры которых имеют фиксированные значения, а получаемые законы движения имеют вид достоверных количественных характеристик. Особый раздел составляют задачи колебаний при ***случайном возбуждении.***

В теории колебаний различаются модели двух видов – ***дискретные*** и ***континуальные***. Дискретные модели предусматривают такие идеальные объекты как абсолютно твердое тело и материальная точка. Упругие свойства системы при этом отражаются безынерционными упругими соединениями, а рассеяние энергии – диссипативными силами. Несмотря на кажущуюся примитивность таких идеализированных моделей, практически все колебательные эффекты могут быть изучены с их помощью. При использовании моделей второго рода рассматривается упруго деформируемая среда, т.е. твердые деформируемые тела с распределенными параметрами. Если движение дискретных систем описывается простыми дифференциальными уравнениями, то для континуальных составляются дифференциальные уравнения в частных производных. Зато континуальные модели, в отличие от дискретных, позволяют оценить напряженно-деформированное состояние элементов конструкций.

По типу дифференциальных уравнений теория колебаний делится на ***линейную***, где колебания описываются линейными уравнениями и ***нелинейную***, в которой уравнения содержат нелинейные члены в упругих или диссипативных силах или имеют члены с переменными коэффициентами. Для нелинейных систем проявляется множество специфических эффектов, не встречающихся в линейных задачах. К ним относятся неоднозначность режимов колебаний, ***автоколебания, субгармонические колебания*** и др. Нелинейная теория колебаний в настоящее время бурно развивающаяся часть общей теории колебаний.

Одним из разделов теории колебаний считается ***теория устойчивости движения***, позволяющая судить о качественном поведении механической системы без решения дифференциальных уравнений. Теория устойчивости движения, зародившаяся в механике, нашла широкое применение практически во всех отраслях науки, а в теории автоматического управления движения вышла на первый план. Сейчас ее можно рассматривать как самостоятельный раздел науки.

В последние годы развивается новое направление теории колебаний – ***вибрационная диагностика*** технического состояния машин. Являясь также самостоятельным направлением, техническая диагностика во многом основывается на достижениях теории колебаний.

На теорию механических колебаний влияют многие факторы, в свою очередь, решение динамических задач является мощным стимулом для развития науки и техники. Важнейшим фактором является общий уровень развития науки, в особенности математики, физики, теоретической и прикладной механики. Теория механических колебаний выделилась в отдельную отрасль науки из теоретической и аналитической механики и до сих пор с ней неразрывно связана. Если для рассмотрения колебаний дискретных консервативных систем было достаточно достижений аналитической механики, основоположником которой был Ж. Л. Лагранж, то для изучения колебаний континуальных систем потребовалось развитие теории упругости, в рамках которой первое время и развивался этот раздел теории колебаний.

Постановка и решение практических задач, возникших в технике в XIX веке, могли быть осуществлены только с появлением прикладной механики. На этой основе выросла в начале XX века прикладная теория механических колебаний, оказывающая большое влияние на развитие техники.

Изучение механического движения путем составления соответствующей модели сводится к решению некоторой математической задачи. Вследствие этого многие математические методы были развиты благодаря задачам механики. В частности, под влиянием теории колебаний возникла математическая физика, была продвинута теория дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и в частных производных, сформировано важнейшее понятие математического анализа – понятие функции, возникло разложение функции в тригонометрический ряд и др. Зачастую получить аналитическое решение задачи механики трудно, а порой и вообще невозможно. Тогда приходится прибегать к приближенным или итерационным методам решения. Здесь теория колебаний сильно зависит от развития численных методов и развития вычислительной техники, но и сама, в то же время, способствует их совершенствованию.

Теория колебаний и волн составляет обширный раздел физики. Именно в физике впервые проявились специфические эффекты, связанные с нелинейностями рассматриваемой системы. Методы решения нелинейных дифференциальных уравнений, разработанные в физике, были с успехом применены в теории механических колебаний. Следует также отметить применение методов теории колебаний в астрономии. Так Лагранж и Лаплас с помощью теории малых колебаний разработали теорию вековых возмущений элементов планетных орбит.

Даже точное математическое решение задачи механики не может полностью соответствовать действительности в силу несовершенства модели и должно сверяться с экспериментальными данными. Кроме того, зачастую построение более или менее адекватной модели тоже связано с проведением экспериментов. В связи с этим на развитие теории колебаний влияет состояние средств проведения экспериментов и соответствующих методов их обработки.

Важнейшим фактором, влияющим на состояние теории механических колебаний, является уровень развития техники и, в первую очередь, машиностроения. Пока в технике не было потребностей в проведении динамических расчетов, на решение задач динамики, в том числе и теории колебаний, уходили сотни лет. Так, например, было с простейшими задачами о колебаниях натянутой струны и однородного стержня.

С 1950-х гг. на прикладную теорию колебаний огромное влияние оказывает появление и совершенствование электронной вычислительной техники, особенно бурно развивающейся в последние годы. Появление мощных ЭВМ привело к ограничению применения аналитических методов теории колебаний и постепенному вытеснению множества частных, «ручных» способов счета, хотя часть методов оказалась пригодной и для программирования. Быстрый рост памяти и быстродействия ЭВМ привели к постепенному вытеснению этих методов более общими, но трудоемкими по количеству операций.

В области линейных колебаний дискретных систем, стала возможна реализация спектральной теории на основе применения методов линейной алгебры. Для нелинейных колебаний были разработаны более мощные и универсальные численные методы решения нелинейных уравнений, записанных как в дифференциальной, так и в интегральной формах. Эти методы с успехом применяются для расчетов колебаний нелинейных систем.

Для континуальных систем был разработан метод, основанный на замене производных в дифференциальных уравнениях конечными разностями. Еще более универсальным является метод конечных элементов (МКЭ), основанный на разбиении системы на множество элементов, имеющих аналитическое решение с последующим «сшиванием» этих решений в узловых точках. Применение МКЭ произвело революцию в решении задач механики сплошной среды. Создание такого универсального метода стало возможно только благодаря наличию ЭВМ.

Быстродействующие ЭВМ позволили решать задачи переходных процессов, в том числе и для нелинейных систем с помощью численного интегрирования. Наличие эффективных программ расчета колебаний позволило решать не только задачи анализа, но и синтеза механических систем по вибрационным характеристикам.

Дальнейшее развитие вычислительной техники привело к разработке систем аналитических преобразований (систем компьютерной алгебры) на базе ЭВМ. Их применение позволило автоматизировать процесс построения математических моделей динамических процессов, происходящих в механизмах и машинах, и создать универсальные программные комплексы, пригодные для расчетов любых механических моделей. В основе таких комплексов лежат самые общие понятия аналитической механики и вариационные принципы механики.

В настоящее время совершенствование техники, тем более создание новой, невозможно без проведения широкомасштабных динамических расчетов. Задача динамической прочности машин и сооружений связана, прежде всего, с определением усилий и напряжений в них возникающих. Большинство деталей приходится рассматривать как части упругих систем в связи с происходящими в них колебательными процессами, влияющими на величину и характер напряжений, возникающих при их работе. Основной целью таких расчетов является определение максимальных динамических напряжений или упругих деформаций при различных режимах работы механизмов и машин. Целью динамических расчетов может быть анализ заданной системы, когда конструкция машины известна и определяется динамическая напряженность ее элементов. Однако все чаще возникают задачи разработки конструкций механических систем, обеспечивающих наиболее благоприятные условия их работы с точки зрения динамической прочности – задача синтеза механической системы по вибрационным характеристикам.

1.2. Периодизация теории механических колебаний

Важнейшим вопросом при изучении истории любой науки является периодизация, позволяющая установить ее взаимосвязи с развитием техники, других наук и общества в целом. Предлагаемая периодизация теории механических колебаний составлена с учетом того, что данная наука первоначально развивалась в рамках общей механики, а затем самостоятельно, но во взаимосвязи с математикой, аналитической и прикладной механикой, теорией упругости, физикой и техникой. В ней мы опираемся на периодизацию общей механики, предложенную профессором Н. Д. Моисеевым в работе [175, с. 18–23]:

1. Донаучный период предшествует так называемой античности и простирается примерно до VI – V веков до н.э.

2. Элементарный период VI – V вв. до н.э. – середина XVII века.

3. Период формирования основных понятий и основных законов механики середина XVII века – первая треть XVIII века.

4. Аналитический период вторая треть XVIII века – начало XX века.

5. Физико-технический период – XX век.

Учитывая, что данная периодизация механики была предложена Н. Д. Моисеевым в начале 1950-х годов, к ней можно было бы еще добавить компьютерную механику – механику периода научно-технической революции (НТР) начавшейся именно в середине XX века.

Периодизация теории колебаний, в отличие от периодизации общей механики, не охватывает всего времени развития человечества, так как до конца XVII века еще не было и динамики, основанной на правильном представлении об инерции и причинах изменения механического движения, и в области колебаний почти ничего не предпринималось. В связи с этим можно предложить такую периодизацию теории колебаний:

I период – зарождение теории колебаний в рамках теоретической механики (XVII – XVIII века). Этот период характеризуется зарождением и развитием динамики в трудах Галилея, Гюйгенса, Ньютона, д'Аламбера, Л. Эйлера, Д. Бернулли и Лагранжа. Уровень развития техники в этот период еще достаточно низкий и зарождающееся мануфактурное производство еще не ставит перед динамикой практических задач.

Большой вклад в основы теории колебаний внесли Л. Эйлер, заложивший основы теории статической устойчивости и теории малых колебаний, д'Аламбер, Д. Бернулли и Лагранж. В их работах сформировались понятия периода и частоты колебаний, формы колебаний, вошел в обиход термин малые колебания, был сформулирован принцип суперпозиции решений, сделаны попытки разложения решения в тригонометрический ряд. Таким образом, в течении XVIII в. в теории малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы и колебаний континуальных упругих систем были выработаны основные физические схемы и разъяснены принципы, существенные для математического анализа проблем. Конец I периода ознаменован выходом в свет в 1788 г. трактата Лагранжа «Аналитическая механика», ставшего основой теории колебаний дискретных механических систем [121; 122].

II период – аналитический (конец XVIII века – конец XIX века). В течение XIX века были заложены основы теории механических колебаний. Лагранж рассматривал свободные колебания дискретных механических систем без учета сопротивления. О. И. Сомов и лорд Рэлей* создали методику построения дифференциальных уравнений, описывающих малые колебательные движения дискретных механических систем общего вида с помощью уравнений Лагранжа II рода.

Теория упругости, созданная усилиями представителями французской математической школы в первой четверти XIX века, стала основой для создания теории колебаний континуальных систем.

Рост крупной промышленности в конце XVIII – начале XIX века, вызванный повсеместным внедрением паровой машины, обусловил выделение прикладной механики в отдельную дисциплину. У ее истоков стояли А. Навье, Г. Кориолис и Ж. В. Понселе. Ими были систематизированы многочисленные исследования прикладного характера, выполненные в XVII – XVIII веках и произведен ряд работ по важнейшим вопросам техники [90, с. 193–194]. Но вплоть до конца XIX века расчеты на прочность велись в статической постановке, так как машины были еще маломощными и тихоходными.

К концу XIX века, с ростом скоростей и уменьшением габаритов машин пренебрегать колебаниями стало невозможно. Многочисленные аварии, происходившие от наступления резонанса или усталостного разрушения при колебаниях, заставили инженеров обратить внимание на колебательные процессы. Из возникших в этот период проблем следует отметить следующие: обрушение мостов от проходящих поездов, крутильные колебания валопроводов и вибрации судовых корпусов, возбуждаемые силами инерции движущихся частей неуравновешенных машин.

---

* Лорд Рэлей до получения в 1873 г. титула после смерти отца Джон Уильям Стретт (1842–1919). Правильнее английское Rayleigh писать Рэйли, некоторые авторы пишут Рэйлей, однако мы остановимся на более привычном написании – Рэлей.

III период – становление и развитие прикладной теории колебаний (1900 – 1960-е гг.). Развивающееся машиностроение, совершенствование локомотивов и кораблей, появление паровых и газовых турбин, быстроходных ДВС, автомобилей, самолетов и т.д. потребовали более точного анализа напряжений в деталях машин. Это было продиктовано требованиями более экономного использования металла. Облегчение конструкций породило проблемы вибраций, которые все чаще становятся решающими в вопросах прочности машин. В начале XX века многочисленные аварии убедительно показывают, к каким катастрофическим последствиям может привести пренебрежение вибрациями или незнание их.

Появление новой техники, как правило, ставит новые задачи перед теорией колебаний. Так в 30–40-е гг. возникли новые задачи, такие как срывной флаттер и шимми в авиации, изгибные и изгибно-крутильные колебания вращающихся валов и др., что потребовало разработки новых методов расчетов колебаний. В конце 20-х гг. сначала в физике, а затем и в механике начинается исследование нелинейных колебаний. В связи с развитием систем автоматического управления и другими запросами техники, начиная с 30-х гг., получила широкое развитие и применение теория устойчивости движения, основой которой послужила докторская диссертация А. М. Ляпунова «Общая задача об устойчивости движения».

Отсутствие аналитического решения для задач теории колебаний даже в линейной постановке, с одной стороны, а вычислительной техники – с другой, привело к разработке большого количества разнообразных численных методов их решения.

Необходимость проведения расчетов колебаний для различных видов техники привело появлению в 1930-е гг. первых учебных курсов теории колебаний.

Переход к **IV периоду – компьютерному** (начало 1960-х гг. – настоящее время) связан с эпохой НТР Наибольшее влияние на развитие не только теории колебаний, но и всей науки, в этом периоде оказывает появление и стремительное развитие электронной вычислительной техники. Этот период характеризуется появлением новой техники, в первую очередь авиационной и космической, робототехнических систем. Кроме того, развитие энергомашиностроения, транспорта, и др. выдвинуло проблемы динамической прочности и надежности на первое место. Это объясняется возрастанием эксплуатационных скоростей и снижением материалоемкости с одновременным стремлением к повышению ресурса машин. В теории колебаний все больше задач решается в нелинейной постановке. В области колебаний континуальных систем, под влиянием запросов авиационной и космической техники возникают задачи динамики пластин и оболочек [40, с. 7]. Совершенствование ЭВМ, рост их возможностей обусловило появление новых и развитие существовавших ранее численных методов расчетов колебаний. Это позволило ставить и решать не только задачи анализа, но и синтеза механических систем по вибрационным характеристикам.

1.3. Историография в изучении развития теории механических колебаний

Важнейшей частью исторического исследования является изучение литературы, посвященной истории, т.е. историографии проблемы. Теория механических колебаний является одновременно и разделом механики, и частью общей теории колебаний, которая в свою очередь является составляющей прикладной математики и математической физики и связана с наиболее сложным математическим аппаратом. В связи с этим изучение истории развития теории механических колебаний требует изучения литературы не только по истории данной науки, но и по истории теоретической и аналитической механики, математики, в том числе математической физики а также истории различных видов техники.

Многие ученые, занимавшиеся теорией механических колебаний, уделяли внимание ее истории. Уже Лагранж в своей «Аналитической механике» приводит сведения о первых исследованиях в области аналитической механики в целом, в том числе и в теории колебаний [121]. Наиболее полный обзор работ за первое столетие существования этой науки приводит Рэлей в «Теории звука» [215]. Однако полной истории развития теории колебаний не приводит ни один автор. В частности, в мировой литературе нет ни одной монографии, посвященной развитию этой науки. В то же время другим разделам механики посвящены отдельные исследования. К ним относятся фундаментальные труды С. П. Тимошенко «История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений» [226], С. А. Бернштейна «Очерки по истории строительной механики» [20], А. Н. Боголюбова «История механики машин» [25] и Н. Д. Моисеева «Очерки развития теории устойчивости» [176]. Во всех перечисленных монографиях упоминаются отдельные достижения в области теории колебаний.

Долгое время изучению истории науки и техники внимания почти не уделялось. В СССР интерес к ней проявился в начале 1930-х гг. В частности, Постановлением Общего собрания Академии наук СССР №1 от 28 февраля 1932 г. был учрежден Институт истории естествознания и техники (ИИЕТ) им. С. И. Вавилова. Больший интерес к истории науки в целом и механики в частности стал проявляться в 1960-е гг. [58, с. 6]. Основными работами в этой области являются фундаментальные работы советских ученых – историков математики и механики.

Наиболее полно в литературе советского периода история механики освещена в двухтомном коллективном труде «История механики», подготовленном ИИЕТ АН СССР и изданным под общей редакцией А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского в 1971 и 1972 гг. [89; 90]. В нем главы, посвященные истории отдельных разделов механики, готовили известные ученые, работающие в данной области. В частности, в первом томе, в главе, посвященной классической и аналитической механике (авторы И. Б. Погребысский и Л. С. Фрейман), рассматриваются первые задачи теории механических колебаний, положившие начало этому разделу механики [89, с. 83–157]. Теории колебаний и волн посвящена глава И. Б. Погребысского [89, с. 250–281]. Во втором томе вопросы теории колебаний рассматриваются только в главе «Механика деформируемого твердого тела (XX в.)» (М. И. Рейтман, Я. Рыхлевский, Г. С. Шапиро) [90, с. 245–280].

Из других работ можно отметить монографии А. Т. Григорьяна «Механика от античности до наших дней» [59], И. Н. Веселовского «Очерки по истории теоретической механики» [36] и Д. Р. Меркина «Краткая история классической механики Галилея – Ньютона» [156]. Однако в этих работах история теории колебаний не рассматривается, так как авторы считают ее самостоятельной наукой, выросшей из теоретической механики [90, с. 3; 156, с. 125–127].

В целом обзор работ по истории механики 60 – 70-х гг. XX века, выполненный А. Т. Григорьяном и Г. И. Михайловым, показал, что среди множества трудов нет исследований по истории теории механических колебаний [58].

Большой вклад в развитие истории механики внес профессор Николай Дмитриевич Моисеев. Будучи крупным специалистом в области небесной механики, он в 1944 г. подготовил в Московском государственном университете (МГУ) курс лекций по истории и методологии механики, который и читал до своей кончины. Этот курс лег в основу книги «Очерки развития механики» [175], изданной после смерти автора его учениками. В этой работе впервые дается исторический анализ развития механики в тесной связи с другими науками и производством. В ней много внимания уделяется философско-методологическим аспектам развития механики, подробно рассматриваются труды ученых – основоположников механики и предлагается периодизация развития данной науки [175, с. 18–23]. Однако развитию теории колебаний в книге Н. Д. Моисеева уделено всего 3,5 страницы, посвященных в основном теории устойчивости Ляпунова [175, с. 358–362].

Ученица Н. Д. Моисеева И. А. Тюлина в работе «История и методология механики» рассматривает теорию колебаний только поверхностно [231, с. 182–186]. Кроме того, в этой книге, предназначенной для студентов механико-математических факультетов университетов, не рассматриваются вопросы прикладной механики.

Из более поздних работ большой интерес представляет фундаментальный труд «История механики в России» [88], изданный в 1987 г. под редакцией А. Н. Боголюбова и И. З. Штокало Институтом математики АН УССР. Авторский коллектив насчитывает десятки ученых – видных механиков и историков науки. В книге рассказывается о многих российских ученых, в том числе о тех, кто внес большой вклад в развитие теории колебаний или способствовал созданию научных школ Украины в области механики. Среди них Л. Эйлер, О. И. Сомов, В. Л. Кирпичев, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Н. Н. Салтыков, А. Н. Крылов, И. Г. Бубнов и С. П. Тимошенко. Однако истории теории колебаний и в этой книге посвящен совсем небольшой раздел

(3,5 страницы), подготовленный А. Н. Боголюбовым и И. К. Рахимовой [88, с. 299–302]. В нем в очень сжатой форме описано развитие решения основных проблем теории колебаний и перечислен вклад в это дело российских ученых.

Начало развития механики в Украине можно связать с открытием в 1805 г. Харьковского университета – одного из старейших в Российской империи. Преподавание механики в нем всегда стояло на довольно высоком уровне. В отличие от других университетов, где механику читали представители прикладной механики, здесь было принято, чтобы этот важнейший курс преподавали математики [137, с. 138–142]. В становлении математики и механики в Украине большую роль сыграло Харьковское математическое общество. История его развития рассматривается в монографии Н. Н. Кушлаковой и В. С. Савчука [120].

Советские ученые внесли большой вклад как в развитие математики и механики, так и в развитие прикладной теории колебаний, которая в Советском Союзе стала развиваться только в 1930-е гг. в связи с индустриализацией страны. В истории теории механических колебаний особое место занимает деятельность украинских ученых. Мировое признание получила деятельность целого ряда научных школ Украины в области механики. Среди них можно выделить школы, прославившиеся достижениями в разделе теории колебаний:

На базе Института технической механики и Киевского политехнического института сформировалась Киевская научная школа механики твердого деформируемого тела. У ее истоков стояли знаменитые ученые В. Л. Кирпичев, С. П. Тимошенко, К. К. Симинский и Е. О. Патон. Из ученых – представителей киевской школы, занимавшихся теорией колебаний можно отметить следующих:

Александр Николаевич Динник (1876–1950) – академик АН УССР (1929) и АН СССР (1946), основоположник отечественной школы теории упругости.

Николай Николаевич Давиденков (1879–1962) – академик АН УССР (1939), научные интересы которого сосредоточились на стыке механики и физики конструкционных материалов.

Сергей Владимирович Серенсен (1905–1977) – академик АН УССР (1939), создал научную школу по конструкционной прочности.

Развитие динамической прочности учеными Института строительной механики АН УССР в 1930 – 1940-е гг. рассматривается в статье [126].

К киевской школе механиков – прочнистов примыкал член-корреспондент АН УССР Илья Яковлевич Штаерман (1891–1962). Его ученик Владимир Николаевич Челомей (1914–1985), академик АН СССР (1962), конструктор ракетной техники начинал свою научную деятельность в области динамики авиационных моторов. Под редакцией Челомея в 1979 – 1981 гг. выпущен шеститомный справочник «Вибрации в технике» [37].

Среди других ученых, начинавших свой путь в области теории колебаний еще в предвоенный период можно назвать академика А. Д. Коваленко (1905–1973), докторов технических наук Н. Н. Афанасьева, Д. В. Вайнберга, С. Э. Гарфа, И. М. Тетельбаума, Н. И. Черняка и В. Г. Чудновского.

В начале 1930-х гг. зародилась всемирно известная Киевская школа нелинейной механики, основателями которой были академики Николай Митрофанович Крылов (1879–1955) и Николай Николаевич Боголюбов (1909–1987). Деятельность представителей этой научной школы наиболее изучена.

К обеим киевским школам механики принадлежит Георгий Степанович Писаренко (1910–2003) – организатор и первый директор Института проблем прочности (ИПП) и основатель научной школы в области колебаний упругих тел с учетом несовершенной упругости материала. Подробно деятельность этой научной школы освещена в разделе 8 «Колебания неконсервативных механических систем» коллективной монографии, выпущенной в ИПП и посвященной 95-летию со дня рождения основателя школы и института – Г. С. Писаренко [200, с. 809–916]. В этой книге обобщены исследования, выполненные в ИПП НАН Украины, с момента его основания и приведена обширная библиография, посвященная этой теме.

В связи с вышесказанным важными источниками для изучения истории теории механических колебаний являются труды, посвященные развитию механики и математики в СССР в целом и в Украине в частности. Одним из первых фундаментальных трудов в этом направлении является сборник, изданный под редакцией В. З. Власова, В. В. Голубева и Н. Д. Моисеева к тридцатилетию Советской власти.

Однако в нем не ставилась цель отразить в полной мере все развитие механики в СССР [160, с. 7]. Так статья Н. Н. Боголюбова «Колебания» посвящена в основном проблемам нелинейной механики и деятельности научных школ Мандельштама – Андронова и Крылова – Боголюбова [160, с. 99–114].

К пятидесятилетию Советской власти также был выпущен целый ряд юбилейных трудов по истории науки в СССР. ИИЕТ АН СССР в серии «Советская наука и техника за 50 лет» издал под редакцией академика А. Ю. Ишлинского книгу «Развитие механики в СССР» [203]. В ней глава V «Теория колебаний», написанная В. О. Кононенко, также посвящена в основном деятельности советских школ Мандельштама – Андронова и Крылова – Боголюбова в области теории нелинейных колебаний [203, с. 93–121].

В четырехтомном издании «Механика в СССР за пятьдесят лет» (главный редактор академик Л. И. Седов) теории механических колебаний посвящен раздел первого тома «Общая и прикладная механика» под названием «Прикладные проблемы теории колебаний» (авторы И. И. Блехман и Я. Г. Пановко) [158, с. 89–113]. Этот раздел представляет собой перечень основных трудов советских ученых в области теории колебаний, правда без списка литературы.

Кроме этого в первом томе несколько разделов посвящены истории развития отдельных методов решения задач теории колебаний. Среди них «Метод осреднения в теории нелинейных колебаний» М. В. Волосова [158, с. 115–135], «Метод точечных отображений» Ю. И. Неймарка [158, с. 137–156], «Метод малого параметра» И. И. Блехмана [158, с. 89–113] и «Методы решения теории колебаний» И. И. Блехмана и Я. Г. Пановко [158, с. 167–169]. Таким образом, данный сборник трудов представляет собой наиболее полное исследование из истории развития теории колебаний в СССР. Однако во всех разделах ни слова не говорится об объектах, для которых применялись рассматриваемые методы расчетов колебаний.

В третьем томе «Механика деформируемого твердого тела», вопросы теории колебаний рассматриваются в главе «Механика деформируемых твердых тел» (Н. В. Зволинский, М. И. Рейтман, Г. С. Шапиро) [159, с. 292–323]. В главе «Теория упругих оболочек и пластинок» (Н. А. Алумяэ) [159, с. 227–265] освещены вопросы колебаний оболочек и пластинок, в том числе и новых задач – колебаний в потоке газа и колебаний оболочек, заполненных жидкостью.

Еще в одной коллективной монографии «Развитие общей механики в России и Украине в 20–80-е гг. XX века», изданной в 1998 г. совместно российскими (ИИЕТ им. С. И. Вавилова) и украинскими (Центр исследований научно-технического потенциала и истории науки им. Г. М. Доброва) учеными под редакцией А. Ю. Ишлинского, Г. С. Писаренко и Ю. А. Храмова, развитию теории механических колебаний посвящен раздел «Колебания в механических системах» (авторы Я. Г. Пановко и М. З. Коловский). В нем отражены достижения украинских ученых. Однако, ввиду краткости, они просто перечислены, в данном разделе нет никаких подробностей о проводимых работах [204, с. 211–232].

Зато в разделе «Нелинейная механика» представители научной школы Крылова – Боголюбова Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко и О. Б. Лыкова достаточно подробно рассказывают о ее достижениях [204, с. 233–272]. При этом под термином «нелинейная механика» авторы понимают теорию нелинейных колебаний, хотя современная трактовка этого понятия значительно шире.

Однако данные авторы основывают свои исследования на изучении публикаций всемирно известных киевских ученых. В связи с этим из поля зрения историков науки выпадают годы Великой Отечественной войны, во время которой научные статьи и, тем более монографии, почти не издавались. Складывается впечатление, что деятельность этих ученых временно была приостановлена. Однако в указанный период Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов активно работали в области авиамоторостроения, в частности ими были разработаны методы расчетов крутильных колебаний авиамоторов. Этому вопросу посвящено исследование, источником для которого стали материалы архива Института механики НАН Украины [132].

Деятельность харьковских ученых освещена гораздо слабее. О представителях харьковской школы механики и прикладной математики говорится в очерке академика А. П. Филиппова в книге «Розвиток науки в Українській РСР за 40 років» [207, с. 518–529] и в статье [244], в которой он описывает развитие исследований в области динамики машин на Украине уже за 50 лет. В основном речь идет о харьковской научной школе. Однако ввиду малого объема этих работ данный вопрос рассматривается поверхностно.

Развитию науки в Западных областях Украинской ССР за годы Советской власти посвящена монография [206]. В ней есть очерк, посвященный развитию математики и механики, в котором тоже мало сведений о развитии теории колебаний [206, с. 17–34].

Из работ по истории математики можно выделить коллективный четырехтомный (в шести книгах) труд «История отечественной математики», выпущенный отделом истории математики Института математики АН УССР под редакцией И. З. Штокало в 1968–1970 гг. Например, при изучении первой задачи, с которой начиналась математическая физика – задачи о колебаниях натянутой струны [91, с. 215–216]. В этом труде также подробно рассматривается применение асимптотических методов для расчета колебаний, в том числе и деятельность выдающихся математиков – основоположников киевской школы нелинейной механики Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского.

Важными для изучения истории теории колебаний являются работы по истории развития научно-исследовательских и учебных институтов, а также научные биографии ученых, работавших в данной области.

На основании историографического анализа можно сделать вывод о том, что для изучения истории развития теории механических колебаний есть достаточно обширная литература. Однако эти источники разрознены и в них, в основном, рассматриваются математические проблемы теории колебаний. Что касается технических приложений теории колебаний, то в литературе, посвященной истории техники, проблемы вибраций если и рассматриваются, то, как правило, весьма поверхностно. В связи с этим актуальным является составление общей истории теории механических колебаний.

ГЛАВА 2

Зарождение теории механических колебаний (XVII – XVIII века)

2.1. Первые задачи теории колебаний

Теоретической основой теории механических колебаний является классическая механика. До ее появления в конце XVII века, ни о какой теории колебаний не могло идти речи. Народы, создавшие великие цивилизации Древнего Востока, широко использовали простейшие механизмы – рычаг, клин, наклонную плоскость. Однако применение этих механизмов было эмпирическим знанием, поскольку объяснений принципов их работы ни в Египте, ни в Вавилоне не сохранилось. В Древней Греции наряду со стихийным применением простых механизмов, появляются и механические теории. Это принципиально отличает античную механику от достижений Древнего Востока.

Однако механика античности представляла собой в основном статику и кинематику. Статика была непосредственно связана с запросами практики, ее основными проблемами были расчет выигрыша в силе при использовании простых механизмов и вывод условий равновесия при плавании тел и взвешивании. Основой античной статики служил «принцип рычага».

Аристотель создал такое научное направление как кинематическая статика, впоследствии выросшее в аналитическую статику. Он сформулировал правило сложения перемещений, правда только для частного случая перпендикулярности перемещений и, основываясь на соотношении скоростей точек механизмов, получил правила равновесия рычага, блоков и весов. Ученый с точки зрения кинематики описал действие простейших механизмов. Наиболее полно его учение изложено в труде «Механические проблемы», которое приписывается Аристотелю. Позже Герон Александрийский выводит из него «Золотое правило механики». Основоположником геометрического направления в статике является Архимед. Он впервые подошел к механике как к математической дисциплине и математически строго вывел закон рычага. После этого описание работы всех простых механизмов он сводит к рычагу.

Динамика же основывалась античности на ошибочных представлениях Аристотеля, который, основываясь на бытовых повседневных наблюдениях, считал, что для поддержания равномерного прямолинейного движения тела к нему необходимо постоянно прикладывать силы. Его усилиями также утвердилась геоцентрическая система строения мира. Католическая церковь, первоначально враждебно настроенная к Аристотелю, с XIII века признала его величайшим авторитетом по всем вопросам, не касавшихся, правда, догматов религии. Хотя философы считают Аристотеля «основателем истинного естествознания», он отнюдь не считается таковым у физиков и механиков [156, с. 9–10].

Истинно научная динамика зародилась в конце XVI века и с ее появлением механика превратилась в науку о движении, в которой появились попытки объяснить все явления природы на основе развития логических принципов. Одним из первых, кто усомнился в правильности учения Аристотеля, был Джамбаттиста Бенедетти (1530–1590), который обратил внимание на то, что действие сил выражается не в поддержании, а в изменении движения [89, с. 77–78]. Достоверность научных представлений в рамках механической картины мира тесно была связана с развитием экспериментальных методов исследования. Статика, в отличие от динамики, не подтверждалась в такой степени экспериментами. Динамика, отвечая на вопрос о переходе тела или механической системы из начального состояния к последующему под действием заданных сил, могла быть подтверждена соответствующим экспериментом. Это и придало механическому естествознанию ту необратимость развития и ту достоверность, которые отличают науку XVII века от научных представлений предыдущего периода [59, с. 126–127].

Одними из первых экспериментальных исследований в механике были опыты Галилео Галилея (1564–1642), который открыл законы падения тяжелых тел, а также установил законы движения тел по наклонной плоскости. Он полностью доказал несостоятельность динамики Аристотеля и наметил путь к созданию новой динамики – ньютоновской. С именем Галилея связано и начало исследования колебаний маятника. Еще в годы учебы в Пизанском университете, скучая во время мессы, Галилей заметил тот факт, что частота колебаний огромного паникадила, подвешенного к куполу собора, не зависит от их амплитуды.* Изохронность, т.е. свойство маятника сохранять частоту свободных колебаний при малых отклонениях, было проверено начинающим ученым на опытах и легло в основу учения о колебательном движении.

Галилей брал два одинаковых маятника и отклонял их на разные углы. Отпустив маятники, он мог убедиться, что они колеблются синхронно, т.е. период не зависит от амплитуды колебаний. Этот факт убедительно подтвердил наблюдение, сделанное в соборе.

Второй опыт Галилей провел взяв два шнура равной длины. На конце одного он прикрепил шарик из свинца, а на конце другого шарик из хлопка. Одинаково отклонить оба маятника он предоставил их самим себе. Период колебаний получился одинаковым, хотя колебания быстрее затухали у легкого шарика. Последнее ученый объяснял действием сопротивления воздуха.

Таким образом, Галилей установил, что период колебаний математического маятника не зависит от его массы и от амплитуды колебаний. При этом он ошибочно считал, что последнее свойство справедливо и при больших колебаниях маятника. Галилей также опытным путем установил пропорциональность между длинами маятников и квадратами времени их качания. Свойство маятника сохранять частоту свободных колебаний при малых отклонениях Галилей хотел использовать для создания часов. Точные часы (хронометр) были крайне необходимы мореплавателям для определения местоположения корабля. В 1636 г. Галилей предложил

---

* Ученик Галилея и его первый биограф Винченцо Вивиани утверждал, что это наблюдение ученый сделал в 1583 году, когда ему было 18 лет.

правительству Голландии изготовить часы с маятником. Однако дальше писем дело не пошло. В 1641 г. он все-таки взялся за изготовление часов, но смерть помешала довести исследования до конца. Его сын, Винченцо Галилей, продолжая дело отца, в 1648 г. принялся за изготовление часов, но тоже скоро скончался.

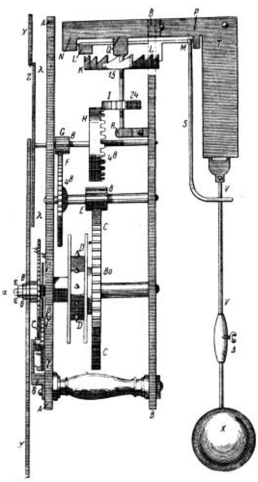

Рис. 2.1. Маятниковые часы Х. Гюйгенса

В начале XVII веке в науке стали возрождаться экспериментальные методы исследования. Одним из первых ученых, занимавшихся экспериментальными исследованиями колебаний, был Марен Мерсенн (1588–1648). Именно Мерсенн первым обратил внимание Христиана Гюйгенса на колебательное движение [60, с. 218]. Голландский ученый мог знать о проблеме создания маятниковых часов и от своего отца Константина Гюйгенса, который был секретарем штатгальтера Голландии, и именно через него шла переписка Галилея с правительством Голландии. Гюйгенс построил первые часы с маятником и в 1657 г. получил патент Генеральных штатов (правительства) Голландии на изобретенные им маятниковые часы со «свободным спуском» и в следующем году опубликовал свои результаты в брошюре. До конца дней Х. Гюйгенс занимался усовершенствованием часов, пытаясь создать хронометр, пригодный для определения местоположения корабля в море. В 1673 г. Гюйгенс издал книгу «Horologium oscillatorium» («Маятниковые часы»), в которой рассказывает о положительных результатах испытаний маятниковых часов в море [65, с. 28–33]. В том же году парижский мастер Исаак Тюре изготовил часы с учетом всех усовершенствований. Но последующие испытания показали недостатки применения маятниковых часов на качающемся судне, и Гюйгенс пришел к выводу, что хронометр должен представлять собой пружинные часы с балансиром. Такой хронометр удалось создать только в 1735 г. Дж. Харрисону [47, с. 113–114].

В сочинении «Маятниковые часы» Гюйгенс изложил полную теорию движения маятника. После широкого распространения часов нашлись люди, которые либо сами претендовали на это изобретение, либо приписывали его кому-то другому. Однако в своей книге он убедительно доказывает, что сам придумал конструкцию часов и сам их изготовил [65, с. 9–11]. В трактате «Маятниковые часы» были приведены теории колебаний математического и физического маятников, а также формула для расчета периода колебаний маятника. Там же Гюйгенс указал и на другое применение математического маятника – определение ускорения свободного падения. Великий голландский ученый исследовал вопрос о том, каким должен быть маятник, чтобы свойство изохронности соблюдалось и при больших колебаниях, и пришел к выводу, что центр качаний должен двигаться по циклоиде. В этом сочинении Гюйгенс также приводит исследование моментов инерции плоских фигур. Кроме того, ему принадлежит открытие явления синхронизации колебаний [89, с. 110].

Дальнейшее развитие теории колебаний связано с появлением классической механики, основой которой послужило гениальное сочинение Исаака Ньютона (1643–1727) «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» («Математические начала натуральной философии»), вышедшее в свет в 1687 г. [184]. Ньютон первым из ученых высказал мысль о том, что движение космических и земных объектов происходит по одним и тем же законам. Величайший ученый заложил основы теоретической механики, применив ее к изучению движения небесных тел. В его работе проблемы динамики получили математическую разработку. Величайший английский ученый создал методологию точного естествознания и стал основателем всего современного естествознания. Ньютоновские динамика и математический анализ явились предпосылками для создания теории колебаний. Хотя колебаниям в «Началах» Ньютона уделено мало внимания, однако там приведена очень важная теорема, дающая возможность по наблюдениям затуханий колебаний маятника получить закон сопротивления его движению [110, с. 174–179].

Основоположником же теории колебаний стал Леонард Эйлер (1707–1783), вклад которого в развитие математики и механики невозможно переоценить. Среди задач, приводящих к уравнению малых колебаний, особое место занимает задача о качке и остойчивости* корабля ввиду ее большой практической важности. В 1737 г. Л. Эйлер по поручению Санкт-Петербургской Академии наук начал исследования о равновесии и движении корабля. Уезжая из России в 1743 г., Эйлер пообещал все же довести свои исследования до конца, и в 1749 г. его книга «Scientia Navalis» («Корабельная наука», иногда название переводят как «Морская наука») была издана в Петербурге.

Именно в этом сочинении Эйлера заложены основы теории статической устойчивости и теории колебаний [175, с. 359].

В первом томе Эйлер развивает общую абстрактную теорию устойчивости малых колебаний плавающего тела, а во втором разрабатывает приложение этой общей теории к конкретному случаю плавающего корабля с заданными формами и распределением масс. Эйлер также развивает основы теории малых колебаний математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного тела и приходит к линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Еще через 20 лет исследования Эйлера привели к конкретным рекомендациям и были опубликованы в доступной для судостроителей-практиков форме в сочинении «Полное умозрение строения и вождения кораблей» [78].

Жан Лерон д'Аламбер (1717–1783) в своих многочисленных трудах рассмотрел отдельные задачи, такие как малые колебания тела вокруг центра масс и вокруг оси вращения в связи с задачей о прецессии и нутации Земли, колебания маятника, плавающего тела, пружины и т.д. Но общей теории колебаний д'Аламбер не создал [175, с. 359].

Важнейшим применением методов теории колебаний было экспериментальное определение жесткости проволоки на кручение, проведенное Шарлем Кулоном (1736–1806). Опыт описан в его мемуаре «Теоретические и экспериментальные исследования силы кручения и упругости металлических проволок», опубликованном в 1784 г. [49, с. 244, 252].

---

* Термин «остойчивость» впервые применил корабельный подмастерье Иван Амосов в переводе книги Г. Чапмана «Исследования об истинном способе находить пристойную площадь парусов линейных кораблей, и чрез посредство оной определять длину мачт и реев». Учитывая особенности русского языка XVIII века, это слово означает то же, что и устойчивость. Привязанность моряков к собственной терминологии сохранила такое написание для понятия устойчивость корабля до нашего времени [176 с. 223].

Кулон для проведения опытов со статическим электричеством создал крутильные весы – точнейший измерительный прибор того времени. Для своих весов он взял серебряную нить длиной 28 дюймов (71,12 см) настолько тонкую, что ее фут (305 мм) весит всего 1/16 грана (гран парижский равен 0,0005204 Н), т.е. масса проволоки составляла 0,00774 г. Для закручивания этой нити на 360º на коромысло весов, удаленное от нити или центра подвеса на 4 дюйма необходимо приложить силу всего лишь 1/340 грана. С помощью крутильных весов можно определять очень малые силы до одной десятимиллионной доли грана. Для экспериментального определения жесткости проволоки на кручение с он исследовал крутильные колебания подвешенного на ней цилиндра с моментом инерции I (см. рис. 2.2). Справедливо полагая, что момент противодействия скручиванию проволоки (мы зовем его моментом упругих сил) пропорционален углу ее закручивания φ, Кулон записал дифференциальное уравнение вида

$$c\varphi = -I\ddot{\varphi}$$

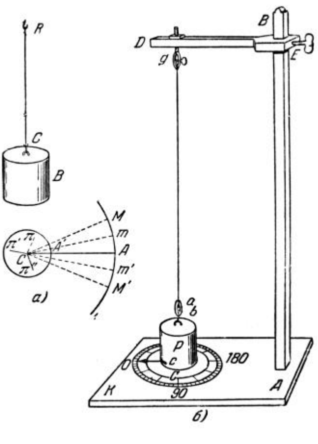

Рис. 2.2. Опыт Ш. Кулона

и, интегрируя его, нашел период колебаний [227, с. 67–70]

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{c}}\ .$$

Опытным путем Кулон установил также свойство изохронности малых колебаний и в этой задаче. Исследуя затухание колебаний, этот великий экспериментатор пришел к выводу о том, что главной его причиной является не сопротивление воздуха, а потери от внутреннего трения в материале проволоки.

2.2. Первая задача математической физики

Из всех задач на колебания упругих тел, изучавшихся в рассматриваемый период, особое место занимает задача о поперечных колебаниях натянутой струны. Среди задач о колебаниях тел – говорит Рэлей – ни одна не занимает такого видного положения, как задача о вибрации натянутой струны [215, с. 193]. Эта задача является самой простой в теории колебаний континуальных систем, но вместе с тем и самой важной задачей в акустике и теории музыки. Она также оказалась самой важной и для развития теории дифференциальных уравнений, математической физики и теории колебаний. Именно вокруг нее разворачивались споры Д. Бернулли, д'Аламбера, Л. Эйлера и Лагранжа относительно природы решения дифференциальных уравнений. Задача о колебаниях струны дала толчок к развитию не только математического анализа, но и экспериментальных методов исследования.

Задача о свободных колебаниях натянутой струны заинтересовала ученых, разумеется, не своим практическим приложением, законы этих колебаний были в той или иной мере известны мастерам, изготавливающим музыкальные инструменты. Об этом свидетельствуют непревзойденные струнные инструменты таких мастеров, как Н. Амати, А. Страдивари, Дж. Гварнери и многих, многих других, чьи шедевры были созданы еще в XVII веке, до появления теории колебаний струны. Интересы величайших ученых, занимавшихся этой задачей, скорее всего, заключались в стремлении подвести математическую основу под уже существующие законы колебаний струны. В этом вопросе проявился традиционный путь любой науки, начинающийся с создания теории, объясняющей уже известные факты, чтобы затем находить и исследовать непознанные явления.

Струна акустики это идеальная ровная, тонкая и гибкая нить конечной длины из твердого материала, натянутая между двумя неподвижными точками. В современной трактовке задача о поперечных колебаниях струны длины l сводится к нахождению решения $y(x,t)$ дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{2.1}$$

Здесь x – координата точки струны вдоль длины, а y – ее поперечное смещение; $a^2 = \frac{H}{\rho}$, где H – натяжение струны, ρ – ее плотность. Отметим, что a представляет собой скорость распространения волны.

Аналогичное уравнение также описывает и продольные колебания столба воздуха в трубе.

При этом должно быть задано начальное распределение отклонений точек струны от прямой линии и их скоростей, т.е. уравнение (2.1) должно удовлетворять начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} y(0,x) &= f_1(x); \\ y_t'(0,x) &= f_2(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

Должны также выполняться условия закрепления струны на краях (граничные условия)

$$\left.\begin{aligned} y(t,0) &= 0; \\ y(t,l) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

Поскольку возникновение колебаний зачастую сопровождается волнами, развитие теории колебаний связано с развитием теории волн. Первые наблюдения за колебаниями струны и воздушного столба в трубе относятся еще к античности. Многие древние авторы, среди которых Аристотель, Евклид, Пифагор и Птолемей, возникновение звука связывают с колебаниями тел. У них указывается, что более высокому звуку соответствует бóльшая частота колебаний, а громкость звука связывается с их интенсивностью. Пифагору, в частности, приписывают открытие того факта, что высоты основных тонов двух струн находятся в соотношении, обратном соотношению их длин (при прочих равных условиях), а также того, что высота тона струны зависит от ее толщины и натяжения [89, с. 251]. Разумеется, все это были не количественные, а качественные соотношения. Томас Юнг в своих лекциях по натуральной философии (Young, Lectures on Natural Philosophy) отмечал, что уже Аристотель знал, что «труба или струна двойной длины дает звук, в котором колебания занимают вдвое большее время, и что свойства созвучий зависят от отношений времен, занимаемых колебаниями отдельных звуков» [215, с. 204].

В начале XVII века в науке стали возрождаться экспериментальные методы исследования. В 1614–1618 гг. голландский математик и механик Исаак Бекман (1570–1637), изучая колебания струны, пришел к выводу об их изохронности, мотивируя его тем, что затихание звука, связанное с уменьшением амплитуды колебаний струны не сопровождается изменением ее тона. Он также установил, что частота обратно пропорциональна длине струны [26, с. 35]. Исследования Бекмана не были опубликованы и стали известны только благодаря М. Мерсенну, который провел обширные экспериментальные исследования, установил ряд закономерностей и опубликовал свои результаты в 1636 г. в «Книге о созвучиях»:

1. для данной струны и для данного натяжения период колебаний меняется пропорционально длине струны;

2. когда длина струны задана, период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения;

3. струны с одинаковым натяжением колеблются с периодами, пропорциональными корню квадратному из их линейных плотностей.

Следует отметить, что законы Мерсенна иллюстрируются всеми струнными музыкальными инструментами [215, с. 204–205].

Закономерности, установленные Мерсенном экспериментально, были теоретически подтверждены учеником И. Ньютона Бруком Тейлором (1685–1731), который в работе «О методе приращений» (Brook Taylor, De methodo incrementorum, London, 1715) дал механико-геометрическую формулировку решения дифференциального уравнения малых колебаний струны. Тейлор рассматривает струну как систему материальных точек и принимает такие допущения: все точки струны одновременно проходят свои положения равновесия (совпадают с осью x) и сила, действующая на каждую точку, пропорциональна ее смещению y относительно оси x. Эти предположения означают, что он рассматривает малые колебания, соответствующие первой собственной частоте (основной тон). По сути, Тейлор сводит задачу к системе с одной степенью свободы и пользуется решением дифференциального уравнения вида

$$\ddot{y} + k^2 y = 0 .$$

Согласно полученным им результатам период колебаний струны на первой собственной частоте определяется по формуле

$$T_1 = 2l\sqrt{\frac{\mu}{H}} ,$$

где l – длина струны, μ – погонная масса, H – натяжение.

Исследованиями колебаний струны занимался также Иоганн Бернулли (1667–1748). Если Тейлор не ограничивает количества материальных точек, описывающих движение струны, так как заранее устанавливает свойства их колебаний, то И. Бернулли глубже затрагивает проблему замены сплошной кривой конечным числом материальных точек [89, с. 264]. Работы И. Бернулли опубликованы в «Commentarii» Петербургской АН за 1727–1728 гг., которые были изданы 1729–1732 гг. Именно они привлекли внимание д'Аламбера, Д. Бернулли и Эйлера к проблеме колебаний струны. При ее изучении они обнаружили недостаточность теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Д'Аламбер в 1747 г. для данной задачи применил метод сведения задачи динамики к задаче статики (принцип д'Аламбера) и получил дифференциальное уравнение колебаний однородной струны в частных производных (2.1) – первое уравнение математической физики. Данную задачу он рассматривал с позиции чистого математика, и не считал своей целью объяснение таких физических эффектов, как гармоническое звучание струны или явление обертонов. Поэтому решение этого уравнения ученый записывает в виде суммы двух произвольных функций [110, с. 220]

$$y = F_1\left(at + x\right) - F_2\left(at - x\right),$$

где F_1 и F_2 – периодические функции периода $2l$. Таким образом, функция времени y имеет период $2l/a$, что также дает теоретическое обоснование законов Мерсенна. При выяснении вопроса о виде функций F_1 и F_2 д'Аламбер учитывает граничные условия (2.2), предполагая, что при $t = 0$ струна совпадает с осью x. Значение же $y_t'\left(0, x\right)$ в постановке задачи не указывается.

Д'Аламбер опубликовал свои результаты в 1749 г. в третьем томе «Мемуаров Берлинской академии наук». В том же году была опубликована и первая работа Эйлера, посвященная этому вопросу. Эйлер рассматривает частный случай, когда при $t=0$ струна отклонена от положения равновесия и отпущена без начальной скорости. Существенным является то, что Эйлер не накладывает никаких ограничений на начальную форму струны, т.е. не требует, чтобы она могла быть задана аналитически, рассматривая любую кривую, которая «может быть начерчена свободным влечением руки».

Окончательный результат, полученный автором: если при $t=0$ форма струны описывается уравнением $y(0,x)=f(x)$, то колебания выглядят так

$$y=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2}f(x-at).$$

В своей работе Эйлер пересмотрел свои взгляды на понятие функции, в отличие от прежнего представления о ней только как аналитическом выражении. Тем самым был расширен класс функций, подлежащих изучению в анализе, а Эйлер пришел к выводу о том, что «поскольку любая функция будет задавать некоторую линию, то справедливо и обратное – кривые линии можно сводить к функциям».

Решения, полученные д'Аламбером и Эйлером, представляют закон колебаний струны в виде двух волн, бегущих навстречу друг другу. При этом они не сошлись в вопросе о виде функции, задающей линию изгиба.

Большой вклад в развитие теории колебаний внес Даниил Бернулли (1700–1782), который более пятидесяти лет (с 1727 по 1778 гг.) занимался изучением колебаний. В своих первых работах он исследовал малые колебания грузов, подвешенных на гибкой нити, а также подвешенного тяжелого однородного каната.

В последующих работах он изучал колебания струн и стержней, ввел понятие простого гармонического колебания и обосновал положение о том, что общее колебание системы получается от сложения простых гармонических колебаний. Этот важный принцип получил впоследствии название принципа суперпозиции (наложения) колебаний. Даниила Бернулли вместе с д'Аламбером, Л. Эйлером и Лагранжем можно считать основателем математической физики.

Д. Бернулли в изучении колебаний струны пошел другим путем, разбивая струну на материальные точки, количество которых считал бесконечным. Он также выдвигает условия малости колебаний, на основании чего считает упругие восстанавливающие силы пропорциональными отклонениям от положений равновесия. Исходя из представлений о природе колебаний, ученый развивает идею о важной роли «чистых колебаний» синусоидальной формы, появившуюся еще у Тейлора. Он вводит понятие простого гармонического колебания системы, т.е. такого ее движения, при котором все точки системы колеблются синхронно с одинаковой частотой, но с разными амплитудами. Опыты, произведенные со звучащими телами, издающими звук, состоящий из основного тона и множества обертонов, навели Д. Бернулли на мысль о том, что самое общее движение струны может быть представлено как сумма нескольких чистых колебаний, т.е. состоит в одновременном совершении всех доступных ей движений. Это так называемая суперпозиция решений (термин введен в XIX веке). Таким образом, в 1753 г., исходя из физических соображений, он получил общее решение для колебаний струны, представив его в виде суммы частных (парциальных) решений, при каждом из которых струна изгибается в виде характерной кривой

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \sin\frac{j\pi x}{l} A_j \cos\frac{2j\pi t}{T_1}\,. \tag{2.4}$$

В этом ряду первая форма колебаний представляет собой половину синусоиды, вторая – целую синусоиду, третья состоит из трех полусинусоид и т.д. Их амплитуды $A_j \cos\frac{2j\pi t}{T_1}$ представляются в виде функций времени и, по существу, являются обобщенными координатами рассматриваемой системы. Согласно решению Д. Бернулли движение струны представляет собой бесконечный ряд гармонических колебаний с периодами

$$T_j = \frac{T_1}{j}.$$

При этом количество узлов (неподвижных точек) на одно меньше номера собственной частоты. Ограничивая ряд (2.4) конечным числом слагаемых, мы для континуальной системы получим конечное число уравнений.

Однако в решении Д. Бернулли содержится неточность – в нем не хватает второго слагаемого вида $B_j \sin \frac{2j\pi t}{T_1}$, т.е. не учитывается, что сдвиг фазы у каждой гармоники колебаний свой. Правильнее решение записать так

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} \sin \frac{j\pi x}{l} A_j \sin\left(\frac{2j\pi t}{T_1} + \varepsilon_j\right). \qquad (2.5)$$

Таким образом, Д. Бернулли, представив решение в виде тригонометрического ряда, использовал принцип суперпозиции и разложение решения по полной системе функций. Он справедливо полагал, что с помощью различных слагаемых формулы (2.4) можно объяснить гармонические тоны, которые струна издает одновременно со своим основным тоном [121, с. 499]. Он рассматривал это как общий закон, справедливый для любой системы тел, совершающей малые колебания. Однако физическая мотивировка не может заменить математического доказательства, которое тогда представлено не было. Из-за этого коллеги не поняли решения Д. Бернулли, хотя еще в 1737 г. К. А. Клеро [103] использовал разложение функций в ряд на интервале $[0, \pi]$.

Наличие двух различных способов решения задачи о колебаниях струны вызвал среди ведущих ученых XVIII в. бурную полемику – «спор о струне» [89, с. 266]. Этот спор главным образом касался вопросов о том, какой вид имеют допустимые решения задачи, об аналитическом представлении функции и можно ли представить произвольную функцию в виде тригонометрического ряда. В «споре о струне» получило развитие одно из самых важных понятий анализа – понятие функции.

Д'Аламбер и Эйлер были не согласны с тем, что решение (2.4), предложенное Д. Бернулли, может быть общим. В частности, Эйлер никак не мог согласиться с тем, что этот ряд может представлять любую «свободно начерченную кривую», как он сам теперь определял понятие функции. Оценка нового направления в математической физике, связанного с применением тригонометрических рядов дана Эйлером в работе «Eclarissements sur le mouvement des cordes vibrantes» («Освещение колебательного движения струны»), написанной в 1759 г., но опубликованной только в 1766 г. [92, с. 215]. Здесь постановка Эйлера отличается большей общностью – он предложил задать струне произвольную нерегулярную форму, а затем отпустить ее, в результате чего струна будет совершать какое-то движение. Возникает вопрос, справится ли теория с данной задачей? Эйлер считал решение, принятое в виде тригонометрического ряда частным, а не общим.

Жозеф Луи Лагранж (1736–1813), вступив в полемику, разбил струну на малые дуги одинаковой длины с массой, сосредоточенной в центре, и исследовал решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным числом степеней свободы. Переходя затем к пределу, Лагранж получил результат, аналогичный результату Д. Бернулли, не постулируя, однако, заранее то, что общее решение должно быть бесконечной суммой частных решений. При этом он уточняет решение Д. Бернулли, приводя его в виде (2.5), а также выводит формулы для определения коэффициентов этого ряда [121, с. 495–500]. Хотя решение основателя аналитической механики не соответствует всем требованиям математической строгости, оно было заметным шагом вперед, а сочинение «Исследование о природе и распространении звука» (L. Lagrange. Resherches sur la nature et la propagation du son. Oeuvres de Lagrange, v. I, Paris, 1785) является одной из самых блестящих его работ [89, с. 268].

Что касается разложения решения в тригонометрический ряд, то Лагранж считал, что при произвольных начальных условиях ряд расходится [121, с. 499]. Спустя 40 лет, в 1807 г. Ж. Фурье вновь нашел разложение функции в тригонометрический ряд в третий раз и показал, как можно этим пользоваться для решения поставленной задачи, подтвердив тем самым правильность решения Д. Бернулли. Когда Лагранжу сообщили о полученном Фурье разложении даже разрывной функции, он этому открытию не поверил и попытался выставить ряд возражений [91, с. 216].

Фурье использовал метод, предложенный Эйлером. Удивительно, как сам Эйлер не заметил, что таким способом может быть установлена справедливость решения Д. Бернулли [148, с. 117]. Полное аналитическое доказательство теоремы Фурье о разложении однозначной периодической функции в тригонометрический ряд было приведено в интегральном исчислении Тодгёнтера (Todhunter, Integral Caleulus) и в «Трактате по натуральной философии» знаменитых английских физиков У. Томсона (лорд Кельвин) и П. Тэта, (W. Thomson, P. G. Tait. «Treatise on natural philosophy», v. I. Oxford, 1867) [215, с. 45].

Исследования свободных колебаний натянутой струны продолжались два столетия, если считать от работ Бекмана. Эта задача послужила мощным стимулом для развития математики. Рассматривая колебания континуальных систем, Эйлер, д'Аламбер и Д. Бернулли создали новую дисциплину – математическую физику. Математизация физики, т.е. изложение ее посредством нового анализа – величайшая заслуга Эйлера, благодаря которой были проложены новые пути в науке. Логическим развитием результатов Эйлера и Фурье явилось известное определение функции Лобачевским и Лежён Дирихле, основанное на идее взаимно однозначного соответствия двух множеств. Дирихле также доказал возможность разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функций. Было также получено одномерное волновое уравнение и установлена равноправность двух его решений, что математически подтвердило связь между колебаниями и волнами. То, что колеблющаяся струна порождает звук, натолкнуло ученых на мысль об идентичности процесса распространения звука и процесса колебания струны [157, с. 60]. Была также выявлена важнейшая роль граничных и начальных условий в подобных задачах. Для развития механики важным результатом стало применение принципа д'Аламбера для записи дифференциальных уравнений движения, а для теории колебаний эта задача также сыграла очень важную роль, а именно, был применен принцип суперпозиции и разложение решения по собственным формам колебаний, сформулированы основные понятия теории колебаний – собственная частота и форма колебаний.

Полученные для свободных колебаний струны результаты послужили основой для создания теории колебаний континуальных систем. Однако дальнейшее изучение колебаний неоднородных струн, мембран и стержней требовало нахождения специальных методов для решения уравнений гиперболического типа второго и четвертого порядков.

В итоге в XVIII веке были разработаны методика составления дифференциальных уравнений для свободных колебаний отдельных дискретных и континуальных линейных систем, а также предложены способы их решения. Теперь для создания теории механических колебаний как самостоятельной науки не хватало единого подхода к решению задач динамики, а для более быстрого ее развития не было запросов техники. Таким образом, несмотря на определенные успехи в решении отдельных задач, ученые не создали общей теории колебаний, так как не было общего подхода к составлению дифференциальных уравнений движения, не зависящему от вида этого движения. Этот важнейший шаг в развитии механики удалось совершить Лагранжу, создавшему новую науку – аналитическую механику.

ГЛАВА 3

Аналитический период развития теории механических колебаний (конец XVIII века – конец XIX века)

3.1. Аналитическая механика Лагранжа – основа теории малых колебаний дискретных систем

Начало второго периода развития теории колебаний связано с работами Лагранжа. Если до него все ученые, включая великих Эйлера и д'Аламбера, решали только отдельные задачи теории колебаний, составляя для каждой задачи новые уравнения, то основоположник аналитической механики, развивая и углубляя работы своих предшественников в области теории колебаний и устойчивости, заложил основы общей аналитической теории малых колебаний. В книге «Аналитическая механика» («Mécanique analytique»), изданной в Париже в 1788 г., Лагранж подвел итог всему, что было сделано в механике в XVIII веке, и сформулировал новый подход к решению ее проблем [121, 122]. В учении о равновесии он отказался от геометрических методов статики и предложил принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа). Применив его одновременно с принципом д'Аламбера, Лагранж получил общее вариационное уравнение динамики, которое также носит название принципа д'Аламбера – Лагранжа.

Наконец, ученый ввел в обиход понятие обобщенных координат* и получил уравнения движения в наиболее удобной форме – уравнения Лагранжа II рода. Важнейшим шагом для развития теории колебаний была идея замены сплошного тела системой материальных точек. Этот прием в 1715 г. применил Б. Тейлор при исследовании колебаний струны, затем Иоганн Бернулли (1727) в задаче о тяжелой цепи. Такую же замену применял при изучении колебаний струны и балки Даниил Бернулли. В своих исследованиях малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы Лагранж опирался на работы Эйлера, который показал как правильно проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение произвольного порядка с постоянными коэффициентами, д'Аламбера, решавшего системы таких уравнений, и Д. Бернулли, рассматривавшего общее колебание дискретной системы как совокупность простых гармонических колебаний, т.е. применившего принцип суперпозиции решений.

Уравнения Лагранжа II рода стали основой для создания теории малых колебаний, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. В дальнейшем она получила название теории линейных колебаний. Линейность редко присуща механической системе, а в большинстве случаев является результатом ее упрощения. Простота теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающих колебания, обусловила их широкое распространение в технике. Рассматривая малые колебания вблизи положения равновесия, которые осуществляются с малыми скоростями, можно в уравнениях движения отбросить члены второго и высших порядков относительно обобщенных координат и скоростей. Тогда для системы с s степенями свободы кинетическая и потенциальная энергии записываются как квадратичные формы обобщенных координат – q_i и обобщенных скоростей – $\dot{q}_i$

---

* Термины обобщенные координаты, обобщенные скорости и обобщенные силы были введены У. Томсоном и П. Г. Тэтом в «Трактате по натуральной философии» [227, с. 114]

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_i q_j, \tag{3.1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ – инерционные, а $c_{ij} = c_{ji}$ – упругие или квазиупругие коэффициенты системы. Применяя уравнения Лагранжа II рода для консервативных систем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad \left(j = 1, 2, \ldots, s\right), \tag{3.2}$$

мы получим систему s линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{s} a_{ij}\ddot{q}_j = -\sum_{j=1}^{s} c_{ij}q_j, \quad \left(i = 1, 2, \ldots, s\right). \tag{3.3}$$

Частное решение (3.3) ищется в виде

$$q_j = A_j \sin\left(kt + \alpha\right), \quad \left(j = 1, 2, \ldots, s\right) \tag{3.4}$$

и описывает моногармонический колебательный режим с частотой k, одинаковой для всех обобщенных координат, причем частоту k и амплитуды A_j надо найти. Дифференцируя (3.4) дважды по t и подставляя результат в уравнения (3.3), получим систему линейных однородных уравнений для нахождения амплитуд

$$\sum_{j=1}^{s}\left(c_{ij} - k^2 a_{ij}\right)A_j = 0, \quad \left(i = 1, 2, \ldots, s\right)$$

или в матричной форме

$$\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}k^2\right)\mathbf{A} = 0, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{I}$ и $\mathbf{C}$ – матрицы соответственно инерции и жесткости, компонентами которых будут инерционные и упругие коэффициенты. Поскольку при колебаниях системы все амплитуды не могут равняться нулю, нулю равен определитель

$$\det\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}k^2\right) = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) получило название векового уравнения, так как впервые его рассмотрели Лагранж и Лаплас в теории вековых возмущений элементов планетных орбит (оно также называется уравнением частот).

Вековое уравнение (3.6) является уравнением s-й степени относительно k^2, число его корней равно числу степеней свободы системы. Эти корни принято располагать в порядке возрастания $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$, при этом они образуют спектр собственных частот. Каждому корню k_i соответствует частное решение вида (3.4), а s амплитуд $A_{1j}, A_{2j}, \ldots A_{sj}$ представляют собой j-ю форму колебаний. Общее решение представляет собой сумму решений вида (3.4).

Лагранж придал утверждению Д. Бернулли о том, что общее колебательное движение системы дискретных точек состоит в одновременном совершении всех ее гармонических колебаний, вид математической теоремы, воспользовавшись теорией интегрирования дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, созданной Эйлером в 40-е гг. XVIII в. и достижениями д'Аламбера, показавшего, как интегрируются системы таких уравнений [121, с. 458]. При этом надо было доказать, что корни векового уравнения вещественны, положительны и не равны между собой.

Таким образом, в «Аналитической механике» Лагранж получил уравнение частот в общем виде. Вместе с тем он повторяет ошибку, допущенную д'Аламбером в 1761 г., о том, что кратные корни векового уравнения соответствуют неустойчивому решению, так как якобы при этом в решении появляются вековые или секулярные члены, содержащие t не под знаком синуса или косинуса [121, с. 453]. В связи с этим и д'Аламбер, и Лагранж считали, что уравнение частот не может иметь кратных корней (парадокс д'Аламбера – Лагранжа). Достаточно было Лагранжу рассмотреть хотя бы сферический маятник или колебания стержня, сечение которого является, например, круглым или квадратным, чтобы убедиться, что кратные частоты в консервативных механических системах возможны. Однако Лагранж всегда пренебрегал примерами, в то время как Ньютон утверждал, что примеры не менее поучительны, чем теоретические выкладки. Леонард

Эйлер же всегда начинал свои работы с примеров и только потом переходил к теории.

Ошибка, допущенная в первом издании «Аналитической механики» повторилась и во втором издании (1812 г.), вышедшем еще при жизни Лагранжа, и в третьем (1853 г.), изданным под редакцией знаменитого математика Жозефа Бертрана. Научный авторитет д'Аламбера и Лагранжа был так высок, что эту ошибку повторили и Лаплас, и Пуассон, а исправили ее только лишь спустя почти 100 лет независимо друг от друга в 1858 г. К. Вейерштрасс и, через несколько месяцев, в 1859 г. – Осип Иванович Сомов (1815–1876).

О. И. Сомов внес большой вклад в развитие теории колебаний дискретных систем [46, с. 56]. Особо важное место в его творчестве занимает работа «Sur l'equation algébrique á l'aide de laquelle on détermine les oscillations trés petites d'un systéme de points matériels», опубликованная в Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg. т. 1 № 14 (1859). Подробное изложение статьи «Об алгебраическом уравнении, с помощью которого определяются малые колебания системы материальных точек» в переводе с французского приведен в [46, с. 60–74]. В ней Сомов показал, что корни векового уравнения вещественны и положительны. Кратные корни в нем возможны, но не приводят к неустойчивости движения, так как речь идет не об одном уравнении, а о системе уравнений. Сомов также рассматривает случай, когда корень равен нулю. Тогда искомая функция растет со временем, т.е. равновесие является неустойчивым, что, однако, не противоречит теореме Лагранжа – Дирихле, так как она в этом случае неприменима, ибо потенциальная энергия не имеет при нулевых значениях координат изолированного минимума [46, с. 74]. Рэлей отмечал, что впервые аналитическая теория общего случая свободных колебаний, где координаты не являются нормальными, была разобрана Сомовым [215, с. 131].

Таким образом, для определения частот и форм свободных колебаний линейной системы без сопротивления нужно решить вековое уравнение (3.6). Алгебраическими уравнениями высших степеней занимались многие астрономы и математики. Среди них Лаплас, Лагранж, Леверрье, Эйлер и др. Пытаясь отыскать формулу для решения в радикалах уравнения s-й степени, Эйлер нашел общий вид корней для любого уравнения степени не выше четвертой. Но свести общее буквенное уравнение пятой степени к уравнениям низших степеней ему не удалось. В 1770 – 1771 гг. Лагранж предпринял систематическое исследование всех методов решения и пришел к выводу: «Очень сомнительно, чтобы методы … могли бы дать полное решение уравнения 5-й степени» [173, с. 138–139]. В 1799 г. итальянский математик П. Руффини (с пробелами), а в 1826 г. норвежский математик Н. Г. Абель (полностью) доказали, что алгебраические уравнения степени выше четвертой с буквенными коэффициентами не решаются в радикалах. В 1829 г. Ж. Штурм предложил свой метод для отделения корней уравнения. В «Лекциях по алгебраическому и трансцендентному анализу» (1837) Остроградский проанализировал, упростил и изложил важнейшие методы, начиная от метода Ньютона и кончая методом Штурма [173, с. 140].

Однако проблемой было не только решение векового уравнения, но и составление его, так как развернутый определитель (3.6) имеет $s!$ слагаемых, например, для системы с десятью степенями свободы их будет $3\,628\,800$. При 20 степенях свободы количество слагаемых уже $2\,432\,902\,008\,176\,640\,000 \approx 2{,}433 \cdot 10^{18}$, а время раскрытия такого определителя для самой мощной ЭВМ 1970-х гг., выполняющей 1 млн. операций в секунду, составляет примерно 1,5 млн. лет, а для современного компьютера «всего» несколько сот лет.

Задачу определения частот и форм свободных колебаний можно также рассматривать как задачу линейной алгебры и решать численно. Переписав равенство (3.5) в виде

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{C}\vec{A} = k^2\vec{A},$$

заметим, что матрица-столбец $\vec{A}$ является собственным вектором матрицы

$$\mathbf{I}^{-1}\mathbf{C}, \tag{3.7}$$

а k^2 ее собственным значением.

Решение проблемы собственных значений и векторов является одной из самых привлекательных задач численного анализа [233, с. 173]. При этом для решения всех задач, встречающихся на практике, нельзя предложить единого алгоритма. Выбор алгоритма зависит от вида матрицы, а также от того, нужно ли определять все собственные значения или только наименьшие (наибольшие) или близкие к данному числу. В 1846 г. Карл Густав Якоб Якóби (1804–1851) для решения полной проблемы собственных значений предложил в статье «Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säkularstorungen Vorkommenden Gleichungennumerisch aufzulösen» итерационный метод вращений [233, с. 182]. Метод основан на такой бесконечной последовательности элементарных вращений, которая в пределе преобразует матрицу (3.7) в диагональную. Диагональные элементы полученной матрицы и будут искомыми собственными значениями. При этом для определения собственных значений требуется $30n^3$ арифметических операций, а для собственных векторов еще $20n^3$ операций [95, с. 181]. В связи с этим метод в XIX веке не нашел применения и был забыт более чем на сто лет.

Следующим важным шагом в развитии теории колебаний были работы Рэлея, особенно его фундаментальный труд «Теория звука» («The Theory of Sound»), впервые опубликованный в 1877 г. и изданный на русском языке только в 1940–44 гг. и повторно в 1955 г. В этой книге Рэлей с единой точки зрения рассматривает колебательные явления в механике, акустике и электрических системах. Основное и непреходящее значение «Теории звука» состоит в том, что она является первым систематическим изложением общего учения о колебаниях. Она подытожила предшествующие достижения в этой области и наметила ряд проблем и направлений для развития теории колебаний [215, предисловие редактора, с. 10]. Рэлею принадлежит ряд фундаментальных теорем линейной теории колебаний (теоремы о стационарности и свойствах собственных частот), которые были опубликованы в большой работе «Некоторые общие теоремы, касающиеся колебаний» («Some General Theorems Relating to Vibrations») в 1873 г. и обобщены в «Теории звука» [215, с. 131–140]. Там же Рэлей сформулировал и принцип взаимности [215, с. 174–175].

По аналогии с кинетической и потенциальной энергией он ввел диссипативную функцию

$$R = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} b_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j, \tag{3.8}$$

которая является однородной квадратичной функцией скоростей, положительной для всех значений переменных. Функция получила имя Рэлея и представляет собой половину скорости рассеивания энергии [215, с. 122–124].

В «Теории звука» Рэлей также предлагает приближенный метод определения первой собственной частоты консервативной системы

$$k_1^2 = \Pi_{\max} \big/ T_{\max}^*, \tag{3.9}$$

где $T_{\max}^* = T_{\max} \big/ k^2$ [295, с. 132]. При этом для вычисления максимальных значений потенциальной и кинетической энергий берется некоторая форма колебаний. Если она совпадет с первой формой колебаний системы, мы получим точное значение первой собственной частоты, а в противном случае это значение всегда завышено [18, с. 174]. Метод дает вполне приемлемую для практики точность, если в качестве первой формы колебаний взять статическую деформацию системы.

Таким образом, еще в XIX веке в трудах О. И. Сомова и Рэлея сформировалась методика построения дифференциальных уравнений, описывающих малые колебательные движения дискретных механических систем с помощью уравнений Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j(t), \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.10}$$

где в обобщенную силу $Q_j(t)$ должны быть включены все силовые факторы, за исключением упругих и диссипативных, охваченных функциями R и П.

Уравнения Лагранжа (3.10) в матричной форме, описывающие вынужденные колебания механической системы, после подстановки всех функций выглядят так

$$\mathbf{I}\ddot{\vec{q}} + \mathbf{B}\dot{\vec{q}} + \mathbf{C}\vec{q} = \vec{Q}(t). \qquad (3.11)$$

Здесь $\mathbf{B}$ – матрица демпфирования, а $\vec{q}$, $\dot{\vec{q}}$ и $\ddot{\vec{q}}$ – векторы-столбцы соответственно обобщенных координат, скоростей и ускорений. Общее решение данного уравнения состоит из свободных и сопровождающих колебаний, которые всегда являются затухающими и вынужденных колебаний, происходящих с частотой возмущающей силы. Ограничимся рассмотрением только частного решения, соответствующего вынужденным колебаниям. В качестве возбуждения Рэлей рассматривал обобщенные силы, изменяющиеся по гармоническому закону. Многие относили этот выбор к простоте рассматриваемого случая, однако Рэлей приводит более убедительное объяснение – разложение в ряд Фурье. Используя это разложение для обобщенных сил

$$Q_j(t) = Q_0 + \sum_{i=1}^{N} Q_{j_i}^c \cos(i\omega t) + Q_{j_i}^s \sin(i\omega t), \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \qquad (3.12)$$

и принцип суперпозиции, запишем решения в виде

$$q_j = \sum_{i=1}^{N} A_{ji}^c \cos(i\omega t) + A_{ji}^s \sin(i\omega t), \quad j = 1, 2, \ldots, s. \qquad (3.13)$$

При последовательной подстановке (3.13) в (3.11) получим для каждой гармоники систему $2s$ линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left(\mathbf{C} - \mathbf{I}i^2\omega^2\right)\vec{A}_i^s - \mathbf{B}i\omega\vec{A}_i^c = \vec{Q}_i^c; \\ \mathbf{B}i\omega\,\vec{A}_i^s + \left(\mathbf{C} - \mathbf{I}i^2\omega^2\right)\vec{A}_i^c = \vec{Q}_i^s. \end{cases} \qquad (3.14)$$

Таким образом, для механической системы, имеющей свыше двух степеней свободы, решение системы уравнений (3.14) представляет определенные трудности, которые лавинообразно возрастают при возрастании порядка системы. Уже при пяти – шести степенях свободы задача о вынужденных колебаниях классическим способом вручную решена быть не может.

В теории колебаний механических систем малые (линейные) колебания дискретных систем сыграли особую роль. Разработанная для линейных систем спектральная теория не требует даже построения дифференциальных уравнений, а для получения решения можно сразу записать системы линейных алгебраических уравнений. Хотя в середине XIX века и существовали методы определения собственных векторов и собственных значений (Якоби), а также решения системы линейных алгебраических уравнений (Гаусс), о практическом их применении даже для систем с небольшим числом степеней свободы не могло быть и речи. Поэтому до появления достаточно мощных ЭВМ было разработано множество различных способов решения задачи о свободных и вынужденных колебаниях линейных механических систем. Многие выдающиеся ученые – математики и механики занимались этими задачами, речь о них пойдет ниже. Появление мощной вычислительной техники позволило не только в доли секунды решать линейные задачи большой размерности, но и автоматизировать сам процесс составления систем уравнений.

3.2. Развитие теории колебаний континуальных систем

Задачи на колебания континуальных систем, т.е. систем, состоящих из твердых деформируемых тел, массы которых считаются распределенными непрерывно, близки к задачам сопротивления материалов и теории упругости. Поэтому теория колебаний континуальных систем развивалась вслед за этими дисциплинами. Задачи на колебания упругих тел рассматривались как колебания континуума точек с предельным переходом к бесконечности. В отличие от дискретных механических систем, континуальные описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. При этом рассматривается однородный изотропный материал, подчиняющийся закону Гука.

Из всех задач колебаний континуальных систем наибольшее практическое значение имела задача о поперечных колебаниях валов и балок. Простейшие случаи колебаний призматических стержней были исследованы еще в XVIII веке в трудах по акустике [226, с. 501]. Но до решения задач, имеющих практическое значение – задач о колебаниях балок переменного поперечного сечения, особенно определение высших частот, было еще далеко, понадобились еще две сотни лет и разработка приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Дело осложнялось тем, что тогда еще не было сформулировано понятие сплошной среды, да и более простая задача о статическом изгибе балок полностью не была решена. Начало изучению сопротивления материалов – науки, без которой невозможно было развитие теории колебаний континуальных систем, положил Галилей. Он рассмотрел задачу об изгибе консольной балки и ввел понятие напряжений. При этом великий ученый делает одну ошибку, полагая, что нейтральная линия находится на внутренней поверхности деформированной балки [89, с. 162, 163].

Другой важнейшей вехой в исследованиях деформаций было установление в 1660 г. Р. Гуком их пропорциональности при растяжении – сжатии действующей силе*. В 1680 г. французский физик и механик, основатель Французской АН Эдм Мариотт (1620–1684) независимо от Гука открыл этот закон и распространил его на случай изгиба [91, с. 303]. Мариотт исправил ошибку Галилея, приняв другой закон распределения напряжений при изгибе, и поместил нулевую точку в середине высоты сечения, признав тем самым наличие сжатых волокон. Однако из-за допущенной ошибки он посчитал, что на момент сопротивления балки это влияния не оказывает. В 1702 г. Пьер Вариньон (1654–1722) получил формулы Галилея и Мариотта как частные случаи своей теории, поместив при этом нейтральную линию также на вогнутой стороне балки. Яков Бернулли в 1705 г., хотя и признал наличие сжатых волокон на вогнутой стороне, повторил ошибку Мариотта, с работами которого, похоже, не был знаком. На основании своего ошибочного расчета он даже вывел неверную теорему о том, что положение нейтральной линии не оказывает никакого влияния на сопротивление изгибу и благодаря своему колоссальному авторитету, тем самым задержал на целое столетие развитие учения об изгибе [20, с. 30].

---

* В своих первых опытах Гук использовал металлические пружины различной длины, которые изготавливал, наматывая стальную или латунную проволоку на тело цилиндрической формы. Последовательно прикрепляя к пружине грузы равной массы, он заметил, что каждый раз пружина растягивается на одну и ту же длину. Позднее ученый провел аналогичные эксперименты с растяжением струн. Следует отметить, что в опытах с пружинами Гук устанавливает закон пропорциональности между усилием и деформацией не для растяжения, а для кручения, так как витки пружины при ее растяжении работают в основном на кручение, а растяжения – сжатия там нет совсем.

Первое правильное решение задачи о прочности балки при изгибе дал французский военный инженер Антуан Паран (1666–1716) в 1713 г., однако его работа осталась незамеченной современниками. Это решение в 1729 г. подтвердил петербургский академик Георг Бернгард Бильфингер (1693–1750), но и его работа на эту тему, первая в России работа по строительной механике, также прошла незамеченной. Только в 1773 г., через 60 лет после Парана, Ш. Кулон, незнакомый с его работами, повторил решение задачи об изгибе балки, но еще долго заблуждения продолжали повторяться. Последнее неправильное решение, уже для случая балки несимметричного профиля, было опубликовано в трудах Дюло и Тредгольда в 1820 г. Наконец, окончательно правильное решение в 1824 г. получил Навье, который и опубликовал его в 1826 г. [89, с. 164–165]. Таким образом, решение данной задачи заняло 188 лет, если считать от первой работы Галилея, что убедительно демонстрирует, как сложно развивалась наука в XVII – XVIII веках.

Для решения задачи о поперечных колебаниях призматического стержня не требуется полного решения задачи об изгибе, поэтому первые исследования этой проблемы начались после получения Я. Бернулли уравнения изгиба стержня. Если Галилей и Мариотт исследовали прочность балки, то швейцарский математик поставил задачу о вычислении прогибов. В 1703 г. он применил к исследованию упругой линии изогнутой полосы (полосой он называл брус) исчисление бесконечно малых и получил уравнение

$$\frac{K}{\rho} = M \ , \tag{3.15}$$

где K – коэффициент пропорциональности (жесткость на изгиб), ρ – радиус кривизны изогнутой оси, M – изгибающий момент. При этом, как уже упоминалось, жесткость балки на изгиб он определяет неверно.

Первым поперечные колебания балок (стержней) постоянного поперечного сечения рассмотрел племянник Якова – Даниил Бернулли. Он использовал для вывода уравнений упругих кривых вариационное исчисление. Д. Бернулли представил всю силу, заключающуюся в упругой полосе одним выражением, которое он назвал потенциальной силой, и установил, что это выражение должно быть минимальным. Теперь мы называем этот интеграл энергией деформации

$$\Pi = \frac{K}{2}\int_0^s \frac{ds}{\rho^2}.$$

Эту идею Д. Бернулли в одном из писем сообщил Эйлеру, который в выражении (3.15) в качестве кривизны взял производную $\frac{d^2y}{dz^2}$. Здесь z – координата поперечного сечения балки, а y – ее вертикальное перемещение. После этого путем двойного дифференцирования Эйлер получил уравнение равновесия балки

$$K\frac{d^4y}{dz^4} = q(z), \tag{3.16}$$

где $q(z)$ – интенсивность внешней поперечной нагрузки. Подставляя в качестве поперечной нагрузки силу инерции, Эйлер в 1744 г. вывел уравнение малых свободных колебаний призматических стержней

$$K\frac{d^4y}{dz^4} = -\mu\frac{d^2y}{dt^2}, \tag{3.17}$$

где μ – масса, приходящаяся на единицу длины стержня. Тогда же Эйлер дал его решение четырехкратным интегрированием, которое изложил в книге [259]. Но в 1778 г. Эйлер представил решение уравнения (3.17) в иной форме, где вместо четырехкратного интегрирования вычисляется один интеграл. В результате им была полностью решена задача о колебаниях призматических стержней при различных граничных условиях. Это решение было опубликовано в «Acta Academiae Petropolitanae» за 1782 г. [110, с. 298].

Эйлер также изучал колебания однородной мембраны и в 1765 г. вывел уравнение

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2} + b^2\frac{d^2z}{dy^2}.$$

Рассматривая мембрану как пластинку, Эйлер исходил из несоответствующих характеру задачи предпосылок и не получил удовлетворительного результата. То же касается работ его последователей М. Е. Головина и А. Лекселя. В 1766 г. Эйлер попытался вывести дифференциальные уравнения колебаний колокола, но допустил ошибку, считая, что кольца и пластины на которые он разбил колокол, колеблются независимо друг от друга.

Лагранж дал более точное уравнение малых колебаний мембраны под действием силы тяжести

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} \right).$$

Уравнение колебаний пластинки также получено Лагранжем [89, с. 270]. Интерес к проблеме колебаний пластин пробудился после эффектных экспериментов, проведенных Эрнстом Флоренсом Фридрихом Хладни (1756–1827). В своей книге по акустике (Chladni E. Die Akustik. Leipzig, 1802) он описал эти эксперименты [226, с. 146]. Хладни покрывал пластинку слоем сухого мелкозернистого песка, после чего возбуждал в ней колебания обыкновенным смычком и получал узловые линии, соответствующим различным частотам колебаний. В 1809 г. Парижская АН пригласила экспериментатора показать свои опыты в присутствии императора Наполеона, на которого демонстрация произвела сильное впечатление, и Хладни получил денежную награду в 3 000 франков, а Парижская АН объявила конкурс на создание математической теории, подтверждающей эти опыты.

В конкурсе приняла участие Софи Жермен, которая была знакома с работой Эйлера [259] и решила также воспользоваться вариационным исчислением, записав энергию деформации пластинки в виде

$$\Pi = A \iint \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 ds\,. \tag{3.18}$$

Но при вычислении вариации интеграла (3.17) она допустила серьезную ошибку и правильного решения не получила. Однако труд С. Жермен не отвергли, а продлили срок конкурса, дав возможность закончить работу. Вот что она сама пишет по этому поводу: «К счастью, один из членов жюри, Лагранж, оценил исходные предположения и вывел уравнение, которое я должна была бы получить, если бы не погрешила против правил вычисления» [89, с. 271]

$$\frac{d^2z}{dt^2} = k^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right).$$

Что касается конкурса, то и вторая попытка С. Жермен была неудачной, так как начальное допущение (3.18) не было физически обосновано. И только с третьей попытки, в 1816 г. премия, наконец, была получена.

Кроме двумерных уравнений, Лагранжем было выведено уравнение для распространения колебаний (волн) и в трехмерной однородной неограниченно протяженной во всех направлениях среде

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Однако решения конкретных задач в XVIII в. были получены только в одномерных задачах. Для более сложных задач не хватало знаний в области сопротивления материалов. Тем не менее, успехи физической теории имели глобальное значение.

- Было осознано значение ограничения малости колебаний для линейной постановки задач;
- введен принцип суперпозиции решений;
- вошли в научный обиход понятия частоты, периода и амплитуды колебаний;
- в задаче о колебаниях струны в математической форме была установлена связь между колебаниями и волнами.

В начале XIX в. самой передовой в Европе была французская математическая школа. Именно ее представители А. Навье, О. Коши, Д. Пуассон, Г. Ламе и Э. Клапейрон в 20–30-е гг. заложили основы теории упругости. В 1821 г. Навье представил Парижской академии наук «Мемуар о законах равновесия и движения упругих твердых тел», в котором были получены уравнения равновесия упругого тела. Введя инерционные члены, Навье получил также и уравнения колебаний твердого тела. Именно от этого мемуара ведет свою историю механика твердого деформируемого тела [90, с. 48–49]. В следующем, 1822 г. французский математик Огюстен Луи Коши (1789–1857) в работе «Исследование равновесия и внутреннего движения твердых тел и жидкостей, упругих и неупругих» развил общий континуальный подход в механике сплошной среды. Он, с помощью предложенного Л. Эйлером метода выделения элементарного объема и рассмотрения действующих на него сил, получил общие уравнения равновесия сплошной среды в напряжениях и установил свойства взаимности напряжений. В результате им получены классические уравнения динамики изотропного упругого тела.

Уравнения теории упругости содержат производные от смещений, т.е. определяют деформации тел. Условия совместности деформаций получены Барре де Сен-Венаном (1797–1886) в 1860 г. Условия совместности для напряжений получены итальянским математиком Эудженио Бельтрами (1835–1900) в 1892 г. и в более общей форме австралийским математиком и механиком Джоном Генри Мичеллом (1863–1940) в 1899 г. Важный вопрос о единственности решения задачи теории упругости исследован Г. Р. Кирхгофом (1824–1887) в 1858 г., а вопрос о его существовании позже, в XX веке. Первыми применили общие уравнения равновесия упругих тел к реальным задачам Г. Ламе и Э. Клапейрон в 1827–1828 гг. В мемуаре «О внутреннем равновесии однородных твердых тел» (Lame et Clapeyron Mémoire sur l'équation untérier des corps solides homogènes.– J. reine und angew. Math., 1831, Bd. 7, H. 2, S. 2–4) они рассмотрели задачи о растяжении бесконечной призмы, кручении бесконечного кругового цилиндра, равновесии шара под действием взаимного притяжения его частиц, равновесии полого кругового цилиндра и шара под действием внутреннего и внешнего давления. В 1828 г. Коши и Пуассон (1781–1840) применили общие уравнения для оценки пригодности элементарной теории изгиба тонких стержней, а в 1829 г. Коши вывел приближенные формулы для кручения тонких прямоугольных стержней. Эти исследования дали толчок для развития Сен-Венаном общей теории изгиба и кручения призматических стержней – крупнейшего практического достижения теории упругости середины XIX в. [90, с. 54–56] Его работами открывается эпоха инженерных приложений теории упругости.

Обстоятельные исследования колебаний различных стержней были начаты Дени Пуассоном и продолжались в течение всего XIX века. В 1833 г. во втором издании двухтомного «Трактата по механике» («Traité de mécanique») он рассматривает изгиб и поперечные колебания балок, применяя уравнения (3.16) и демонстрирует преимущество этого уравнения перед обычно используемым в технике уравнением (3.15).

Колебаниям упругих тел в XIX в. были посвящены многочисленные исследования. Интегралы уравнений колебаний упругого пространства были получены Д. Пуассоном и М. В. Остроградским в конце 20-х гг. Тогда же Пуассон обнаружил существование двух волн, распространяющихся в изотропном упругом теле, со скоростями, относящимися как $\sqrt{3}:1$. Дж. Г. Стокс (1819–1903) показал, что более быстрая волна – это продольная волна объемного сжатия, а медленная – поперечная волна вихря смещений, не вызывающая изменения плотности.

Задача колебаний круговой пластины была решена Г. Р. Кирхгофом [229, с. 310]. Он также вычислил частоты некоторых видов колебаний для пластинки со свободным контуром. Продольные и крутильные колебания стержней были впервые исследованы Хладни [215, с. 276]. В «Теории звука» Релей предлагает свой, более полный вывод уравнения продольных колебаний стержня, аналогичного уравнению колебаний струны постоянной плотности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где x – расстояние слоя частиц, составляющих некоторое сечение от положения равновесия одного конца, когда стержень не растянут ни постоянным натяжением, ни в результате колебаний; u – смещение, так что действительное положение сечения будет $x+u$; $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, E – модуль Юнга, ρ – плотность.

Скорость a найдена относительно стержня в нерастянутом состоянии. Действительная же величина скорости распространения возмущения в пространстве будет больше в отношении, равном отношению растянутой и нерастянутой длин произвольной части стержня. Когда оба конца стержня свободны, он не испытывает постоянного натяжения, т.е. условием для свободного конца является

$$\frac{du}{dx} = 0 \, .$$

В «Теории звука» Рэлея получено полное решение о свободных колебаниях для стержня с обоими свободными концами:

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{l} (A_i \cos \frac{i\pi at}{l} + B_i \sin \frac{i\pi at}{l}) \, ,$$

где A_i и B_i – произвольные постоянные, которые можно определить, если заданы начальные значения u и $\dot{u}$.

Рэлей также рассматривает случаи стержней с одним закрепленным концом (как случай стержня со свободными концами, но двойной длины), случай двух закрепленных концов и случай точечной нагрузки [215, с 270–272]. С. П. Тимошенко рассматривает вынужденные продольные колебания стержня, в 1909 г. в Известиях Киевского политехнического института вышла его труд, посвященный этому вопросу.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний неоднородного стержня имеет вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \left\{ EJ\left(x\right) \frac{d^2 y}{dx^2} \right\} = -\rho\omega\left(x\right) \frac{d^2 y}{dt^2} \, ,$$

где ω – площадь, J – момент инерции поперечного сечения стержня.

Аналитическое исследование некоторых частных случаев колебаний стержней переменного поперечного сечения впервые проведены Кирхгоффом [215, с. 316]. Рассматривая вибрации клинообразного стержня, он путем остроумного преобразования заменяет уравнение четвертого порядка двумя уравнениями второго порядка и интегрирует их с помощью степенных рядов. Дж. Морроу в работе «О поперечных колебаниях брусьев» (J. Morrow On the lateral Vibration of Bars, Phil. Mag. 10 113–125, 1905), решает эту же задачу с помощью метода Рэлея. При этом он предполагает, что стержень искривляется по параболе второго порядка. Наконец, П. Ф. Вард в 1913 г. опубликовал работу в которой рассмотрел поперечные колебания стержня переменного сечения (P. F. Ward The transversal Vibration of a Rod of Varying Gross-Section, Phil. Mag. 25 85–106, 1913) [74, с. 164].

Таким образом, в течении XVII–XIX вв. были разработаны аналитические методы расчетов в основном свободных колебаний различных твердых тел геометрически правильной формы. При этом теоретические результаты были проверены соответствующими экспериментами. Этим методика составления и решения дифференциальных уравнений получила подтверждение. Как будет показано ниже, эти результаты имели большое значение и при решении задач для тел более сложной формы.

В 1915 г. Екатеринославским горным институтом была издана «Теория вибраций» А. Н. Динника [74]. В ней даны решения многих задач вибраций струн, стержней, пластин и объемных тел. Так, например, исследованы задачи о продольных и поперечных колебаниях стержней переменного сечения: клина, конуса, усеченного конуса и др. Рассмотрены колебания кругового цилиндра, как сплошного, так и полого, крутильные колебания диска.

Теория упругости стала основой для исследования колебаний континуальных систем. Мы не будем здесь более останавливаться на отдельных исследованиях по теории упругих колебаний, которые можно найти практически у всех авторов XIX в., занимавшихся теорией упругости. Отметим только, что история исследований упругих колебаний струн, стержней, мембран, пластинок и оболочек достаточно подробно представлена в монографии Рэлея «Теория звука», первый том которой целиком посвящен колебаниям упругих систем [215]. Эта книга оказала существенное влияние не только на развитие теории колебаний, но и на всю прикладную теорию упругости. Идея определения частот колебаний упругих систем без решения соответствующих дифференциальных уравнений, заложенная в ней, определила дальнейшее развитие механики деформируемого твердого тела.

3.3. Развитие методов решения нелинейных дифференциальных уравнений

В рассматриваемый период развития теории колебаний большинство задач решалось с помощью линеаризации и в течение XVIII – XIX веков теория малых, линейных колебаний была развита достаточно хорошо. В то время понятие малости колебаний отождествлялось с линейностью модели, хотя на самом деле это не всегда выполняется, например, для нелинейностей типа «зазор» или «натяг». При записи линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами предполагается, что упругие восстанавливающие силы пропорциональны деформации, т.е. выполняется закон Гука, а сопротивление пропорционально скорости (линейное вязкое трение). Для линейной механической системы с одной степенью свободы дифференциальное уравнение движения выглядит так

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = F(t), \tag{3.19}$$

где q – обобщенная координата, $\dot{q}$ – обобщенная скорость, $\ddot{q}$ – обобщенное ускорение, n – приведенный коэффициент демпфирования, k – собственная частота, которая определяется обобщенным упругим коэффициентом c^* и коэффициентом инерции m^*, $k = \sqrt{\dfrac{c^*}{m^*}}$, $F(t)$ – обобщенная возмущающая сила, приведенная к единице инерционной характеристики $F(t) = \dfrac{Q_{возм}(t)}{m^*}$.

Даже слабая нелинейность порой приводит к эффектам, которые не могут быть объяснены в линейной постановке, т.е. мы имеем дело с нелинейной системой, свойства которой существенно отличаются от свойств линейной:

1. В линейной системе свободные колебания являются изохронными, т.е. их частота не зависит от амплитуды, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями. Расчет свободных колебаний тогда заключается в определении собственных частот и форм. В нелинейных системах частота колебаний зависит от амплитуды и при ее уменьшении с ростом амплитуды нелинейная характеристика называется мягкой, а при увеличении – жесткой. Таким образом, в нелинейных системах нет понятия собственной частоты.

2. В линейной системе колебания симметричны относительно положения равновесия, а в нелинейной, в случае несимметричной нелинейной характеристики – несимметричны. В этом случае вместо понятия амплитуда колебаний можно говорить только об их размахе.

3. В случае действия периодических возмущающих сил, колебания в линейной системе могут быть разделены на свободные, которые со временем затухают и вынужденные – незатухающие.

Практическое значение имеют только вынужденные колебания, амплитуды которых не зависят от начальных условий. В случае нелинейной системы возможна многозначность режимов колебаний, и то, какой из возможных режимов реализуется, зависит от начальных условий. При этом не все режимы колебаний являются устойчивыми.

4. Вынужденные колебания в линейной системе при действии гармонической возмущающей силы происходят только с ее частотой. При близости этой частоты к собственной частоте колебаний системы возможно резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний – резонанс. В нелинейной же системе возможны колебания и с кратными частотами. Если решение содержит высшие гармоники с частотами 2ω, 3ω и т.д., то колебания называются супергармоническими, а если – низшие гармоники с частотами $\omega/2$, $\omega/3$ и т.д., то субгармоническими. Здесь буквой ω обозначена частота возмущающей силы. Таким образом, в нелинейных системах возможно существование нескольких резонансных режимов.

5. При действии негармонических возмущающих сил, они могут быть разложены в ряд Фурье, и общее решение в линейной системе получается путем сложения решений от каждой гармонической составляющей в отдельности. Это так называемый принцип суперпозиции решений, который в нелинейных системах неприменим.

6. Линейные свободные колебания всегда затухающие, тогда как в нелинейных системах возможны незатухающие колебания и при наличии сопротивления. Энергия в этом случае пополняется за счет неколебательного источника. Это так называемые автоколебательные системы. Примером такой системы могут служить часы с маятником.

Нелинейность механических систем проявляется в случаях, когда упругая восстанавливающая сила нелинейно зависит от смещения точек системы от положения равновесия. Иногда это связано с характеристиками применяемых материалов, например, резина или кожа имеют жесткую характеристику, вид которой показан на рис. 3.1. Чугун и бетон, наоборот, имеют характеристику мягкую, см. рис. 3.2. Часто в машинах применяются пружины (рессоры) коэффициент жесткости которых зависит от деформации. Применяются также соединительные элементы (муфты) со специальными нелинейными характеристиками.

Весьма распространены нелинейности, носящие технологический характер, например, зазоры в зубчатых и шлицевых соединениях.

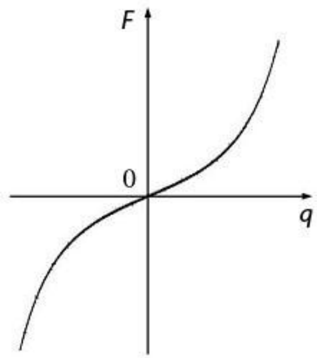

Рис. 3.1. Жесткая нелинейная характеристика

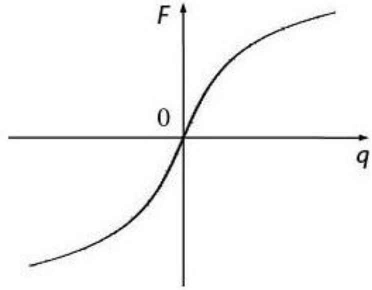

Рис. 3.2. Мягкая нелинейная характеристика

Другой вид нелинейности системы имеет место, когда силы сопротивления движению нельзя представить линейной функцией скорости. При этом упругие силы могут иметь и линейный характер.

Значительная часть динамических процессов описывается нелинейными дифференциальными уравнениями с малым параметром вида

$$\ddot{q}+k^2q+\varepsilon f\left(q,\dot{q}\right)=F\left(t\right), \tag{3.20}$$

где ε – малая величина. Уравнение (3.20) обязательно строится таким образом, что при $\varepsilon=0$ оно является линейным. В механике такие модели описывают колебания маятника, подрессоренного экипажа, а также деформируемых систем, в которых связь между перемещениями и деформациями является нелинейной. Например, колебания силовых передач с зубчатым зацеплением, лопаток турбин, лопастей вертолетов, элементов робототехнических систем и т.д. Нелинейными уравнениями описываются также колебания пластин и оболочек, являющихся частями ракетной и космической техники. Кроме того, только нелинейные модели описывают такие явления, как параметрические или автоколебания.

Учение о нелинейных колебаниях зародилось в XVIII столетии и стимулировалось, главным образом, потребностями астрономии, например, знаменитая задача трех тел. Одним из наиболее распространенных методов исследования нелинейных задач, которым с успехом пользовались астрономы, был способ разложения искомых функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям, по степеням малого параметра ε, входящего в данные дифференциальные уравнения. Значительно позже появились потребности в решении нелинейных задач в физике, а затем и в механике. Задачи последней потребовали более сложного математического аппарата, и с его развитием появилось новое направление механики, получившее название «нелинейной механики».

Степенные ряды для интегрирования дифференциальных уравнений начали применять одновременно с разработкой основ дифференциального и интегрального исчисления. Уже в ряде статей и мемуаров Ньютона, Лейбница, Якова и Иоганна Бернулли дано систематическое изложение метода неопределенных коэффициентов для решения дифференциальных уравнений. Дальнейший шаг в этом направлении был сделан Эйлером, который предложил искать решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при начальном условии $y(0) = 0$ в виде степенного ряда

$$y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \text{ где } a_n = \frac{y^n(0)}{n!};$$

$$a_1 = y'(0) = f(x, y)\Big|_{\substack{x=0\\ y=0}}; \; y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y';$$

$$y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''; \; \ldots .$$

В XIX веке появился математический аппарат решения нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Он применялся астрономами для решения задач возмущенного движения планет Солнечной системы. Для примера рассмотрим уравнение

$$\ddot{q} + k^2 q + \varepsilon f(q) = 0, \tag{3.21}$$

где $f(q)$ – полином. Начальные условия принимаются в виде

$$q(0)=a;\quad \dot{q}(0)=0\,, \tag{3.22}$$

а начальные условия с ненулевой обобщенной скоростью могут быть выбором начала отсчета времени приведены к виду (3.22).

Одним из первых метод разложения решения уравнения (3.21) в ряд по степеням малого параметра ε предложил Пуассон в своей «Механике». Решение принимается в виде

$$q=y_0+\varepsilon y_1+\varepsilon^2 y_2+...+\varepsilon^n y_n\,. \tag{3.23}$$

Здесь $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ – неизвестные функции. Подставляя (3.23) в уравнение (3.21), получают систему уравнений:

$$\ddot{y}_0+k^2 y_0=0;\ \ddot{y}_1+k^2 y_1=f_1(y_0);\ \ddot{y}_2+k^2 y_2=f_2(y_0,y_1);\ ... \tag{3.24}$$

с начальными условиями

$$y_0(0)=a;\ \dot{y}_0(0)=0;\ y_1(0)=0;\ \dot{y}_1(0)=0;\ y_2(0)=0;\ \dot{y}_2(0)=0;\ ...$$

Для четной функции $f(q)$ решение получается периодическим, но если $f(q)$ будет включать и нечетные степени переменной q, в правой части уравнения системы (3.24), которым определяются решения $y_2, y_3, ...$ наряду с членами, гармонически зависящими от времени, появятся секулярные (вековые) члены вида $t^m \sin\alpha t$ и $t^m \cos\alpha t$, которые при возрастании t будут расти. Таким образом, пользоваться найденным решением можно лишь для малых значений переменной t. Ниже приводится решение уравнения*

$$\ddot{q}+q=\varepsilon q^3 \tag{3.25}$$

при начальных условиях

$$q(0)=1;\quad \dot{q}(0)=0\,, \tag{3.26}$$

полученное с точностью до второго приближения

* В математике это уравнение носит название уравнения Дуффинга

$$q = \cos t + \frac{\varepsilon}{32}\left(12t\sin t + \cos t - \cos 3t\right). \qquad (3.27)$$

В связи с вышесказанным появилось много работ, в основном французских математиков, в которых рассматриваются различные способы уничтожения в решении секулярных членов. Среди них наиболее знамениты работы Лапласа и Лагранжа [110, с. 182]. Однако их методы требуют интегрирования некоторых систем дифференциальных уравнений и приводят к весьма сложным выкладкам.

Можно построить процесс таким образом, чтобы при решении уравнения выбором произвольных или неопределенных величин не уничтожать, а предотвращать появление секулярных членов. Такой способ в работе «Заметка о методе последовательных (непрерывных) аппроксимаций» («Note sur la méthode des approximations successives»), опубликованной в III томе 6-й серии Мемуаров Петербургской академии наук в 1840 г. предлагает М. В. Остроградский, который одним из первых применял асимптотические методы в механике. В качестве примера он рассматривает уравнение (3.25) при начальных условиях (3.26) и показывает, что обычный способ дает решение с точностью до величин первого порядка относительно ε выражение (3.27). При этом великий ученый замечает, что «… однако это выражение станет неточным вследствие множителя t, находящегося вне знака синуса».

В результате он приходит к тому, что нужно изменить частоту колебаний, взяв вместо единицы p, тогда в решении время t содержится уже только под знаком косинуса.

$$q = \cos pt + \frac{\varepsilon}{32p^2}\left(\cos pt - \cos 3pt\right), \quad p^2 = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon .$$

Значительно позже, в конце XIX века кораблестроители встретились с уравнением (3.25), рассмотренным Остроградским, при исследовании качки корабля [110, с. 184].

Рэлей в своей «Теории звука» рассматривает аналогичное, но более общее уравнение

$$\ddot{q} + k^2 q + \varepsilon q^3 = 0 \qquad (3.28)$$

при начальных условиях $q(0)=a$ $\dot{q}(0)=0$ [215, с. 97–99]. Восстанавливающая сила в (3.28) симметрична относительно положения равновесия. Позже это уравнение послужило простейшей моделью для описания флаттера упругих систем.

Полученное им во втором приближении решение

$$q = a\cos mt + \frac{1}{32}\frac{\varepsilon a^3}{m^2}\left(\cos 3mt - \cos kt\right),$$

где m выбирается соответствующим образом, верно математически, но неверно физически, так как величины m и k между собой, как правило, не соизмеримы и функция $q(t)$ не будет периодической. Поэтому вместо члена $\cos kt$ должен стоять $\cos mt$ [110, с. 186].

Остроградский, ограничившись в своей статье получением первого приближения, в конце нее высказал намерение приложить этот метод к движению планет вокруг Солнца. Именно в трудах по определению орбит небесных тел идея основоположника российской школы математики получила дальнейшее развитие. Одним из первых таких трудов явилось исследование по теории возмущений шведского ученого А. Линстедта, работавшего в 1879–1886 гг. в Дерптском университете. В 1882 г. он предложил способ решения уравнения (3.25), опубликованный в статье «Об интегрировании дифференциальных уравнений теории возмущений» в Мемуарах Петербургской Академии Наук, т. XXXI, № 4 за 1883 г. (A. Lindstedt «Beitsag sur Integration der Differential gleichungen der Störungatheorie») [166, с. II введения]. Его подход состоит в том, что при поиске периодического решения уравнения (3.25) вводится новая [*]переменная $\tau = \omega(\varepsilon)t$, а затем q и p ищутся в виде разложения по степеням малого параметра [118, с. 138].

$$q = q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \ldots\;; \qquad p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \ldots \tag{3.29}$$

Первый в член разложении p – p_0 представляет собой частоту линейных колебаний, соответствующую значению $\varepsilon = 0$, а последую-

[*] В диссертации Ю. А. Митропольского [166] нумерация страниц начинается с основной части, а введение пронумеровано отдельно римскими цифрами.

щие – $p_1, p_2, \ldots$ подбираются из условия отсутствия секулярных членов. Подставляя разложение (3.29) в уравнение (3.25) после несложных преобразований можно получить приближенное решение. Например, с точностью до членов порядка ε^2 оно имеет вид

$$q = a\cos\left(pt+\varphi\right)+\frac{\varepsilon a^3}{32}\cos 3\left(pt+\varphi\right); \quad p = 1+\frac{3\varepsilon a^2}{8}.$$

Следует отметить, что при $\varepsilon > 0$ частота колебаний растет, а при $\varepsilon < 0$ – убывает, а спектр разложения $q(t)$ будет содержать только нечетные гармоники. На рис. 3.3. приводится сравнение решений уравнения Дуффинга вида

$$\ddot{q}+q+\varepsilon q^3 = 0$$

при начальных условиях

$$q\left(0\right) = a = 0{,}5; \quad \dot{q}\left(0\right) = 0,$$

полученное с точностью до второго приближения методом прямого разложения по малому параметру

$$q \approx \cos\left(t+\varphi\right)+\varepsilon\left[-\frac{3a^2t}{8}\sin\left(t+\varphi\right)+\frac{a^3}{32}\cos 3\left(t+\varphi\right)\right]$$

и методом Линстедта – Пуанкаре [118, с. 141].

Весомый вклад в борьбе с секулярными членами в разложении решения внесли шведские астрономы Карл Болин (1889) и Иоганн Аугуст Гуго Гюльден (1893), которые усовершенствовали методику Линстедта. Динамические системы, рассматриваемые в астрономической теории возмущений консервативны, а в технике, как правило, нужно учитывать затухание и наличие источников энергии. В связи с этим методы астрономической теории возмущений не могут быть непосредственно перенесены в нелинейную механику [109, с. 6].

Несмотря на то, что различные проблемы из области теории нелинейных колебаний были предметом изучения почти с самого начала исчисления бесконечно малых, строгие математические методы для исследования периодических решений нелинейных уравнений были впервые построены только в конце XIX века в бессмертных трудах Анри Пуанкаре (1854–1912) и Александра Михайловича Ляпунова

(1857–1918). В трехтомном сочинении А. Пуанкаре «Новые методы небесной механики» («Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste»), изданной в 1892 – 1897 гг. содержится исследование сходимости приведенных рядов. Он анализирует понятие сходимости и дает определение асимптотического ряда [201]. Пуанкаре предлагает считать сходящимся ряд, у которого быстро убывают первые члены, что особенно важно при решении практических задач. Вот как писал о вкладе А. Пуанкаре в развитие асимптотического анализа академик Н. Н. Моисеев: «Идеи асимптотического анализа появились очень давно. Но превращению их в самостоятельное направление математики, созданию культуры «асимптотического мышления» мы обязаны А. Пуанкаре. Его роль еще недостаточно оценена. Создание асимптотического анализа, создание основ топологии и качественной теории дифференциальных уравнений, открытие того, что математика – это, прежде всего, наука о качественном, и что число это всего лишь один из способов выражения качества, одна из качественных характеристик, и, наконец, открытие специальной теории относительности. Никто после Ньютона не дал человечеству так много идей и так много новых фактов» [177, с. 33].

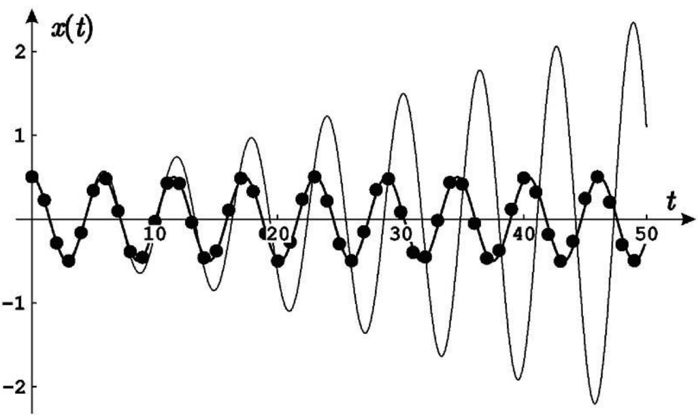

Рис. 3.3. Решение уравнения Дуффинга: жирная сплошная линия – точное решение, тонкая линия – метод прямого разложения по малому параметру и черные точки – метод Линстедта – Пуанкаре

Метод, основанный на разложении в ряд по степеням малого параметра, приводит, как правило, к расходящимся рядам, но получаемые при этом формулы при ограниченном числе членов вполне пригодны для практических вычислений. Эти ряды асимптотические в том смысле, что погрешность m-го приближения пропорциональна $(m+1)$-й степени малого параметра ε. Поэтому, если m фиксировано, то погрешность будет сколь угодно мала при достаточно малых значениях ε. Хотя при $m \to \infty$, сходимости решения и не получается, но для практических расчетов это все равно неосуществимо, поскольку при их проведении сложность определения коэффициентов при последующих степенях ε так быстро возрастает, что могут быть использованы приближения только очень невысокого порядка. Такие ряды до сих пор эффективно применяются в теории нелинейных колебаний.

Аналогичный подход к решению уравнения (3.28) применил А. М. Ляпунов в своей докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» [151], подготовленной в Харькове в 1892 г. В упомянутой работе содержится и исследование сходимости приведенных рядов. Оставив в 1902 г. педагогическую деятельность, Ляпунов занялся применением асимптотических методов к задачам о фигурах равновесия вращающейся жидкости и получил в этой области выдающиеся результаты [3, с. 34].

Таким образом, А. Пуанкаре и А. М. Ляпунов внесли большой вклад в развитие метода малого параметра. Теория периодических решений Ляпунова, разработанная им для систем, названных системами Ляпунова, в дальнейшем была развита его последователями. Александр Михайлович, наряду с А. Пуанкаре, считается создателем метода малого параметра и метода интегральных многообразий. Н. Н. Моисеев отмечал, что значение теории малого параметра Ляпунова – Пуанкаре состоит не только в том, что она дает метод отыскания периодических решений квазилинейных уравнений. Эта теория также дает очень много для понимания того, как должны строиться методы исследования новых задач [176].

В начале XX века основоположник теории квазипериодических функций латвийский математик Пирс Георгиевич Боль (1865–1921) распространил результаты Пуанкаре – Ляпунова на более общий класс квазипериодических решений, которые имеют особое значение для практических приложений. Он рассматривал дифференциальные уравнения, соответствующие неавтопериодическим колебательным системам, т.е. системам, неспособным генерировать собственные незатухающие колебания, находящиеся под действием достаточно малого квазипериодического возмущения [109, с. 5].

Точку в проблеме решения уравнения (3.28) поставил академик А. Н. Крылов, предложивший раскладывать в ряд не частоту, а ее квадрат

$$k^2 = p^2 + C_1\varepsilon + C_2\varepsilon^2 + \ldots + C_n\varepsilon^n ,$$

где p^2 – неизвестная постоянная, а коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – подбираются таким образом, чтобы в получаемых выражениях $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ время t не выходило за знак синуса или косинуса. Крылов показал, что его метод может быть применен и для других видов уравнений, описывающих и вынужденные колебания, и колебания с нелинейным демпфированием. Но в отличие от методов Лагранжа и Лапласа, он не требует решения сложной системы дифференциальных уравнений для уничтожения секулярных членов, а решать надо только одно алгебраическое уравнение с одной неизвестной [110, с. 188–191]. Например, решение уравнения (3.28) с точностью до членов третьего порядка относительно ε будет иметь вид

$$q = a\cos pt + \frac{1}{32}\varepsilon\frac{a^3}{p^2}\left(\cos 3pt - \cos pt\right) + \frac{1}{1024}\varepsilon^2\frac{a^5}{p^4}\left(\cos 5pt - \cos pt\right) +$$

$$+\frac{1}{32768}\varepsilon^3\frac{a^7}{p^6}\left(\cos 7pt - 6\cos 3pt + 5\cos pt\right),$$

где $p^2 = k^2 + \frac{3}{4}\alpha a^2 - \frac{3}{128}\alpha^2\frac{a^4}{k^2} + \frac{63}{4096}\alpha^3\frac{a^6}{k^4}$.

Киевский ученый Н. М. Крылов в 1920-е гг. применил к рассматриваемому уравнению и другим, более общим классам линейных неоднородных уравнений второго порядка, содержащих малый параметр, подход, предложенный Ляпуновым. Методы, разработанные им для решения нелинейных дифференциальных уравнений, стали основой для создания основ теории нелинейных колебаний. В настоящее время метод малого параметра широко применяется к исследованию нелинейных задач механики, физики и техники.

3.4. Теория устойчивости равновесия и движения

Важнейшим вопросом при исследовании колебательного движения является вопрос о его устойчивости. Только устойчивые состояния движения осуществляются в действительности, и представляют для исследователя интерес. Часто для решения практической задачи достаточно ответить на вопрос об устойчивости или неустойчивости колебательного движения, что позволяет не интегрировать уравнений движения. Поэтому установление признаков устойчивости движения нелинейных механических систем имеет огромное значение.

Проблема устойчивости технического происхождения, задачи устойчивости равновесия тел или механических систем были первыми задачами кинетики. После определения положения равновесия возникает вопрос о его устойчивости. Практическое значение могут иметь только устойчивые положения, которые характеризуются тем, что система, выведенная из положения равновесия, автоматически в него возвращается. Во избежание трудоемкой работы, ученые с давних пор стремились получить критерий, при помощи которого можно, не производя расчетов, определить, будет ли движение или положение равновесия устойчиво. Первым подобные задачи решал Архимед, который, рассматривая положение равновесия, проверял, может ли тело, выведенное из него, самостоятельно в это положение вернуться.

Для системы тел, находящихся под действием сил тяжести, такой критерий сформулировал ученик Г. Галилея Эванджелиста Торричелли (1608–1647). Он считал, что равновесие будет устойчивым, если центр тяжести системы тел занимает самое низшее из возможных положений. Например, для тела, имеющего одну точку опоры, центр тяжести должен находиться ниже этой опоры.

В другом, более сложном вопросе об устойчивости движения, все исследования группировались около некоторых частных задач. Вопрос об устойчивости движения имеет не только большое теоретическое, но и громадное практическое значение, являясь частным случаем математической проблемы о качественном характере решения дифференциальных уравнений движения. В XVIII веке в астрономии, после того, как было установлено, что движение планет осуществляется под действием сил всемирного тяготения, возник вопрос об устойчивости этого движения. Но пока оно рассматривалось только под действием сил взаимного притяжения Солнца и планеты, было ясно, что падение планеты на Солнце невозможно благодаря законам сохранения энергии и момента количества движения. Когда же в этой задаче стали учитывать влияние других космических тел, она стала гораздо сложнее, и ее решение не было таким очевидным. Задача об устойчивости планетной системы под действием вековых возмущений элементов планетных орбит успешно была решена Лагранжем и Лапласом и имела большое значение для развития теории устойчивости движения. В частности, их труды заложили основы классической теории устойчивости по первому приближению, в которой в дифференциальных уравнениях возмущенного движения удерживаются только первые, линейные члены [175, с. 359].

Важнейшей задачей космогонии является также исследование устойчивости форм равновесия неоднородной вращающейся жидкой массы, находящейся под действием сил взаимного притяжения. Клод Алексис Клеро (1713–1765) в работе «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики» (1743) поставил общую задачу о фигурах равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости и доказал, что сфероид является фигурой равновесия движущейся жидкости [103].

В середине XVIII в. проблемой научной разработки стал вопрос об устойчивости плавающего тела. Л. Эйлер в книге «Scientia Navalis» («Корабельная наука», 1749 г.) рассмотрел задачу остойчивости корабля. «Корабельная наука» явилась первой работой, посвященной теории устойчивости, таким образом, Эйлера следует считать одним из ее основоположников.

Проблема устойчивости в неявном виде возникает также и в теории малых колебаний, которая для систем с конечным числом степеней свободы была доведена до высокой степени совершенства в трудах Д. Бернулли, д'Аламбера, Л. Эйлера и Лагранжа. При рассмотрении конкретных задач сразу же возник вопрос, будет ли решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, описывающей малые колебания, содержать только периодические функции. Здесь вопросы устойчивости и анализа колебательных процессов пересекаются. Лагранж, в «Аналитической механике» сформулировал теорему, дающую условия равновесия линеаризованной задачи: Положение равновесия консервативной системы с идеальными стационарными голономными связями является устойчивым, если потенциальная энергия такой системы в этом положении имеет строгий минимум [120, с. 97]. Тем самым Лагранж установил тесную связь колебаний около положения равновесия с устойчивостью этого положения. Однако строгого доказательства теоремы об устойчивости он не привел.

В первой трети XIX века теория устойчивости и теория колебаний не особенно обогатились, так как еще не было стимулов для их развития. Зарождающееся машиностроение пока еще не ставило перед инженерами динамических задач, и они обходились только статическими расчетами. Задача о поведении корабля на волнении (качка) оставалась пока еще недоступной из-за своей сложности, и кораблестроители на практике пользовались разработанными графическими приемами. В небесной механике техника приближенных расчетов орбит планет и комет была доведена до высокой степени совершенства, но качественные методы исследований не разрабатывались. В частности, пользуясь теорией малых колебаний Лаплас доказал устойчивость движения Солнечной системы в течение длительного времени благодаря малым эксцентриситетам и малым взаимным наклонам их орбит и движению всех планет в одну сторону. Лаплас завершил создание небесной механики на основе закона всемирного тяготения и доказал, что этот закон полностью объясняет движение планет, представив их взаимные возмущения, носящие периодический характер, математическими рядами.

Стремление к математической строгости побудило ученых заняться вопросами теории колебаний и устойчивости. Так доказательство теоремы об устойчивости равновесия, сформулированной Лагранжем, было усовершенствовано Фердинандом Миндингом в его курсе механики (1838 г.) [236, с. 206], а в 1846 г. точное доказательство этой теоремы дал Г. П. Лежён Дирихле (1805–1859) [147], и теорема получила название теоремы Лагранжа – Дирихле. Не прибегая к каким-либо разложениям в ряды, Дирихле показал, что строгое заключение об устойчивости движения можно получить, располагая только одним интегралом уравнений движения. Точное доказательство теоремы было важным шагом на пути, приведшем впоследствии к методу функций Ляпунова. Кроме того, Дирихле показал, что выводы об устойчивости требуют исследований, относящихся ко всей продолжительности движения. С этим связано критическое замечание Дирихле о правомерности применяющегося в небесной механике метода линеаризации уравнений движения. Таким образом, маленькая заметка Дирихле [147], в которой содержится доказательство теоремы об устойчивости равновесия, имеет огромное значение и является важной вехой на пути создания теории устойчивости движения.

Для линейных механических систем английским математиком Джеймсом Джозефом Сильвестром (1814–1897) был доказан следующий критерий: Если соответствующее нулевым значениям обобщенных координат положение равновесия устойчиво, то потенциальная энергия в этом положении имеет изолированный минимум и выражение для нее является положительно определенной формой, а для этого необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы **C** из (3.5) были положительны. Т.е. должны выполняться условия:

$$c_{11} > 0, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots \quad , \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss} \end{vmatrix} > 0 \tag{3.30}$$

При выполнении неравенств (3.30) система, выведенная из положения равновесия, совершает свободные колебания.

В конце XIX века появились работы, в которых вопросы устойчивости движения трактовались с единых позиций. Некоторые, полученные в них результаты, не утратили своего значения и в наши дни. В 1867 г. вышел в свет «Трактат по натуральной философии» Томсона и Тэта, оказавший большое влияние на развитие теории устойчивости. В нем содержатся результаты пятнадцатилетних размышлений авторов по вопросу устойчивости движения. Они показывают, что минимальность действия на траектории влечет за собой ее устойчивость.

Вплотную к теории колебаний и теории устойчивости движения примыкает теория автоматического управления, возникшая из теории регулирования хода машин. Задача регулирования хода машин была одной из первых технических задач, в которых применялась теория малых колебаний. Первоначально постоянство угловой скорости паровой машины обеспечивалось применением маховика, параметры которого определялись эмпирическим путем.

В 1784 г. Дж. Уатт (1736–1819) создал замкнутую систему регулирования, запатентовав свой центробежный регулятор (см. рис. 3.4). В первых системах регулирования проблемы устойчивости не возникали, так как маломощные двигатели имели большие маховики и легкие регулирующие органы, перемещавшиеся с существенным трением, обусловленным грубым исполнением регуляторов. Указанные обстоятельства и обеспечивали устойчивую работу последних. Высокая, для рассматриваемого периода развития техники, эффективность центробежного регулятора стимулировала его широкое практическое использование. В то же время теоретические исследования систем регулирования находились в зачаточном состоянии и не могли ответить на многие вопросы, которые выдвигала практика. Первое систематическое изложение вопроса о маховых колесах и теории центробежных регуляторов дал Ж. В. Понселе (1788–1867) в курсе механики (Poncelet. Cours de mécanique appliquée aux machines, т. I). При этом работа регулятора рассматривалась отдельно от машины и только в статической постановке [202, с. 146].

С увеличением мощности и скорости паровых машин в XIX веке проблемы применения центробежных регуляторов впервые обратили серьезное внимание инженеров и ученых на значение теории устойчивости движения для техники. Это объясняется уменьшением размеров маховика при возросших требованиях к точности регулирования хода машин. Улучшение технологии изготовления регуляторов привело к уменьшению трения, и как следствие, к потере устойчивости. В результате на передний план выдвигается проблема устойчивости движения. Данный вопрос так тесно связан с динамикой всей машины, что его статическое исследование оказывается далеко недостаточным.

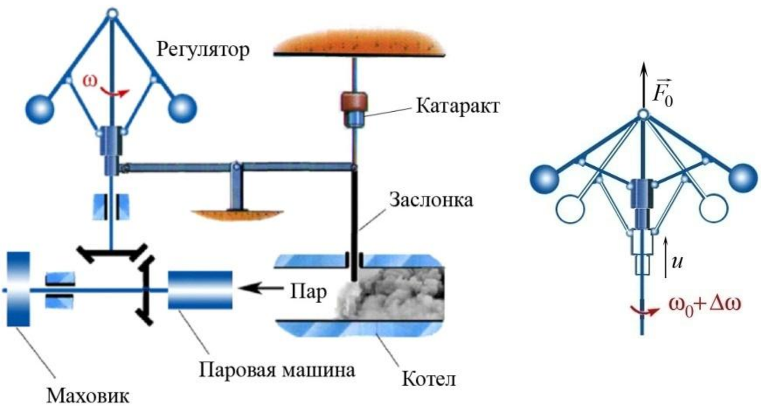

Рис. 3.4. Схема системы регулирования паровой машины Уатта и принцип работы центробежного регулятора

Одними из первых существенных работ, посвященных теории центробежного регулятора, были работы английского астронома Дж. Б. Эри, опубликованные в 1840 и 1851 гг. В них он рассматривал задачу обеспечения равномерного движения экваториалов (астрономические трубы, следящие за движением небесного свода) [176, с. 322]. Эри предложил присоединять к муфте регулятора водяной катаракт (демпфер вязкого трения), сила трения в котором пропорциональна скорости. Это позволяло гасить вредные колебания регулятора. Однако теоретического решения задачи Эри не дал [90, с. 203].

Первой фундаментальной работой, посвященной теории центробежного регулятора, был мемуар Максвелла «О регуляторах» [43], изданный в 1868 г. В нем рассматриваются условия устойчивой работы астатических регуляторов, базирующиеся на учете сил кулоновского трения. Максвелл рассматривает процесс саморегулирования, и указывает, что проблема устойчивости равномерного вращения машины, снабженной регулятором, может решаться с помощью теории малых колебаний. До этого он в 1859 г. применил эту теорию в работе, посвященной устойчивости кольца Сатурна.

Серьезную теоретическую работу «О центробежном уравнителе», посвященную теории регулятора, значение которой оценили только полвека спустя, опубликовал в 1871 г. П. Л. Чебышёв (1821–1894). Поскольку регулятор Уатта лишь условно может считаться изохронным, Пафнутий Львович впервые ставит вопрос о подборе параметров регулятора так, чтобы он соответствовал приближенно-изохронному и дает решение задачи соответствия каждой угловой скорости лишь одного положения муфты [88, с. 197]. Появилось множество и других теоретических разработок, однако все они не удовлетворяли запросам практики, и стало ясно, что требуется иной подход к проблеме, а именно анализ динамического взаимодействия в системе машина – регулятор. Таким образом, центробежный регулятор Уатта послужил толчком к развитию теории автоматических систем. Были сформированы принципы построения автоматических систем: регулирование по отклонению (принцип Ползунова – Уатта) и регулирование по нагрузке (принцип Понселе).

Основоположником теории автоматического регулирования хода машин стал выдающийся русский ученый Иван Алексеевич Вышнеградский (1832–1895) [32]. Он рассматривал машину вместе с регулятором с учетом их взаимодействия как механическую систему с двумя степенями свободы и впервые применил динамический метод для исследования [46, с. 137]. В результате Вышнеградский пришел к линейному дифференциальному уравнению третьего порядка. Им впервые было введено понятие областей устойчивости в пространстве параметров регулятора. Статья И. А. Вышнеградского «О регуляторах прямого действия», опубликованная в 1877 г. в Известиях Санкт-Петербургского Практического технологического института, по праву считается работой, с которой берет начало современная линейная теория регулирования [46, с. 138–149; 228, с. 680]. Действительно, общий подход, который впервые применил И. А. Вышнеградский при составлении математической модели замкнутой системы «***объект – регулятор***», базирующийся на совместном рассмотрении регулятора и объекта, до настоящего времени практически не изменился за исключением некоторых деталей и терминологии.

И. А. Вышнеградский решает задачу анализа переходного процесса системы ***машина – регулятор*** при изменении нагрузки. Сначала он выводит уравнение движения вала машины, связывающее угловую скорость вала с нагрузкой и положением муфты регулятора, затем выводит уравнение движения муфты. Связывая эти уравнения, Вышнеградский приходит к математической модели системы машина – регулятор, анализ которой позволил основоположнику теории автоматического регулирования сформулировать условия устойчивости системы в пространстве параметров. Подробнее о решении Вышнеградского можно прочитать в статье [32].

При решении поставленной задачи И. А. Вышнеградский учитывает, что, благодаря маховику, сброс нагрузки вызывает малое изменение угловой скорости вала, по сравнению с начальной угловой скоростью и, вследствие этого, и перемещение муфты, и скорость этого перемещения малы. Кроме того, он в своих расчетах пренебрегает кулоновским трением в системе, рекомендуя их уменьшать, улучшая качество обработки деталей. Отбросив из рассмотрения кулоновское трение, Вышнеградский для устойчивости работы регулятора вводит в систему катаракт, имеющий линейную зависимость сопротивления, от скорости перемещения муфты. Принятые допущения позволяют при разложении в ряд Маклорена функций перемещения муфты отбрасывать слагаемые второго и более высоких порядков, что в конечном итоге приводит к рассмотрению линейной модели при полном отсутствии саморегулирования. Это принципиально отличает подход Вышнеградского от подхода Максвелла.

Максвелл, рассматривая работу регулятора, установил зависимость положения муфты регулятора u (рис. 3.4) от угловой скорости вращения вала ω, полагая, что при изменении угловой скорости муфта займет соответствующее ей положение, т.е. произойдет саморегулирование. Другими словами, Максвелл, априори считал систему устойчивой и качество перехода из одного состояния системы в другое не рассматривал. Но именно здесь стали возникать проблемы при повышении мощности машин и скорости вращения вала.

Уравнение движения машины строится с помощью теоремы об изменении кинетической энергии, записываемой в дифференциальной форме. При этом, учитывая, что момент инерции маховика велик, полагаем приведенный момент инерции машины постоянным. Для получения дифференциального уравнения движения муфты регулятора Вышнеградский рассматривает движение всех его деталей – рычага, муфты, заслонки, поршня катаракта и др. Анализ этого уравнения позволил Ивану Алексеевичу подтвердить свои предположения: от кулоновского трения в регуляторах необходимо избавляться с помощью более тщательной обработки деталей, а для устойчивой работы регулятора необходимо включать в систему катаракт.

В следующем 1878 г. Вышнеградский рассмотрел также задачу непрямого регулирования. После его работ стало ясно, что машину и регулятор следует рассматривать как единое целое. Его труды вызвали в мировой литературе бурную дискуссию и положили начало теории регулирования хода машин.

В России идеи Вышнеградского получили развитие в трудах Н. Е. Жуковского, Я. И. Грдины, А. И. Сидорова и др., а за рубежом в трудах А. Стодола, М. Толле и В. Хорта. А. Стодола в работах 1893 – 1898 гг. применил метод российского ученого к теории непрямого регулирования.

Бурное развитие техники в Советском Союзе поставило ряд задач автоматического регулирования, что привело к созданию советской школы автоматического регулирования. Достойными продолжателями работ И. А. Вышнеградского явились И. Н. Вознесенский, А. А. Андронов, К. Э. Рерих, Б. В. Булгаков, А. В. Михайлов и др. Теория автоматического регулирования впоследствии переросла в теорию автоматического управления и представляет собой отдельную отрасль науки, вплотную примыкающую к теории колебаний.

Большой интерес вызвала задача об устойчивости Лагранжевых частных решений астрономической задачи трех тел. В 1877 г. Раус получил золотую медаль за «Трактат об устойчивости заданного состояния движения». Тем не менее, определение понятия устойчивости, данное Раусом, достаточно расплывчатое, Раус называет движение устойчивым, если квадратами и высшими степенями возмущений можно пренебречь, а затем, забыв об этом определении, ставит вопрос о влиянии отбрасывания членов высших порядков на устойчивость движения. При этом ценным оказывается замечание Рауса об относительности понятия устойчивости, означавшее, что движение может быть устойчиво для одного вида возмущений и неустойчиво для другого.

Особый вклад в решение этой задачи внес Н. Е. Жуковский, который в своей докторской диссертации «О прочности движений», изданной в 1882 г., развил понятие устойчивости траекторий динамических систем, которое сейчас называют орбитальной устойчивостью [46, с. 205]. Однако обстоятельное исследование Жуковского, в котором рассматриваются многочисленные примеры, опять было проведено с помощью уравнений первого приближения.

А. Пуанкаре в своем исследовании, посвященном качественной теории дифференциальных уравнений отметил прямое его отношение к теории устойчивости движения Солнечной системы.

Но по настоящему основоположником теории устойчивости движения является А. М. Ляпунов. Вклад его в эту теорию настолько велик, что в мировой литературе развитие устойчивости движения делят на доляпуновский и послеляпуновский периоды, а понятие устойчивости движения носит название устойчивости по Ляпунову. Именно докторская диссертация Александра Михайловича [152], подготовленная им в Харькове и успешно защищенная в Московском университете в 1892 г., стала основой современной теории устойчивости движения. Все последующие исследования в этой области являются развитием методов Ляпунова. Эта работа принадлежит к числу наиболее выдающихся достижений математической мысли. В ней Ляпунов не только впервые правильно и четко поставил вопросы теории устойчивости, но и, опережая время, развил во многих направлениях качественную теорию дифференциальных уравнений.

До исследований Ляпунова задача об устойчивости движения решалась по первому приближению методом линеаризации уравнений движения без выяснения вопроса об ее законности. Рассмотрим, что же предложил А. М. Ляпунов в своей докторской диссертации [152].

Пусть положение системы характеризуется s обобщенными координатами $q_1, q_2, ..., q_s$. А. М. Ляпунов вводит в рассмотрение новые переменные $\xi_i = q_i; \quad \xi_{i+s} = \dot{q}_i; \quad i = 1, 2, ... s$. В этих переменных уравнения движения системы приводятся к виду

$$\frac{d\xi_i}{dt} = F_i\left(t, \xi_1, \xi_2, ..., \xi_n\right); \qquad i = 1, 2, ..., s, \tag{3.31}$$

т.е. к уравнениям первого порядка, где правые части, вообще говоря, не периодичны относительно t.

Рассмотрим определенное движение этой системы, соответствующее какому-нибудь частному решению.

$$\xi_i = \varphi_i\left(t\right); \quad i = 1, 2, ... 2s. \tag{3.32}$$

Судить об устойчивости движения будем в зависимости от поведения соседних движений, т.е. таких движений, для которых начальные условия мало отличаются от начальных условий $\varphi_i\left(0\right)$. Все эти движения называются возмущенными, а движение (3.32), устойчивость которого исследуется, называется невозмущенным. А. М. Ляпунов дал строгое и четкое определение понятия устойчивости движения, удобное как для решения практических задач, так и для проведения теоретических исследований.

Определение. *Невозмущенное движение называется устойчивым, если для всякого положительного числа ε, как бы мало оно ни было, можно найти другое положительное число η, такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени выполняются неравенства*

$$\xi_i(t_0) - \varphi_i(t_0) \le \eta; \; i = 1, 2, ... 2s,$$

будут при всех $t > t_0$ *выполняться неравенства*

$$\xi_i(t) - \varphi_i(t) < \varepsilon; \; i = 1, 2, ... 2s. \tag{3.33}$$

Движения, не удовлетворяющие условиям устойчивости, называются неустойчивыми. Устойчивые невозмущенные движения, для которых при достаточно малом η выполняются не только условия (3.33), но и более строгие условия

$$\lim_{t\to\infty}\xi_i(t)=\varphi_i(t);\; i=1,2,\dots 2s$$

называются асимптотически устойчивыми.

Отсутствие такого определения часто приводило к недоразумениям, так как движение, устойчивое в одном смысле, может оказаться неустойчивым в другом, и наоборот. Это определение оказалось настолько удачным, что оно было принято в качестве основного другими учеными и носит название устойчивости по Ляпунову.

Нелинейные уравнения (3.31), как правило, не поддаются решению в замкнутом виде. Поэтому усилия создателей нелинейной теории, начиная с Пуанкаре и Ляпунова, были направлены на построение рациональных алгоритмов, позволяющих получить приближенные результаты того или иного уровня точности. Первый метод Ляпунова связан с интегрированием исходной системы уравнений с помощью специальных рядов, по степеням начальных значений. Если функции $F_i\left(t,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{2s}\right)$ голоморфные (аналитические), то возможно их разложение в ряд $\dfrac{d\xi_i}{dt}=\sum\limits_{j=1}^{2s}p_{ji}\xi_j+\tilde{F}_i\left(t,\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{2s}\right)$, где $\tilde{F}_i$ содержат члены только порядка выше первого относительно координат $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_{2s}$.

А. М. Ляпунов сформулировал простые достаточные критерии устойчивости – неустойчивости линеаризованной системы и выяснил, в каких случаях линеаризация уравнений движения законна и можно ограничиться изучением поведения однородной линейной системы.

$$\frac{d\xi_i}{dt}=\sum_{j=1}^{2s}p_{ji}\xi_j\,.$$

Вот, что пишет об этом сам Ляпунов [152]: «Конечно, указанный сейчас прием вносит весьма существенное упрощение, в особенности, когда коэффициенты дифференциальных уравнений суть постоянные величины. Но законность такого упрощения *a priori* ничем не оправдана, ибо дело приводится к замене рассматриваемой задачи другою, с какою она может не находиться ни в какой зависимости. Во всяком случае, очевидно, что если решение новой задачи и может давать ответ на первоначальную, то только при известных условиях, а последние обыкновенно не указываются».

Выяснение условий, при которых первое приближение действительно решает вопрос об устойчивости, и составляет содержание первой части работы Ляпунова. С помощью введенных им характеристичных чисел (функций и систем функций) Ляпунов находит критерий, выделяющий так называемые правильные системы дифференциальных уравнений, и доказывает одну из основных теорем теории устойчивости: если система дифференциальных уравнений первого приближения правильная и если все ее характеристичные числа положительны, то невозмущенное движение устойчиво. Правильными, в частности, являются системы с постоянными или периодическими, имеющими общий период, коэффициентами p_{ji}.

При исследовании устойчивости по первому приближению Ляпунов разработал общую теорию дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. До сих пор его идеи являются основополагающими в этой области. Он доказал две теоремы о неустойчивости равновесия, которые являются по сути обратными теореме Лагранжа – Дирихле.

Первая теорема Ляпунова. *Равновесие консервативной системы неустойчиво, если отсутствие минимума потенциальной энергии можно установить по членам второго порядка малости в разложении потенциальной энергии в ряд Маклорена без необходимости рассмотрения членов высших порядков малости.*

Вторая теорема Ляпунова. *Равновесие консервативной системы неустойчиво, если потенциальная энергия системы имеет максимум и наличие этого максимума может быть установлено из рассмотрения членов низшего порядка малости, входящих в разложение потенциальной энергии в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия.*

Далее А. М. Ляпунов рассмотрел простые особенные случаи, когда об устойчивости нельзя судить по первому приближению, в частности, рассмотрел случай наличия периодического решения. Второй метод Ляпунова, его часто называют прямым методом, основан на использовании V-функции (функции Ляпунова). Рассматривается некоторая функция $V(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_{2s})$, по изменению которой на основании уравнений системы (3.31) можно сделать заключение об устойчивости движения. Например, для консервативных систем такой функцией может быть полная энергия системы, которая должна сохранять в данном случае постоянное значение. Для систем общего вида никаких правил определения существования V-функций и способов их построения, если они существуют, Ляпунов не дал. Разумеется, построить функцию Ляпунова для определенной системы автоматического управления или возмущения стационарного движения механической системы – дело нелегкое, однако в ряде случаев это значительно проще, чем решение исходных дифференциальных уравнений задачи.

Когда линейное приближение не решает вопроса об устойчивости нулевого решения системы (3.31), Ляпунов разработал теорию критических случаев. Он выделил наиболее важные критические случаи, когда правые части системы (3.31) не зависят явно от времени. При этом оказалось, что на устойчивость решений могут повлиять члены сколь угодно высокого порядка в разложении правых частей системы (3.31) по степеням ξ_i. Ляпунов предложил понижение порядка исследуемой системы (принцип сведения Ляпунова). При этом строятся с помощью решения уравнений с частными производными семейства решений системы (3.31). Этот подход впоследствии получил развитие в работах Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского под названием метода интегральных многообразий [27; 170].

Ляпунов поставил вопрос об устойчивости движения с высочайшей степенью математической строгости. Это обстоятельство делало его труды доступными лишь небольшому количеству специалистов. В задачах небесной механики, для которой в первую очередь Ляпунов предназначал свою теорию, ее применение требовало большого объема вычислений и в то время не представлялось перспективным. Сам Александр Михайлович применял разработанную теорию устойчивости движения для исследования устойчивости форм равновесия неоднородной вращающейся жидкой массы, находящейся под действием сил взаимного притяжения. В этом вопросе он достиг высочайших результатов. Но, как предмет исследования, так и труды Ляпунова очень сложны для понимания, и все богатство его идей не было воспринято современниками и до конца не понято еще и ждет своих исследователей.

Причины первоначальной невостребованности теории устойчивости Ляпунова не только в значительных математических ее трудностях, но и в технической отсталости царской России и в малом количестве научных работников, способных применять методы Ляпунова. Однако постепенно с развитием техники задачи на устойчивость становились все более актуальными. Для применения методов Ляпунова в технике требовалась их дальнейшая разработка и большое количество работников с достаточно высокой квалификацией. В СССР, в связи с индустриализацией страны, развитием науки и техники, теория устойчивости движения нашла широкое применение. С развитием кибернетики и теории автоматического управления теория устойчивости движения вышла на первый план. Особенно большое развитие в математике и механике получил второй метод Ляпунова.

Таким образом, аналитический период развития механики вообще, и теории колебаний, в частности, подготовили почву для развития прикладной теории колебаний. В области теории колебаний к тому моменту были разработаны в основном методы расчета дискретных одномерных систем, в частности, крутильных колебаний валопроводов, а также задач колебаний одномерных континуальных систем (струна и стержень). С другой стороны, почва для создания этой теории была подготовлена развитием прикладной механики и техники.

ГЛАВА 4

Становление прикладной теории колебаний (первая половина XX века)

4.1. Техника и теория колебаний на рубеже XX века

Промышленная революция XVIII века, вызвавшая прогресс механики, связана, прежде всего, с появлением и развитием паровой машины. Академик Российской АН Н. Н. Моисеев ставит это изобретение в один ряд с освоением человеком огня и созданием ЭВМ [177, с. 19]. Никакие другие достижения человечества: ни приручение домашних животных, ни изобретение колеса, ни достижения биологии и медицины, ни электрификация, ни развитие транспорта и авиации, ни освоение космоса и атомной энергии не повлияли так на развитие человечества. Применение паровых машин вывело его из энергетического тупика, вызванного ограниченностью естественных источников энергии (мускульная сила человека и животных и энергия ветра и рек) и создала предпосылки для дальнейшего развития промышленности, энергетики и транспорта. Хотя паровые машины, по сравнению с другими, более поздними тепловыми машинами, имеют ряд недостатков, основными из которых являются низкий КПД и длительный процесс подготовки к работе (разогрев котла), именно они открыли для человечества эру машинного производства. В конце XVIII – начале XIX веков паровая машина, как универсальный двигатель, заняла ключевые позиции в обрабатывающей и добывающей промышленности и начала быстро распространяться на транспорте. Развитие производства на основе применения паровых машин позволило создать достаточно точные станки и подготовило почву для создания более экономичных и компактных тепловых двигателей.

Огромные балансирные машины Томаса Ньюкомена, Джеймса Уатта и др. имели мощность порядка десяти лошадиных сил, делали от 10 до 25 об/мин и работали без поломок сто лет и более. Естественно, они не требовали проведения расчетов динамической прочности. И только в первой половине XIX века в машиностроении возникли задачи, близкие к задачам теории колебаний. Это были вопросы о маховике и центробежном регуляторе, позже к ним добавилась задача уравновешивания [202, с. 147]. Таким образом, к началу XIX века возникла необходимость в создании теории конструирования машин. В трудах Кориолиса, Понселе и Навье возникла прикладная механика. Понселе и Кориолис ввели понятие «работа силы». На его основе и понятии «живой силы» (кинетическая энергия) французские ученые получили уравнения движения машин и систематизировали все задачи динамики, решенные к тому времени.

Хотя уравновешивание движущихся частей машин имеет огромное значение, оно для паровых машин было решено не сразу. В 1831 г. в Англии Гитоном (Heaton) был построен паровой автомобиль. Но эксплуатировать его было невозможно, так как при 160 – 180 об/мин корпус автомобиля совершал настолько большие колебания, что сидящие в нем пассажиры не могли удержаться на местах. В 1838 г. Гитон применил противовесы, закрепив их на продолжении кривошипа [202, с. 147]. Позже, в 1840-х гг. он применил противовесы и в паровозах, которые с тех пор стали неотъемлемой частью каждого локомотива. Бодмер и Гасвель предложили устройства с противоположно движущимися поршнями, которые, однако не нашли широкого применения из-за чрезмерного усложнения конструкции паровоза. Однако простой противовес уравновешивает только первую гармонику сил инерции, а для полного уравновешивания поршневые машины делают многоцилиндровыми. Но, в отличие от ДВС, в многоцилиндровых паровых машин полностью уравновесить силы инерции в них невозможно, поскольку цилиндры имеют разный диаметр, а поршни и шатуны, следовательно, разные массы.

Ко второй половине XIX века паровые машины становятся все более быстроходными, а средняя скорость поршня достигает 7 м/с. Это повлекло за собой необходимость учета сил инерции поступательно движущихся частей. В 1868 г. английский инженер Ч. Портер опубликовал работу «Машина и регулятор» (C. Porter «On the allen engine and governor». – Engineer, 1868), в которой выяснил влияние сил инерции на неравномерность движения машины. Он предложил графический способ определения сил инерции поступательно движущихся масс при равномерном вращении кривошипа. Этот вопрос был развит И. Радингером в 1870 г. в работе «О паровых машинах с высокой скоростью поршня» (I. Radinger Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit. 2 Aufl., Wien, 1872; 3 Aufl., Berlin, 1892) [90, с. 202].

Несмотря на определенные успехи теории колебаний, в частности, создание спектральной теории линейных колебаний, изучению механических колебаний в технике в XIX веке не придавалось значения, и расчеты на прочность велись в статической постановке. Это объясняется тем, что машины того времени были еще тихоходными и маломощными, и в эпоху становления техники человечество почти не сталкивалось с явлением резонанса. Резонанс проявляется чаще в тех сооружениях, где рассеяние энергии мало́, например, в подвесных мостах. Известны случаи разрушения таких мостов от марширующих по ним солдат. Так в 1831 г. 60 солдат разрушили подвесной Браутонский мост через реку Ирвель в Манчестере. В 1868 г. рухнул мост в Чатеме (Новая Зеландия) от проходящего по нему отряда Британской морской пехоты. Но наиболее трагический случай произошел во Франции в 1850 г., когда Анжерский подвесной мост был разрушен марширующим по нему пехотным батальоном численностью 487 человек. Мост длиной 102 м рухнул в ущелье, при этом погибло 226 человек [24, с. 60; 33, с. 155]. С тех пор во всех армиях было введено правило по мосту идти не в ногу и не чеканить шаг. Однако, 2-го февраля* 1905 г., спустя более пятидесяти лет, в Петербурге рухнул подвесной Египетский мост через реку Фонтанку (ответвление Невы) в тот момент, когда по нему проходил эскадрон лейб-гвардии Конногренадерского полка. Хорошо обученные лошади шли в ногу, и частота ударов копыт совпала с собственной частотой колебаний моста. Пролет длиной 55 м и шириной 11,7 м, разорвав цепи, упал и оказался

---

* Дата дается по новому стилю

на дне реки. Прибывшие пожарные вместе с успевшими перебраться на другой берег гвардейцами спасли всех людей, в том числе извозчиков и случайных пешеходов, а также вытащили из ледяной воды лошадей. К счастью обошлось без человеческих жертв, но несколько искалеченных острыми льдинами лошадей пришлось пристрелить.

Рис. 4.1. Обрушение Египетского моста в Санкт Петербурге.
(Фото из журнала «Нива» № 4 за 1905 г., с. 78)

Но все же подобные случаи встречались крайне редко, и теория колебаний занималась в XIX веке в основном проблемами музыки. В связи с этим в знаменитой энциклопедии Брокгауза и Ефрона резонансом называется явление передачи звука от одного тела к другому, имеющему такую же собственную частоту [260, с. 481]. Под динамическими системами в конце XIX века понимались, в первую очередь, консервативные системы, а предметами исследования были задачи небесной механики. Теория колебаний помогла объяснить явления разной физической природы и сформировать более широкие взгляды на них. В этом огромная заслуга лорда Рэлея. Изучение колебаний неконсервативных систем и развитие аппарата теории колебаний началось позже, под влиянием новых проблем машиностроения.

В области линейных колебаний дискретных систем была получена спектральная теория, позволяющая даже без записи дифференциальных уравнений решать задачи определения частот и форм свободных колебаний и находить амплитуды и фазы установившихся вынужденных колебаний. Однако при числе степеней свободы выше четырех – пяти исследователь встречался с непреодолимыми на тот момент трудностями. Что касается переходных режимов, то даже для системы с одной степенью свободы задача простым численным интегрированием дифференциального уравнения решена быть не могла. В теории колебаний континуальных систем были развиты аналитические методы, позволяющие определять собственные частоты и формы колебаний только тел геометрически правильной формы.

Одна из задач, возникших в середине XIX века, это колебания мостов под действием подвижной нагрузки. Одним из последствий индустриализации стало появление железных дорог. Первой и самой развитой в XIX веке железнодорожной сетью обладала Великобритания. 24 мая 1847 г. на линии Честер – Холихед произошла одна из крупнейших катастроф в истории британских железных дорог – обрушилась одна из секций моста через реку Ди. Это привело к крушению пригородного пассажирского поезда, в результате которого пять человек погибли, а девять получили тяжелые травмы [188, с. 308].

Данное происшествие вызвало большую тревогу среди инженеров-строителей. Многие выдающиеся ученые, среди которых Дж. Стокс, О. Мор, Р. Виллис, Ж. В. Буссинеск принялись за решение задачи о действии подвижной нагрузки на мосты [188, с. 309–314].

При расчете мостов предполагалось, что нагрузка движется с бесконечно малой скоростью, т.е. является статической, т.е. давление подвижных грузов в каждый момент времени считается равным весу этого груза. Однако из-за прогиба моста движущийся по нему груз совершает перемещение в вертикальном направлении. В связи с этим к весу нагрузки следует добавить силу инерции груза. Кроме того следует также учитывать силы инерции элементов самого моста, которые перемещаются при движении нагрузки. Поскольку во всей полноте задача о прогибе моста под действием подвижной нагрузки слишком сложная, исследовались лишь предельные случаи:

1. Когда вес моста мал по сравнению с весом движущегося по нему груза, и можно ограничиться только учетом сил инерции груза.
2. Когда вес подвижной нагрузки мал по сравнению с весом моста.

Первую попытку теоретического решения этой задачи сделал Х. Кокс в 1848 г. Приравнивая работу силы, когда груз находится в середине пролета потенциальной энергии, он получил коэффициент динамичности для этой задачи $k_{д}=2$. При этом Кокс не учитывает работу горизонтальной силы, необходимой для поддержания скорости груза постоянной. Скорость движения груза и его сила инерции, согласно решению Кокса, на результат не влияют.

В 1849 г. профессор Кембриджского университета Роберт Виллис (1800–1875) представил решение с учетом влияния силы инерции подвижного груза. Пренебрегая массой самого моста, он получает дифференциальное уравнение движения груза:

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = Mg - c(t)y\,, \tag{4.1}$$

где M – масса движущегося груза, c – жесткость балки при изгибе, y – вертикальное перемещение балки, а координата массы x является функцией времени – $x = vt$, где v – скорость груза.

Заменяя $x = vt,\ \frac{d}{dt} = v\frac{d}{dx}$, уравнение движения (4.1) можно переписать

$$M\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{c(x)}{v^2}y = \frac{Mg}{v^2}. \tag{4.2}$$

Определим жесткость балки как функцию координаты массы $c(x)$, используя метод Максвелла – Мора.

$$c(x) = \frac{3EIl}{x^2(l-x)^2},$$

где EI – жесткость, l – длина балки.

Окончательно уравнение движения массы имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3EIl}{Mv^2x^2(l-x)^2}y = \frac{g}{v^2}, \qquad y = \frac{P(lx-x^2)^2}{3EIl}. \tag{4.3}$$

Это дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Решая его приближенно в рядах и в квадратурах, Джордж Габриэль Стокс (1819–1903) получил в первом приближении коэффициент динамичности

$$k_{д} = 1 + \frac{Ml}{3EIl}v^2.$$

Точное решение Стокса показало, что при допускаемых скоростях движения и допускаемых значениях статического прогиба моста результат Виллиса с достаточной точностью отражает влияние сил инерции груза.

Дело в том, что существенное влияние оказывают только вес колесной пары, а влияние веса вагона или паровоза, благодаря наличию рессор, существенно ослабляется. Если пролет не очень большой, первая собственная частота колебаний вагонов и паровоза в несколько раз выше частоты колебаний моста. Поэтому даже в самом невыгодном случае при скорости 100 км/час и высоте балок 30 см возрастание давления от сил инерции составляет всего 14% от статического давления.

Однако с увеличением пролета моста его вес имеет более существенное значение, чем вес поезда. Уже Дж. Стокс заметил, что движение груза может вызвать в балке колебания.

Точное решение задачи о колебаниях балки для случая, когда массой движущегося груза можно пренебречь получено интегрированием дифференциального уравнения поперечных колебаний призматического стержня в 1905 г. А. Н. Крыловым [226, с. 502; 188, с. 313–314]. Дополнительный прогиб, обусловленный колебаниями балки, определяется величиной $\alpha = vl/b\pi$. Значения α и соответствующие им периоды T первой собственной частоты колебаний для мостов с различной длиной пролетов приведены в табл. 4.1. При вычислениях предполагалось, что мост представляет собой балку постоянного поперечного сечения, масса моста определялась по справочным таблицам, высота моста принята 0,1 длины пролета, а допускаемые напряжения 800 кгс/см^2 (78,45 МПа).

Таблица 4.1.

l, м	10	20	40	60	80	100
T, с	0,046	0,079	0,128	0,181	0,226	0,270
α при v =10 м/с	0,023	0,020	0,016	0,015	0,014	0,0135
α при v =30 м/с	0,069	0,060	0,048	0,045	0,042	0,040

Подробнее история развития решения задачи о поперечных колебаниях балки под действием подвижных нагрузок приведена у С. П. Тимошенко в работе [228, с. 172–179].

4.2. Задачи теории колебаний в кораблестроении

Во второй половине XIX века самой передовой отраслью промышленности становится кораблестроение. Хотя деревянные парусные корабли, водоизмещение которых могло превышать 5 000 т, поражали воображение современников, они были скорее произведением искусства «мастеров доброй пропорции», чем инженерным сооружением. Опыт Крымской войны показал, что деревянные парусные корабли полностью исчерпали свои возможности. В течение каких-нибудь 20 лет военное судостроение перешло на строительство железных, а затем и стальных броненосных судов, водоизмещение которых выросло до 15 000 т. Строительство гигантских бронированных кораблей потребовало разработки теоретических основ строительной механики корабля, а также изучения законов остойчивости и качки. Развернувшаяся гонка вооружений заставила использовать при строительстве военных кораблей новейшие достижения не только промышленности, но и науки. В отличие от предыдущих лет, когда тип корабля не претерпевал существенных изменений на протяжении столетий, во второй половине XIX и начале XX веков корабль зачастую успевал устаревать еще до спуска на воду. В результате из мастерства деревянной архитектуры кораблестроение превратилось в наиболее развитую отрасль промышленности, использующую самые разнообразные специальности.

Переход на новые строительные материалы, сопровождавшийся облегчением судовых конструкций, поставил перед судостроителями целый ряд новых проблем, в том числе и динамических, и потребовал проведения новых типов расчета, таких как исследование концентрации напряжений, колебания судовых корпусов и др. Основы строительной механики корабля заложил еще Л. Эйлер, который в 1770 г. получил премию Парижской Академии наук за мемуар «Исследование усилий, которые должны выносить все части корабля во время боковой и килевой качки». Им были разработаны правила нагрузки корабля, правила устройства связей и выработана рациональная система конструкции деревянных судов. Спустя 100 лет, в 1870 г. этот мемуар послужил главному кораблестроителю Британского флота Эдуарду Риду в разработке правил постройки железных судов [111, с. 555].

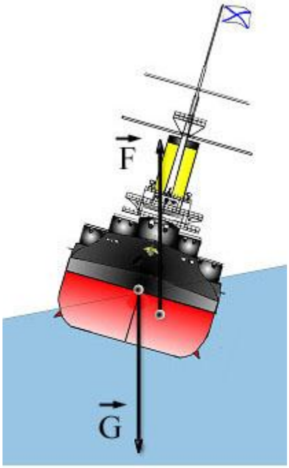

Рис. 4.2. Модель качки по Фруду

Мы уже говорили о том, что Л. Эйлер в книге «Корабельная наука» («Scientia Navalis», 1749 г.) рассмотрел задачу остойчивости корабля. На протяжении ста лет ученые разных стран продолжали исследования в этом направлении. Английский ученый В. Фруд в 1861 г. разработал теорию боковой качки корабля, поперечные размеры которого предполагались малыми по сравнению с размерами прямого сечения волны (рис. 4.2). В 1869 г. Э. Рид ввел в практику судостроения диаграммы остойчивости. В 1895 г. А. Н. Крылов разработал теорию килевой качки корабля. После выступления на ежегодном заседании английского общества корабельных инженеров (Institution of Naval Architects – INA) А. Н. Крылов рассмотрел также и общий вопрос о качке корабля при косвенном курсе относительно гребней волн. В 1898 г. за доклад «Общая теория колебаний корабля на волнении» («General theory of the oscillations of a chip on waves») российский ученый был удостоен редкого отличия – золотой медали INA [59, с. 354–355; 111, с. 109]. Такой награды до него не получал ни один иностранец.

Начало 1900-х гг. ознаменовано первыми серьезными теоретическими исследованиями колебаний, в первую очередь в области кораблестроения – самой передовой отрасли промышленности того времени. Также в этой отрасли появились и первые гасители колебаний, средства их измерения, гироскопические приборы. Более актуальными потребности в динамических расчетах были в военном кораблестроении, так как корпуса военных кораблей легче коммерческих, а машины у них более быстроходные. Кроме того, они должны рассчитываться на такие нагрузки как выстрелы из своих орудий, попадания вражеских снарядов, а также гидравлические удары при подводных взрывах.

О том, к каким катастрофическим последствиям может привести пренебрежение колебаниями машин, говорит следующий случай. Крупнейшими в мире и самыми комфортабельными и быстроходными пароходами в конце 1880-х гг. были однотипные суда «Сити оф Пэрис» («City of Paris») и «Сити оф Нью-Йорк» («City of New York») водоизмещением 13 000 т. «City of Paris» в 1889 – 1892 гг. неоднократно завоевывал «Голубую ленту Атлантики». 25 марта 1890 г., во время рейса из Англии в Америку, на нем произошла поломка вала гребного винта вследствие его изгибных колебаний. При этом огромная в 9000 л.с. паровая машина разлетелась на куски, а ее обломки повредили вторую машину, стоявшую рядом, и пробили борт корабля, вследствие чего было затоплено все машинное отделение. Пароход остался без движения с 1000 пассажиров на борту в 200 милях от берега и если бы в тот момент разразился шторм, число жертв могло быть не меньше, чем на печально знаменитом «Титанике». Только случайно «City of Paris» был обнаружен проходившим мимо судном, отбуксировавшим его в Англию [110, с. 11–14].

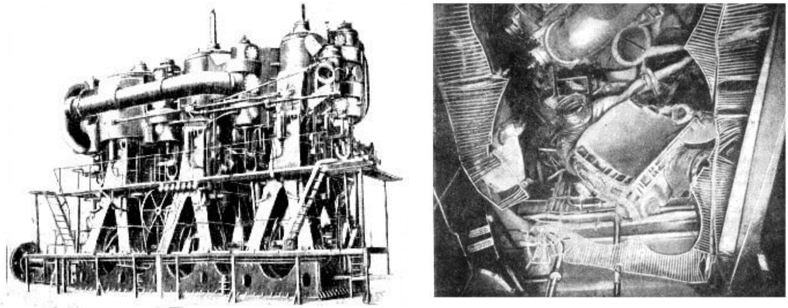

Рис. 4.3. Паровая машина парохода «City of Paris» до и после аварии

Однако авария на пароходе «City of Paris» обусловлена все-таки не конструктивными причинами, а тем, что, вследствие коррозии бронзовой облицовки дейдвудного вала, выступающая его часть не имела поддержки, и вал, изгибаясь от собственной тяжести, совершал колебания. Это привело к усталостному разрушению и к описанной выше аварии.

Если первоначально паровая машина воспринималась моряками как вспомогательный двигатель, то со временем на военных кораблях от парусов вовсе отказались, обратив все внимание на совершенствование машин, мощность которых в считанные годы выросла в десятки раз. Увеличение мощности и скорости паровых машин при одновременном облегчении конструкции корпуса породило проблему колебаний последнего под действием неуравновешенных сил инерции. Это была первая масштабная задача теории колебаний континуальных систем, ее решение сыграло большую роль в развитии этого раздела теории колебаний. При ее решении были разработаны многие методы, применявшиеся затем в других областях техники, подробнее об этом можно прочитать в главе 8.

Таким образом, строительство стальных броненосных судов, оснащенных скоростными паровыми машинами и вооруженных мощными нарезными орудиями, потребовало к себе строгого научного подхода. Именно кораблестроение становится самой наукоемкой отраслью промышленности. Оно стимулирует развитие теплотехники, теории упругости, гидродинамики, теории гироскопов и теории колебаний. Наибольшее развитие корабельные науки получают в Англии, Франции, Германии.

Несмотря на общую техническую отсталость царской России, кораблестроение стояло в ней на высоком научно-техническом уровне, и российские корабли зачастую превосходили лучшие западные образцы. Именно кораблестроитель – академик А. Н. Крылов является основоположником прикладной теории колебаний в России. Видные украинские ученые академики С. П. Тимошенко и Н. М. Крылов по праву считали его своим учителем. На кораблестроительном отделении Петербургского политехнического института появился и первый учебный курс теории механических колебаний – в 1907 г. А. Н. Крылов издал литографическим способом лекции по теории колебаний, читавшиеся для кораблестроительного отделения Петербургского политехнического института в рамках курса строительной механики корабля. В 1936 г. был опубликован его капитальный труд «Вибрация судов» [110], являвшийся учебным руководством для кораблестроительных втузов. При написании этой книги Алексей Николаевич полностью использовал и свой учебный курс, и ранее опубликованные работы.

Большой вклад в применение теории колебаний в практике кораблестроения сделал видный немецкий инженер Герман Фрам

(1867–1939). Его работа, посвященная проблемам крутильных колебаний пароходных валов, вышедшая в 1902 г., положила основу обширным исследованиям этой проблемы [228, с. 24].

Впервые задача о крутильных колебаниях возникла на рубеже XX века именно для пароходных валов. Эту проблему вызвал переход от гребных колес к винтам. Дело в том, что вал, соединяющий машину с гребным винтом, у пароходов имеет длину несколько десятков метров и поэтому его крутильная жесткость мала по сравнению с валами колесных пароходов или стационарных машин. Соответственно и собственные частоты валопроводов этих машин невысокие, и в них раньше стало проявляться явление резонанса. Крутильные колебания вызывались периодически меняющимися крутящими моментами от сил давления и сил инерции паровых машин, которые являются машинами циклического действия. Положение усугубил рост скорости и мощности паровых машин. Многочисленные аварии пароходных валов, происходившие от наступления резонанса или усталостного разрушения при колебаниях, заставили инженеров обратить внимание на вибрационные процессы. Только в Англии в период 1882 – 1885 гг. произошло 228 поломок гребных валов, причиной которых были усталость материала вследствие больших колебаний [33, с. 136]. Поломка гребного вала на корабле часто сопровождалась и поломкой паровой машины. О том, к каким последствиям это может привести, говорит пример аварии на пароходе «City of Paris». Крутильные колебания могут быть вызваны не только газовыми силами и силами инерции поршневых машин. У судов с турбинными механизмами причиной этих колебаний бывают возмущение от неоднородного потока, расцентровка зубчатой передачи и частичное нагружение гребного винта на волнении. Кроме того, в судовых валопроводах могут возникнуть продольные колебания как следствие возмущения от гребного винта. Тема крутильных колебаний особенно важна в развитии теории колебаний и рассматривается отдельно в главе 7.

Г. Фрам в 1909 г. первым применил антивибратор для гашения колебаний корпуса судна. На это изобретение им был получен патент (Frahm H., “Device for damping vibrations of bodies.” US Patent № 989958, 1909). На корме судна, где наблюдались наиболее интенсивные колебания, был поставлен прибор, состоящий из шарнирно закрепленного стержня с грузом на конце, подвешенного на пружине C и снабженного катарактом (демпфером) β (см. рис. 4.4 a) [110, с. 122–126]. Антивибратор настраивается таким образом, чтобы его собственная частота совпала с частотой вынужденных колебаний корабля. В результате колебания палубы успокаиваются, а энергия, благодаря катаракту, рассеивается, превращаясь в теплоту.

Фрам также создал тахометр для измерений частоты колебаний резонансным методом. Прибор описан в его работе, опубликованной в 1905 г. [227, с. 59–60]. Он состоит из системы полос с грузами на конце, подобранных таким образом, что их собственные частоты отличаются на небольшую величину, равную, обычно, половине герца (рис. 4.4 b). Для измерений прибор прикреплялся к машине в месте, где наблюдались интенсивные колебания. По вычисленной аналитически собственной частоте резонирующей полосы определяется частота вынужденных колебаний машины. В 1911 г. Фрам предложил цистерны для успокоения бортовой качки корабля – разновидность демпфера вязкого трения. Они представляют собой два резервуара, частично заполненные водой и соединенные двумя трубами (см. рис. 4.4 c). Верхняя труба снабжена воздушным клапаном. Количество воды в цистернах можно подобрать таким образом, чтобы частота ее собственных колебаний равнялась частоте ударов волн, тогда действие успокоителя будет наиболее эффективным. Обычно масса воды составляет 1 % от водоизмещения корабля. Вода, переливающаяся из одного резервуара в другой, является поглотителем колебаний. При этом степень сопротивления регулируется воздушным клапаном. Это устройство успешно применялось на больших пассажирских пароходах [229, с. 196]. Впоследствии, будучи директором фирмы «Блом и Фосс», Г. Фрам активно внедрял свои изобретения в практику судостроения. В частности его цистерны планировали установить на русских линейных крейсерах типа «Измаил», водоизмещением свыше 32 000 т. В феврале 1913 г. была образована комиссия под руководством генерал-лейтенанта флота А. Н. Крылова, которая зафрахтовала пароход «Метеор», оснащенный цистернами Фрама, и проверила их работу в Атлантическом океане. Для фотозаписи качки корабля Алексей Николаевич изобрел специальный прибор. В результате испытаний комиссия одобрила идею установки цистерн Фрама на линейных крейсерах*, а Крылов разработал их теорию и опубликовал на эту тему ряд специальных статей [111, с. 207–214].

a) *b*) *c*)

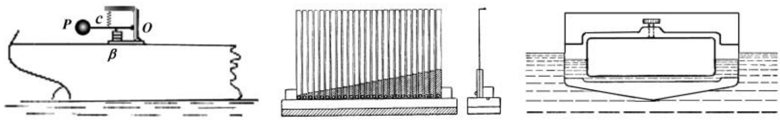

Рис. 4.4. Изобретения Г. Фрама: *a* – антивибратор, *b* – тахометр, *c* – успокоитель бортовой качки корабля

Именно в морском флоте были созданы и первые, успешно работающие гироскопические устройства. В 1880-е гг. австрийский инженер Л. Обри, работавший на заводе Уайтхеда в Фиуме, создал прибор для удержания торпеды на курсе (см. рис. 4.5). Система использовала свободный гироскоп в кардановом подвесе и работала в режиме автоколебаний. Перед запуском торпеды ротор гироскопа разгонялся специальным устройством, а затем прибор работал на выбеге. При отклонении торпеды от заданного курса внешнее кольцо карданового подвеса гироскопа переставляло золотник пневматического регулятора, который воздействовал на рули торпеды, возвращая ее на курс.

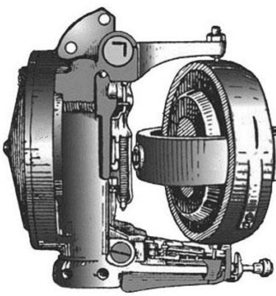

Рис. 4.5. Прибор Обри

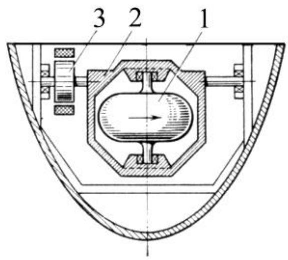

Рис. 4.6. Успокоитель качки Шлика

* Спущенные на воду линейные крейсера «Измаил», «Бородино», «Кинбурн» и «Наварин» до революции в строй введены не были, а после окончания Гражданской войны проданы на слом

В начале XX веке были сделаны первые попытки использования гироскопов для угловой стабилизации. Первым успехом в этом деле был гироскопический успокоитель качки корабля, предложенный в 1904 г. директором Германского Ллойда Эрнстом Отто фон Шликом (1840–1913) [95, с. 334–337]. В этом устройстве массивный ротор приводится во вращение паровой турбиной (рис. 4.6). Ротор 1 расположен в камере 2, которая может качаться по отношению к корпусу судна вокруг перпендикулярной оси. Эти качания гасятся с помощью гидравлического или ленточного тормоза 3. Центр масс системы маховик – рама находится ниже оси подвеса, чтобы ось ротора при отсутствии возмущений располагалась вертикально. Данное устройство испытывалось на небольших судах водоизмещением 56 и 90 т и показало хорошие результаты, амплитуда качки не превышала 1 – 2º.

Первой теоретической работой, посвященной гироскопическому успокоителю, была работа немецкого инженера, механика и теплотехника Ганса Лоренца (1865–1940), в которой он рассмотрел свободные колебания системы успокоитель – судно в предположении, что продольная ось судна горизонтальна и неподвижна. Этот же вопрос изучался А. Фёпплем, указавшим в работе «Теория успокоителя Шлика» (Föpple A. Die Theorie des Schlickischen Schiffskreisels. – VDIZtschr., 1904, Bd. 48, N 14, S. 481–483) на пользу тормозов в успокоителе для погашения колебаний судна. А. Фёппль также предложил приближенную формулу, позволяющую определить необходимый кинетический момент гиростабилизатора

$$K = \frac{1}{5}\varphi_0\sqrt{GhJ} \ ,$$

где φ_0 – амплитуда качки без стабилизации, G –вес, h – метацентрическая высота, а J – момент инерции сечения судна.

В книге [33, с. 150–151] приведен успокоитель бортовой качки корабля водоизмещением 45 000 т. Данный успокоитель имеет массу 110 т, диаметр волчка 3,96 м при толщине 1,12 м. Действие трех таких успокоителей позволяет уменьшить амплитуду бортовой качки огромного лайнера с 20 градусов до одного. Успокоитель системы Шлика имел существенные недостатки и вскоре был вытеснен активными успокоителями, имевшими бо́льшую эффективность. Однако разработанная теория гироскопического успокоителя сыграла важную роль для создания гироскопического стабилизатора вооружения и гирокомпаса. Впоследствии теория гироскопических систем выделилась в самостоятельную отрасль механики, имеющую огромное значение для военной техники, ракетно-космической отрасли, авиации и судоходства.

К началу 1930-х гг. кораблестроение начинает терять приоритет по причине бурного развития авиации и ракетной техники, электротехники, энергетики и кибернетики. Дальнейшее развитие машиностроения потребовало значительного повышения точности анализа динамических напряженных состояний. Расчеты конструкций на колебания стали неотъемлемой частью расчетов на прочность, часто определяющей работоспособность машины. Наиболее динамически нагруженными в первой половине XX века были энергетические машины – ДВС, турбины, а также их приводы, и именно энергомашиностроение стимулировало дальнейшее развитие теории механических колебаний.

4.3. Колебания электровозов с передачей спарниками

Одной из первых технических задач, в которой проявилось явление квазигармонических колебаний, связанное с нелинейной жесткостью, стала задача о колебаниях в электровозах с передачей спарниками. На первом этапе строительства электровозов эти локомотивы в основном имели групповой привод, в котором вращающий момент одного или двух тяговых двигателей передается группе движущих колесных пар, соединенных между собой либо зубчатой передачей, либо спарниками, как на паровозе. В ведущей системе электровозов с передачей движения спарниками наблюдались сильные крутильные колебания в некоторых областях скоростей, которые вызывались периодическими изменениями приведенного коэффициента жесткости системы.

Первым этот вопрос подробно исследовал швейцарский профессор Мейснер (например, в работе Prof. Meissner, Ueber Schiittelescheinungen in Systemen mit periodisch verändlicher Elastizität, «Schweizerische Bauzeitung», Bd 72, 1918, S. 95), который для описания явления получил дифференциальное уравнение угла поворота кривошипа с периодическим коэффициентом, причем жесткость системы он аппроксимировал ступенчатой характеристикой.

Рис. 4.7. Модель электровоза с передачей спарниками

На рис. 4.8 изображена простейшая конструкция передачи спарниками. Тяговый электродвигатель (ТЭД) укреплен на раме и соединяется с ведущей осью посредством спарника с каждой стороны электровоза. Крутящий момент на валу ТЭД OO передается через кривошипы OA_1 и OA_2, спарники A_1B_1 и A_2B_2 и кривошипы O_1B_1 и O_1B_2. Так как кривошипы обеих сторон расставлены под углом 90° между собой, то ведущая система не имеет мертвых положений.

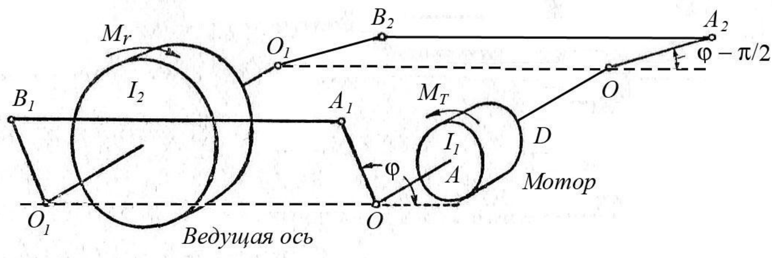

Рис. 4.8. Конструкция передачи спарниками

При передаче спарниками жесткость системы на участке между валом мотора и ведущими осями зависит от положения кривошипов. Хотя колеса локомотива сцепляются с рельсами силой трения, однако, вследствие податливости спарников, мотор имеет возможность немного поворачиваться, не вызывая вращения колес. Когда какой-либо спарник оказывается в одной из своих мертвых точек, то он не может противодействовать мотору повернуться на некоторый малый угол, т.е. его доля в полном значении коэффициента жесткости равна нулю. Напротив, при отклонении от мертвого положения на 90° спарник придает системе бóльшую жесткость, так как для возможности малого поворота мотора либо должен удлиниться этот спарник, либо должен деформироваться палец кривошипа. Таким образом, коэффициент жесткости одного спарника периодически изменяется между некоторым максимумом и минимумом, практически равным нулю, совершая два полных изменения за каждый оборот колеса. Изменение жесткости совокупности обоих спарников имеет четыре цикла за один оборот и более сглажено. Кривые 1 и 2 на рис. 4.9. показывают жесткость передачи, когда включен только один из спарников. Кривая 3 представляет сумму ординат кривых 1 и 2 и показывает изменение результирующего коэффициента жесткости для всей системы. Таким образом, из-за укорочения спарников A_1B_1 и A_2B_2 при передаче усилий от электродвигателя к ведущей оси локомотива жесткость передачи является функцией с периодом в четыре раза меньшим времени одного оборота вала.

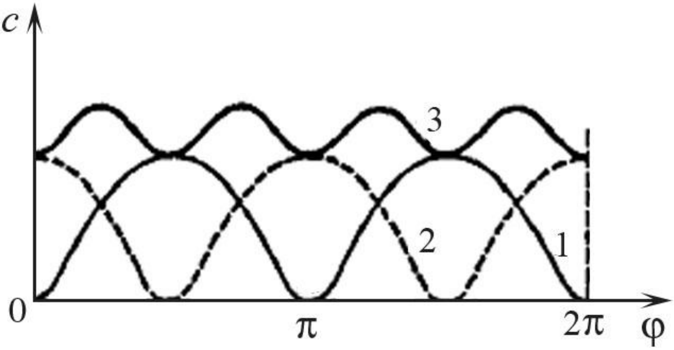

Рис. 4.9. Зависимость жесткости передачи от угла поворота вала электромотора

Крутильные колебания мотора под влиянием пружинящего действия спарников налагаются на основное его вращение. В некоторых условиях подобные системы могут совершать сильные колебания, которые сопровождаются изменением угловой скорости вала электромотора. Поскольку детали привода имеют большие моменты инерции, эти колебания приводили к большим динамическим нагрузкам, что часто вызывало даже поломки, особенно в ранний период электровозостроения.

В случае постоянной жесткости передачи собственная частота системы может быть определена по формуле

$$k = \sqrt{c\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}, \tag{4.4}$$

где c – жесткость передачи, т.е. величина момента, необходимого для ее закручивания на один радиан; I_1, I_2 – приведенные моменты инерции масс, вращающихся вокруг осей OO и O_1O_1 соответственно. Их значения вычисляются в зависимости от конструкции системы.

В случае переменной жесткости задача получается более сложной. Вместо резонансных частот существуют целые области скоростей, в пределах которых могут развиться сильные колебания. Рассмотрение действительных случаев показало, что размеры критических зон для электровозов малы. Однако в реальных системах электровозов имеются зазоры различного вида, влияние которых на жесткость системы весьма велико. При достижении критической скорости вращения эти зазоры будут смыкаться, что приведет к толчкам и вредно скажется на работе передачи. Для отстройки системы от критических областей в нее вводятся податливые элементы. Другим способом борьбы с резонансными явлениями является введение в систему дополнительного сопротивления.

Подробно задача о колебаниях в электровозах с передачей спарниками рассмотрена у С. П. Тимошенко в работе [229, с. 96–110]. Впоследствии данная задача отпала, так как электровозы получили индивидуальные тяговые электродвигатели на каждую колесную пару, что оказалось удобнее как в эксплуатации, так и в ремонте.

4.4. Теория колебаний в турбиностроении

Одним из основных объектов для применения теории колебаний в начале XX века стали паровые турбины. Идея паровой турбины возникла на раннем этапе развития техники, значительно раньше идеи паровой машины, так как в кинематическом отношении она значительно проще последней. Однако для создания экономически целесообразной паровой турбины требовались знания свойств пара и законов термодинамики. Кроме того, изготовление паровой турбины возможно только при высоком уровне технологии обработки металлов и наличии специальных сплавов.

В 1892 г. появились первые сведения о турбине активного типа шведского инженера Карла Густава Патрика де Лаваля (1845–1913). В 1893 г. однодисковая турбина Лаваля, делающая 30 000 оборотов в минуту, была продемонстрированной на выставке в Чикаго. Хотя она и вызвала большой интерес и способствовала развитию турбостроения, но не нашла дальнейшего применения из-за высоких оборотов и, как следствие, громоздкой зубчатой передачи. Однако турбина Лаваля сыграла большую роль в развитии турбостроения, поскольку при ее создании автор поставил и решил ряд основных вопросов этой отрасли. Было сконструировано расширяющееся сопло, специальные шаровые подшипники и зубчатая передача, диск равного сопротивления. Использованы специальные материалы (никелевая сталь) для дисков и лопаток. Особый интерес широких технических кругов вызвал гибкий вал турбины Лаваля. Первыми работами, посвященными ему, были труды Дунверлея (J. Dunverley, Philosoph. Transact., т. 185, с. 279, 1894) и Фёппля (Föppl, Civiligenieur, т. 41, с. 633, 1895) [202, с. 320–321].

Создателем второго типа – реактивных турбин является английский инженер Чарльз Альджерон Парсонс (1854–1931). С его именем связан большой прогресс применения паровых турбин на электростанциях. Больших успехов достигло применение турбин в судостроении. Заслуга в создании первых турбинных судов также принадлежит Парсонсу. В 1894 г. он построил опытное судно «Турбиния» водоизмещением 44,5 т. После многочисленных экспериментов судно в 1897 г. достигло скорости 32,75 уз. [202, с. 343]. После этого Англия постепенно перешла к строительству турбинных боевых кораблей. В 1906 г. в строй вошел первый турбинный броненосец «Дредноут», ставший родоначальником нового класса линейных кораблей и спровоцировавший новый виток гонки вооружений. В том же году были построены крупнейшие пароходы «Лузитания» и «Мавритания» водоизмещением 41 500 т, оснащенные паровыми турбинами общей мощностью 70 000 л.с.

Именно паровые турбины были первыми машинами, в которых потребовалось проведение более фундаментальных прочностных расчетов. По мнению С. П. Тимошенко первой книгой, в которой была ярко проиллюстрирована тенденция анализа напряжений, была книга А. Стодола «Паровые турбины и перспективы тепловых двигателей» [228, с. 666]. Вслед за ней вышло множество других работ, которые А. Стодола систематизировал в своей знаменитой книге «Паровые и газовые турбины» (Stodola A. Dampf- und Gasturbinen), выдержавшей около десяти изданий. В частности, поверочный расчет турбин для «Мавритании» был выполнен А. Стодола.

Применение турбин породило множество новых проблем теории колебаний. Крутильные колебания, которым подвержены паровые машины и ДВС, имеют для турбин меньшее значение, так как электрические генераторы, которые чаще соединяются с турбинами, редко имеют переменную нагрузку. Однако для судовых машин, соединенных с гребными винтами и турбин, соединяемых с механическими передачами, внешние силы могут иметь периодический характер и вызвать резонансные крутильные колебания в системе валопровода.

Гораздо важнее для турбинных валов колебания изгиба, так называемые ***критические обороты***, на которых упругие восстанавливающие силы и моменты, возникающие при прогибе вала, уравновешиваются силами инерции и их моментами при обращении вокруг линии подшипников. В 1930-е гг. валы турбин строились в основном жесткие, для которых устранение колебаний изгиба требует, главным образом, хорошей балансировки ротора. Однако стремление облегчить конструкцию привело к применению в паровых турбинах «гибких» роторов, рабочие обороты которых выше первых критических скоростей и турбина во время пуска или остановки проходит резонанс. Задачи прохода через резонанс являются наиболее важными из области нестационарных колебаний.

Наиболее ответственными деталями турбин являются рабочие лопатки и диски. Они подвержены значительным динамическим воздействиям парового потока, неравномерность которого является причиной колебаний дисков и лопаток. Колебания лопаток часто приводят к их усталостному разрушению, которое может сопровождаться разрушением всей турбины. Проведение расчетов этих колебаний усложняется недостаточными знаниями об условиях закрепления лопаток у основания и обода и связывающего их бандажа. Поскольку лопатка является закрученным стержнем, их изгибные колебания сопровождаются крутильными. Еще большей сложностью отличается исследование колебаний дисков, которые происходят в двух измерениях. Именно проблемы лопаточных аппаратов турбин способствовали изучению колебаний с учетом внутреннего неупругого сопротивления.

Лопатки, диски, роторы паровых, а впоследствии и газовых турбин, стали на долгое время одними из основных объектов для приложения теории механических колебаний.

Советские ученые столкнулись с проблемами динамических расчетов в период индустриализации страны. Большой вклад в развитие и распространение методов динамических расчетов внесли представители киевской научной школы механики, ведущим учреждением которой был Институт строительной механики. Там в 1940 г. было проведено первое исследование прочности пакетов турболопаток в связи с демпфированием и усталостью стали. Руководил работой академик АН УССР С. В. Серенсен, а исполнителями были А. Д. Коваленко и Г. С. Писаренко [137, с. 154–156].

В 1930-е гг. в Харькове был построен турбогенераторный завод (ХТГЗ, ныне ОАО «Турбоатом»). Этот величайший в мире завод турбогенераторостроения строился по проекту американской фирмы «Дженерал Электрик» и был предназначен для выпуска сверхмощных турбогенераторов в 50, 100 и 200 тысяч киловатт. На первом этапе развития завод выпускал уже отлаженные турбины по лицензиям

«Дженерал Электрик». Однако в послевоенный период параллельно с восстановлением разрушенного завода турбостроители переходят на производство турбин высокого давления мощностью 50 и 100 тыс. кВт. по своим оригинальным проектам. Новые конструкции по своей экономичности и надежности были на уровне современного турбостроения и предопределяли линию технического развития завода на ближайшие 10 – 12 лет.

В 1948 г. для научного обеспечения турбостроения из Киева в Харьков перевели Лабораторию проблем быстроходных машин и механизмов, которую возглавлял академик Г. Ф. Проскура. При этом с ней объединяют Харьковский филиал Института теплоэнергетики АН УССР. Это активизирует сотрудничество Лаборатории с ведущим турбостроительным заводом СССР – ХТГЗ, о чем свидетельствует тематика научно-исследовательских работ лаборатории, в том числе и в области динамики и прочности машин [137, с. 191–195]. Впоследствии эта лаборатория реорганизована в Лабораторию гидравлических машин АН УССР, которую с 1954 г. возглавил А. П. Филиппов, а в 1972 г. на ее основе создан Институт проблем машиностроения АН УССР, директором которого стал ученик А. П. Филиппова А. Н. Подгорный.

В том же 1948 г. началось сотрудничество Лаборатории проблем быстроходных машин и механизмов с кафедрой динамики и прочности машин Харьковского политехнического института, заведующим которой был А. П. Филиппов. Проблемам колебаний турбин посвящена деятельность многих ученых ХПИ: А. В. Дабагяна, С. И. Богомолова, Ю. С. Воробьева, Е. Г. Голоскокова, А. М. Журавлевой, О. К. Сливы и др. Об этом можно прочитать в монографии [137, с. 191–195] и статьях [41; 82; 100; 125; 138; 142].

4.5. Проблемы вибраций ДВС

Одними из основных объектов теории колебаний механических систем на протяжении XX века были двигатели внутреннего сгорания. Первые двигатели конструкции Ленуара, Отто, Дизеля и др. были громоздкими, тихоходными и по своим динамическим характеристикам больше напоминали паровые машины. Однако на рубеже XX века появляются быстроходные и легкие бензиновые автомобильные, а позднее авиационные моторы.

Новые быстроходные ДВС породили и новые проблемы вибраций. Для паровых машин и тихоходных дизелей вынужденные колебания возникали в основном в длинных валопроводах от переменных моментов сил давления в цилиндрах и сил инерции или в объектах, на которых они установлены, от неуравновешенных сил инерции. Быстроходные ДВС с большей удельной мощностью, особенно многоцилиндровые, вызвали проблемы колебаний коленчатых валов, трансмиссии, корпуса, вспомогательных агрегатов, трубопроводов и др.

Колебания в двигателе возникают под действием сил давления газов и сил инерции движущихся частей кривошипно-шатунных механизмов (КШМ) и зависят не только от упругих и инерционных свойств коленчатого вала, но также и от присоединенных к нему потребителей в случае крутильных колебаний и упруго-инерционных свойств корпуса двигателя при изгибно-продольных.

Первыми обратили на себя внимание вибрации авиационных моторов, мощность которых к концу 1920-х гг. выросла до нескольких сот лошадиных сил. Наряду с традиционными звездообразными двигателями стали выпускать рядные и V-образные, лобовое сопротивление которых гораздо ниже. Но когда число цилиндров двигателя было увеличено до шести и более в ряд, и одновременно возросла угловая скорость вращения вала, то стали замечать, что в некоторых, достаточно узких пределах чисел оборотов, работа двигателя становилась шумной и неспокойной. Выяснилось, что это явление происходит от крутильных колебаний, когда вал попадает в резонанс с периодически изменяющимся крутящим моментом сил давления газов и инерции. Для многоцилиндровых облегченных транспортных двигателей, у которых резонируют более низкие гармоники, коленчатые валы уже нельзя заменять одним твердым телом и в моделях крутильных колебаний пришлось учитывать порядка десяти степеней свободы [55, с. 6].

На первых порах крутильные колебания не приводили к разрушению коленчатых валов, однако со временем стали происходить и их поломки. В монографии [137, с. 234–235] описан случай аварии дирижабля «Граф Цеппелин», едва не приведший к катастрофе. Этот дирижабль – гордость Германского воздушного флота был оснащен пятью 12-цилиндровыми четырехтактными V-образными бензиновыми моторами «Майбах». Он уже совершил 22 полета, налетав при этом 50 тыс. км, когда в мае 1929 г. при очередном перелете из Европы в Америку вышли из строя четыре двигателя. Воздушный гигант вернулся во Францию на последнем двигателе, который, как позже выяснилось, также имел надлом коленчатого вала. Поскольку до аварии двигатели отработали разное время, причину поломок следовало искать в последних переделках силовой установки. Выяснилось, что перед полетом было увеличено предварительное натяжение пружин муфт сцепления. Это привело к изменению собственных частот крутильных колебаний системы валопровода. В результате двигатели стали работать в резонансном режиме. Данный случай показал опасность крутильных колебаний валопроводов двигателей, которые могут возникнуть даже при малейших их изменениях. Это обстоятельство потребовало проведения расчетов собственных частот не только при создании мотора, но также и при его модернизации.

Первыми в ДВС проявились именно крутильные колебания, поскольку их частоты ниже, чем у изгибных или продольных [55, с. 39; 304]. Поначалу аварии происходили с авиационными двигателями не только вследствие их большей нагруженности, но и благодаря тому, что их коленчатые валы изготавливались из легированных сталей, содержащих хром, никель, ванадий и др. Такая сталь, наряду с бóльшим временным сопротивлением разрыву, имеет относительно малую демпфирующую способность, что способствует возникновению колебаний. Еще большие проблемы динамической прочности создают дизельные двигатели, уровень нагрузки которых выше. Подробнее о расчетах крутильных колебаний можно прочитать в главе 7 данной книги.

Таким образом, среди проблем динамической прочности ДВС на первое место вышли проблемы коленчатых валов, которые являются наиболее нагруженными и, следовательно, наиболее ответственными деталями поршневых машин [73, с. 284]. Однако они испытывают не только крутильные, но и продольные, и изгибные колебания. В отличие от крутильных, они сильнее демпфируются, так как в этих колебаниях участвуют также части корпуса двигателя, поэтому при их расчетах необходимо учитывать податливости опор, влияние масляного слоя, сложный характер демпфирования и другие факторы. Собственные частоты изгибно-продольных колебаний выше, чем у крутильных, так как опоры вала препятствуют изгибу. В связи с этим они попали в рабочий диапазон двигателя, а, следовательно, и в поле зрения исследователей, позже крутильных.

Изгибно-продольные колебания стали проявляться в коленчатых валах к концу 1930-х гг. и стали одними из важнейших проблем в машиностроении до 1960-х гг. Если изучение крутильных колебаний и их влияния на работоспособность трансмиссии было возможно с помощью примитивной модели, то оценка прочности самого коленчатого вала требовала более сложной. Поэтому, наряду с изучением крутильных колебаний, разрабатывался и второй подход – изучение изгиба коленчатых валов.

Вопросам истории развития методов динамических расчетов систем с ДВС, в том числе и коленчатых валов, посвящены две главы в монографии [137, с. 191–195] и статьи [131; 132; 134; 136].

4.6. Флаттер и шимми в авиации

В 1930-е гг. бурно развивается авиация. Стремительно растут скорость, грузоподъемность и дальность полета самолетов. Однако с появлением новых скоростных самолетов в авиации прокатилась волна таинственных, необъяснимых катастроф. Свидетели, наблюдавшие это с земли, видели, что самолет летел нормально, ничто не внушало никаких опасений, как вдруг внезапно машина как будто взрывается, и на землю падают ее обломки. Однако на упавших обломках следов взрыва не оказывалось. Экипаж самолета при этом, как правило, погибал, а немногочисленные летчики, которым чудом удавалось спастись, ничего добавить к рассказам наземных очевидцев не могли – ничто не предвещало катастрофу, и вдруг удар, как будто самолет натолкнулся на стену и развалился на куски.

Один за другим погибали английские, американские, немецкие и французские скоростные самолеты. Пришла эта беда и в Советский Союз – 27 ноября 1935 г. при испытательном полете разбился опытный пассажирский самолет ЗИГ-1, созданный по проекту приглашенного в СССР французского конструктора Андре Лявиля. Он разрушился в воздухе при определении максимальной скорости, которую может развить. При этом погибли все шесть человек, находившихся на борту.

Постепенно картина катастроф стала обрастать более достоверными подробностями. Стало ясно, что разрушение происходит, хотя и быстро, но не совсем мгновенно. Сначала наступают вибрации крыльев, а иногда и оперения самолета. Амплитуды этих вибраций возрастают настолько быстро, что они сразу приводят к поломке колеблющихся частей. В результате новому грозному явлению было дано название флаттер (от английского ***flutter*** – махать, бить крыльями, вибрировать). Хотя подлинная картина явления прояснялась, причины, порождающие это явление, оставались непонятными. Следовательно, и способы его преодоления также были неясны. Флаттер стал настоящим бедствием для авиации, затормозившим ее прогресс.

Флаттер относится к категории автоколебаний, при которых периодическая возмущающая сила возникает в процессе самих колебаний. При флаттере таким возмущающим воздействием на крыло самолета являются аэродинамические силы, возникающие при обтекании его потоком воздуха.

Исследования флаттера начал в 1923 г. в Германии В. Бирнбаум, который рассмотрел плоскую задачу, а через год опубликовал первую работу по данному вопросу (*Birnbaum W.* Das ebene Problem des schlagenden Flugels). Эта тема получила значительное развитие в 1929 и следующих годах, когда в Германии и Англии появился ряд работ. Исследователи флаттера пошли по двум направлениям. Теоретическую основу первого составляли работы, авторы которых пытались получить дифференциальные уравнения колеблющегося крыла, и, интегрируя их, вычислить критическую скорость полета, т.е. скорость, при которой наступает потеря устойчивости конструкции. Кроме упомянутой работы В. Бирнбаума, сюда можно отнести работы Г. Бленка и Либерса, М. Раушера, экспериментальную работу И. Эссерс и др.

В основе второго направления лежит изучение физической стороны явления, его энергетического баланса и мер, которыми можно предотвратить его развитие. Оно представлено в основном работами английских исследователей – Фрейзером и Данкеном, Локспейсером и др.

Почти во всех этих работах рассматривался изгибно-крутильный флаттер крыла. При таком виде флаттера крыло совершает маховые движения, в процессе которых периодически изменяются прогиб и угол закручивания каждого сечения крыла. Поскольку крыло колеблется в обдувающем его потоке, эти деформации вызывают периодическое изменение внешних сил. В упрощенной постановке задачи влияние отклонения элерона на характеристики движения предполагалось исключенным.

Суммируя аэродинамические, упругие и инерционные воздействия, Раушер в 1929 г. получил дифференциальные уравнения движения крыла при флаттере. (Rauscher M. Uber die Schwingungen freitragender Flugel). Это дифференциальные уравнения 2-го порядка в частных производных, интегрирование которых приводит к алгебраическому характеристическому уравнению 4-го порядка. При этом коэффициенты характеристического уравнения являются функциями скорости. Следовательно, функциями скорости являются и критерии устойчивости.

Таким образом, было показано, что флаттер и дивергенция[†] представляют собой две разные формы одного и того же физического явления – потери устойчивости конструкцией крыла в потоке воздуха. Следовательно, их аэродинамика в момент начала движения управляется одними и теми же законами. Однако распространяя свои теоретические выводы на реальное крыло, Раушер не мог добиться совпадения вычисленных и фактических критических скоростей.

В Советском Союзе исследования флаттера были начаты в 1932 г. в экспериментально-аэродинамическом отделе Центрального аэрогидродинамического института (ЭАО ЦАГИ), где с 1932 по 1935 гг. работала бригада по исследованию вибраций, возглавляемая В. П. Лысковым. В конце 1934 – начале 1935 гг. работы этой бригады были подвергнуты, резкой критике группой работников ЭАО в составе Е. П. Гроссмана, С. С. Кричевского и А. А. Борина. В мае 1935 г.

[†] дивергенция – явление, при котором под действием аэродинамических сил несущая поверхность, включающая крыло, оперение или пилон навески двигателя закручивается вплоть до разрушения

в 202-м выпуске «Трудов ЦАГИ» вышла в свет их работа «К вопросу о потере устойчивости конструкцией крыла в полете», показавшая несостоятельность принятого В. П. Лысковым направления и положившая начало полному выяснению физической сути явления и созданию надежных методов прогнозирования и предупреждения флаттера.

К моменту появления этой работы физические представления о флаттере дали возможность построить схему энергетического баланса бинарного движения (изгиб-кручение), иллюстрирующую энергообмен как между колеблющимся крылом и внешней средой, так и внутри конструкции крыла между изгибной и крутильной деформациями. Однако схема нуждалась в значительной доработке. Была обнаружена, но не изучена до конца роль взаимного расположения трех точек – центра жесткости сечения крыла, центра инерции и аэродинамического фокуса. Совмещение этих трех точек приводит к разрыву обеих инерционных связей и аэродинамической связи, передающей энергию от кручения к изгибу. Это приводит к тому, что энергетический цикл разрывается и флаттер, а также дивергенция становятся невозможными.

Несмотря на то, что Раушером были выведены принципиально верные уравнения движения, их интегрирование привело к значениям критических скоростей, сильно отличающимся от соответствующих экспериментальных значений. В результате построение расчетного метода не было завершено, и рекомендации по борьбе с потерей устойчивости конструкций крыла были разноречивы и нечетки.

Авторы первой опубликованной в СССР работы о физической сущности флаттера – Е. П. Гроссман, С. С. Кричевский и А. А. Борин уточнили и дополнили представления английских исследователей о физической стороне проблемы. Очень важным стало уточнение схемы энергетического баланса и влияния на него параметров конструкции крыла. Приток энергии к крылу совершается через его кручение и главным образом через связи между движениями кручения и изгиба. Особую роль в характеристике этого процесса играют два параметра, определяющие количество и даже знак подводимой к крылу энергии:

1) взаимное положение центра жесткости и центра инерции;

2) взаимное положение центра жесткости и аэродинамического фокуса.

В работе трех авторов было показано, что точного совмещения упомянутых трех точек добиваться не обязательно – достаточно только близкого их расположения. При этом возможность флаттера устраняется или, по крайней мере, критическая скорость становится очень высокой. Было также показано, что критическая скорость дивергенции всегда превышает скорость, при которой наступает статическое перекручивание крыла. В результате были предложены формулы, по которым вычисленные скорости оказывались в регулярном соотношении с опытными, на 5 – 15% ниже последних.

Поскольку в реальной конструкции необходимое сближение трех точек далеко не всегда достижимо, то представлял большой интерес анализ конструктивных мероприятий, позволяющих увеличить критическую скорость флаттера. Такой анализ подробно проведен в монографии Е. П. Гроссмана «Флаттер», опубликованной в 1937 г. в 283-м выпуске «Трудов ЦАГИ». В ней автором был дан новый вывод аэродинамических формул для колеблющегося крыла, основанный также на гипотезе стационарности, но без применения гипотезы динамической кривизны. Было установлено наличие сдвига фаз между смещениями различных сечений по размаху крыла, а также между движениями кручения и изгиба. В результате получены зависимости четко отражающие влияние размеров, массовых характеристик крыла и жесткостей его на изгиб и кручение на критическую скорость. При этом большинство установленных зависимостей было выражено простыми формулами, с большим успехом применявшимися на практике. Испытания ряда специальных моделей в аэродинамической трубе подтвердили надежность разработанной теории.

В 1936 г. молодой сотрудник ЦАГИ будущий президент Академии наук СССР, Мстислав Всеволодович Келдыш (1911 – 1978) в работе «Гидродинамический вывод формул Раушера» подтвердил достоверность формул, выведенных Раушером на основании приближенной теории. Работа проводилась под руководством профессора МГУ, научного сотрудника Физического института АН СССР Юрия Борисовича Румера (1901–1985).

В дальнейшем в период до 1941 г. советскими исследователями М. В. Келдышем, Е. П. Гроссманом, Я. М. Пархомовским, П. М. Ризом, Л. С. Поповым и др. был выполнен ряд работ, углубивший и расширивший представления о потере устойчивости различных частей конструкций самолета в полете. Было не только найдено объяснение явления флаттера, но и создана его достаточно простая математическая модель и соответственно простой метод расчета самолета, позволивший авиаконструкторам практически побороть его [31; 94, с. 598–603].

В частности, удалось:

1. Существенно уточнить представление о механизме возникновения неустойчивости крыла и внести ясность в схему энергетического баланса явления и получить качественные представления о важнейших параметрах, определяющих возникновение флаттера.

2. Получить надежные расчетные формулы для определения критической скорости возникновения флаттера применительно к наиболее часто встречающимся в практике конструктивным схемам крыла и хвостового оперения и для определения скоростей дивергенции и статического перекручивания крыла.

3. Детально изучить влияние ряда конструктивных параметров на критическую скорость возникновения флаттера и разработать эффективные меры борьбы с потерей устойчивости.

4. Разработать методику испытаний на флаттер моделей самолетов и их конструктивных частей в аэродинамических трубах.

Вскоре М. В. Келдыш возглавил все исследования флаттера в ЦАГИ. Юрий Борисович Румер в 1938 г. за дружбу с Л. Д. Ландау был репрессирован и много лет провел в спецтюрьмах НКВД, где над созданием новых самолетов работали многие выдающиеся инженеры и ученые. В 1941 г. по вздорному обвинению также был арестован Александр Аркадьевич Борин (1911 – 1978), отбывший срок 10 лет, а затем до 1957 г. находившийся в «вечной» ссылке в Джезказгане. М. В. Келдыш, несмотря на письмо, а точнее донос В. П. Лыскова в ЦК ВКП(б), смог отстоять свою точку зрения.

В результате в руках самолетостроителей оказались методы расчета величины критической скорости флаттера, ранее которой он ни в коем случае возникнуть не может. Решение указанной проблемы теории колебаний устранило существенные препятствия на пути развития отечественной скоростной авиации. В 1942 г., в разгар войны за исследования в области флаттера М. В. Келдыш и Е. П. Гроссман были удостоены Сталинской премии.

4.7. Срывной флаттер висячих мостов

Однако явлению флаттера подвержены не только конструкции самолетов. Он может проявиться там, где его никто не ожидает.

Еще в середине XIX века был отмечен ряд катастроф, происходящих с висячими мостами. Такие мосты обладают целым рядом достоинств – они эстетичны, обходятся дешевле других конструкций и позволяют перекрывать пролеты огромной ширины. Однако висячие мосты очень восприимчивы к действию ветровых нагрузок.

Так, в 1852 г. во Франции рухнул мост через Виллэну в Ла-Рош-Бернар, имевший пролет 196 м. Мост вскоре был восстановлен, но снова обрушился в 1871 г. В 1854 г. во время сильного ветра разрушился 336-метровый мост на р. Огайо у города Уилинга. Это был один из первых документированных примеров подобных катастроф. Вот как его описывает очевидец: «В течение нескольких минут мы с тревогой наблюдали колебаниями моста, подобными качке корабля во время шторма. Один раз мост поднялся почти на высоту пилонов, потом резко опустился; при этом вдоль всего пролета произошло скручивание, и одна половина проезжей части почти перевернулась. Затем огромная конструкция с головокружительной высоты устремилась в реку с ужасным треском и грохотом».

Следующие крупные катастрофы произошли с висячими мостами через реку Ниагару в 1864 г. (длина пролета 320 м) и 1889 г. (длина пролета 386 м). Эти катастрофы происходили в сильную бурю и им предшествовали чрезвычайно большие колебания. За каких-нибудь 12 лет с 1876 по 1888 гг. в США рухнул 251 мост. Большинство из этих больших и маленьких мостов были висячими. Хотя эти аварии насторожили инженеров, они не воспрепятствовали строительству новых висячих мостов, особенно в тех случаях, когда было необходимо перекрыть большие пролеты.

В 1940 г. США, в штате Вашингтон был построен висячий мост через пролив Такома-Нэрроуз. Это был один из крупнейших мостов в мире. Его общая длина составляла 1810 м, а длина центрального пролета – 854 м. При этом, поскольку интенсивного движения по мосту не ожидалось, его ширина составляла всего 11,9 м. Мост подвешивался на стальных тросах диаметром 438 мм к стальным пилонам высотой более 70 м, установленным на бетонных быках.

Такомский мост был открыт для движения 1 июля 1940 г., однако его эксплуатация была практически невозможна. Еще во время возведения строители дали мосту прозвище «Галопирующая Герти» из-за того, что в ветреную погоду дорожное полотно моста сильно раскачивалось. Был сделан ряд попыток устранить этот недостаток введением дополнительных связей и установкой гидравлических амортизаторов на пилонах, но победить колебания не удалось.

7 ноября 1940 г. в 11:00 по местному времени произошла авария, которая привела к разрушению центрального пролета моста. В 8 часов утра при ветре скоростью около 17 м/с начались вертикальные многоузловые колебания моста с небольшой амплитудой и частотой 0,6 Гц. К 10:00 ветер усилился до 19 м/с, в результате установились изгибно-крутильные колебания с меньшей частотой – 0,2 Гц и весьма большими амплитудами. Максимальная закрутка проезжей части при этом достигала 45˚. Мост выдерживал эти колебания около часа, после чего большой участок полотна отломился и упал в реку. Движение в этот момент было весьма слабым, и водитель единственной машины, оказавшейся на мосту, успел покинуть ее и спастись. Процесс разрушения описывается следующим образом:

«Обрыв подвесок центрального пролета повлек провисание боковых пролетов и наклон пилонов. Сильные вертикальные и крутильные колебания моста явились следствием чрезмерной гибкости конструкции и относительно малой способности моста поглощать динамические силы… Мост был запроектирован и правильно рассчитан на действие статических нагрузок, в том числе и ветровой, но аэродинамическое действие нагрузки не было учтено. Крутильные колебания возникли в результате действия ветра на проезжую часть около горизонтальной оси, параллельной продольной оси моста. Крутильные колебания усиливались вертикальными колебаниями тросов. Опускание троса с одной стороны моста и поднятие его с другой вызвали наклон проезжей части и породили крутильные колебания» [264].

Поскольку эту катастрофу предсказывали, весь процесс разрушения был снят на 16-миллиметровую цветную кинопленку. На основе этой съемки был создан документальный фильм «The Tacoma Narrows Bridge Collapse» (1940), позволивший впоследствии подробно изучить процесс разрушения.

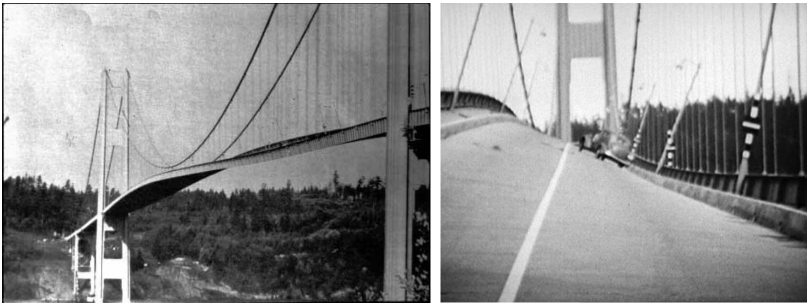

Рис. 4.10. Колебания Такомского моста (кадры из фильма)

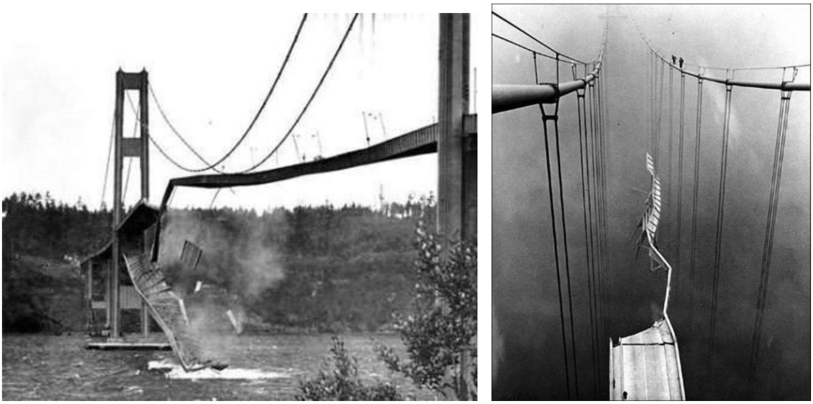

Рис. 4.11. Обрушение Такомского моста (кадры из фильма)

Поначалу крушение Такомского моста связывали с явлением классического флаттера конструкции. Однако позднее появилось объяснение, связанное с особыми аэродинамическими эффектами.

Если в потоке воздуха находится плохо обтекаемое препятствие, за ним образуется вихревой след. При этом вихри сбегают с определенной периодичностью, зависящей от формы и размеров конструкции, а также от направления и скорости потока воздуха. Если частота вихрей совпадает с собственной частотой колебаний конструкции, наступает резонанс и возможно ее разрушение. Этим объясняется и тот факт, что Такомский мост до катастрофы выдерживал более сильный ветер.

Колебания упругих конструкций, обусловленные срывом воздушного потока получили название «***срывной флаттер***». Срывному флаттеру подвержены не только висячие мосты, но также надземные трубопроводы, конструкции башенного типа, воздушные винты, лопатки турбомашин и др.

Авария Такомского моста оставила значительный след в развитии теории колебаний. Она способствовала исследованиям в области аэродинамики и аэроупругости конструкций и изменению подходов к проектированию всех большепролетных мостов в мире, начиная с 1940-х гг. После данной катастрофы подвесные мосты начали строить с учетом аэродинамической нагрузки. Но никто не предполагал, что явление флаттера может проявиться на многоопорных мостах. В 1996 г. в Волгограде началось строительство нового автомобильного моста длиной 2514 м через Волгу. Из-за недостаточного финансирования строительство затянулось, и мост был открыт только 10 октября 2009 г. Но уже через полгода – 20 мая 2010 г. в 18:30 сотрудники ГИБДД УВД по Волгограду перекрыли автодвижение по мосту. Причиной этого стали интенсивные колебания полотна моста в вертикальной плоскости с амплитудой около 50 – 60 см, которые он совершал из-за значительной ветровой нагрузки.

Движение было перекрыто до прибытия специалистов из Саратова. Визуальный осмотр показал, что дорожное покрытие и опоры не получили повреждений, и мост можно эксплуатировать. Утром 25 мая после пробного проезда тяжелых грузовиков, груженных щебнем, движение легкового автотранспорта по мосту возобновилось. Проезд же грузовых машин по нему был запрещен. Однако мост продолжал совершать колебания при сильном ветре и получил неофициальное название «танцующий». В Волгограде были проведены аэродинамические испытания моста, которые показали, что причиной колебаний мостового сооружения является ветровой резонанс. Дело в том, что мост имел облегченную конструкцию, и в нем также проявилось явление срывного флаттера.

Рис. 4.12. Танцующий мост в Волгограде

Побороть флаттер удалось путем уменьшения жесткости опор и установкой демпферов (гасителей колебаний). Мост оснастили двенадцатью полуактивными гасителями типа ATMD-V-5200, массой по 5200 кг каждый, разработанными немецкой компанией Maurer Söhne при участии шведской государственной лаборатории EMPA и института вооруженных сил Германии. В ноябре 2011 г. работы на мосту были закончены, и он опять эксплуатируется в штатном режиме.

4.8. Колебания ракет

В 1950-е гг. производство ракетно-космической техники становится самой передовой и наукоемкой отраслью промышленности. Наряду с другими оно вызвало и новые проблемы прикладной теории механических колебаний. При разработке первых отечественных баллистических ракет вопросы прочности их корпусов решались без учета упругих колебаний. Однако расчет корпуса ракеты с помощью коэффициента перегрузки в большинстве случаев дает заниженные результаты, и поэтому при создании более совершенных и мощных ракет был заменен более точным динамическим расчетом.

В истории теории механических колебаний проблема колебаний ракет занимает важное место, так как именно в ней проявлялись новые колебательные явления и использовались новые методы расчетов, а также привлекались ведущие ученые, работающие в области динамики и прочности машин.

При расчетах ракет рассматриваются два типа колебаний:

а) траекторные колебания – колебания ракеты как абсолютно жесткого тела, при которых основное значение имеют изменения параметров траектории полета. Эти колебания определяют динамику полета ракеты, его устойчивость и управляемость;

б) упругие колебания – циклические изменения напряженно-деформированного состояния конструкции. Эти колебания не только могут привести к возникновению опасных напряжений, вплоть до разрушающих, но и к ухудшению работы оборудования и аппаратуры.

Поскольку устойчивость движения ракеты обеспечивается раздельно по углам тангажа, рыскания и крена, то обычно рассматривают замкнутые динамические системы в каждой из трех плоскостей. При нарушении условий устойчивости в системе развиваются колебания, которые могут перейти в почти стационарный колебательный режим. Например, продольные колебания корпуса ракеты вызывают колебания давления в баках и, как следствие, – могут вызвать изменение диаметра бака и прогиба его днища. При этом жидкость в баке перемещается относительно стенок в направлении оси ракеты, отчего возникают колебания подачи топлива в камеру сгорания. В свою очередь колебания давления в камере воздействуют на топливные магистрали и корпус ракеты. Вследствие наличия нелинейностей при некоторых соотношениях параметров колебания могут перейти в стационарный автоколебательный режим с низкой частотой (50 – 100 Гц). Таким образом, динамические свойства регулируемого объекта (ракеты) могут повлиять на динамические свойства автомата стабилизации и на устойчивость полета.

При таком мощном источнике энергии как ЖРД, автоколебания могут привести к возникновению больших динамических нагрузок в конструкции ракеты, которые вызывают повреждения оборудования и приборов и даже разрушение конструкции ракеты. На основании анализа динамических свойств, как отдельных частей, так и системы в целом, требуется определить такие соотношения параметров, чтобы номинальный режим работы системы был всегда устойчивым.

Для расчета собственных частот и форм продольных колебаний корпуса применяются две основные расчетные схемы:

1) континуальная в виде прямого неоднородного стержня с присоединенными колебательными контурами, моделирующими жидкие наполнители (см. рис. 4.13 и 4.14);

2) дискретная пружинно-массовая модель, состоящая из элементов с сосредоточенными параметрами (см. рис. 4.15).

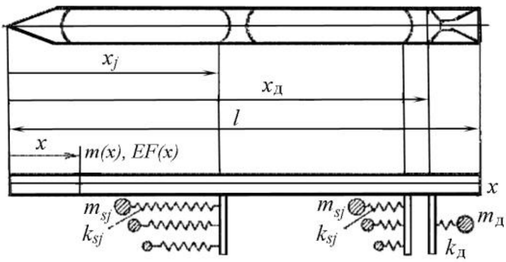

Рис. 4.13. Модель корпуса жидкостной ракеты
в виде прямого неоднородного стержня

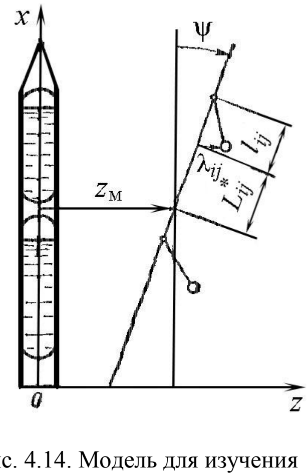

Рис. 4.14. Модель для изучения
поперечных колебаний ракеты
с учетом жидкости в баках

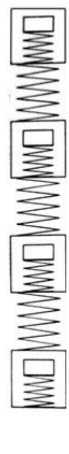

Рис. 4.15. Дискретная модель
для изучения продольных колебаний
двухступенчатой жидкостной ракеты

Кроме того, в 1960-е гг. применялись балочная расчетная схема и матричный метод. При этом использовались свойства симметрии конструкции, что позволяло сократить объем вычислений [108, с. 7].

При исследовании поперечных колебаний ракеты ее корпус представляют в виде стержня с переменными по длине массой и жесткостью. Ракета подвержена действию силы тяги двигателей, управляющей силы рулей с градиентом по углу поворота и аэродинамических сил. При этом считается, что небольшие поперечные колебания не оказывают влияния на скорость и ускорение продольного движения ракеты. Кроме того, принимается, что:

1) аэродинамические силы не зависят от упругих поперечных колебаний корпуса;

2) аэродинамические силы, обусловленные движением жесткого корпуса, не вызывают упругих поперечных колебаний;

3) поворот вектора силы тяги вследствие упругих поперечных колебаний корпуса не влияет на движение ракеты как твердого тела.

При этих упрощениях уравнения, описывающие колебания, распадаются на две независимые группы: уравнения возмущенного движения ракеты как твердого тела и уравнения для упругих поперечных колебаний корпуса.

Каждая ступень многоступенчатой жидкостной ракеты состоит из хвостового двигательного отсека, баков для горючего и окислителя и переходного отсека. Большинство из них имеет цилиндрическую форму, а обтекатель и переходные отсеки – форму конуса. Поначалу они рассматривались как твердые тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Позже эти составные части корпуса ракеты стали рассматривать как тонкостенные оболочки. Таким образом, бурное развитие авиационной и космической техники в 1960-е гг. вызвало значительный прогресс в теории пластин и оболочек и потребовало проведения исследований их динамики, причем зачастую в нелинейной постановке.

Первым детищем советской ракетной промышленности была одноступенчатая тактическая баллистическая ракета средней дальности Р-1. Она была создана в ОКБ-1 под руководством Сергея Павловича Королева. 9 мая 1951 г. министерству вооружения были переданы только что построенный в Днепропетровске автомобильный и строящийся шинный заводы. На их базе был создан гигантский ракетный завод, получивший наименование «Южный машиностроительный завод» (Южмаш или завод № 586). При нем для экспериментального производства было создано ОКБ-586 (КБ «Южное» или КБЮ) под руководством М. К. Янгеля, а в Днепропетровском государственном университете (ДГУ) открыт физико-технический факультет, который стал основным поставщиком специалистов для Южмаша и ОКБ-586. Кроме того, в Харькове в 1951 г. было организовано ПО «Коммунар» – первое в СССР предприятие для серийного выпуска систем управления (СУ), предназначенных для ракет и космических летательных аппаратов. При нем было создано специальное конструкторское бюро – СКБ-897. В 1959 г. от него отделилось ОКБ-692 (КБ «Электроприборостроения» – ныне НПО «Хартрон»), предназначенное в основном для разработки СУ ракет производства Южмаша. Так Украина стала крупнейшим производителем ракетной и космической техники.

Первые советские боевые ракеты Р-1, Р-2 и Р-5 проблем, связанных с колебаниями, не доставляли. Впервые при определении динамических характеристик полета ракеты пришлось исследовать продольные колебания корпуса с учетом его упругости в боевой баллистической ракете Р-7 (8К71)* и ее модификации – ракете-носителе «Восток-Л» (8К72), в которых проявилась продольная динамическая неустойчивость. В процессе доводки ракеты 8К71 и разработки ракеты 8К72 в ОКБ-1 был проведен целый ряд исследований по уточнению динамической схемы ракеты с четырехблочной компоновкой. Задачами колебаний ракет в конце 1950-х гг. занимались также в НИИ-4, НИИ-88 и НИИ-885. Наиболее значительными работами, посвященными устойчивости и автоколебаниям баллистических ракет с учетом упругих свойств корпуса и подвижности жидкости в баках, были труды Д. Е. Охоцимского, Б. И. Рабиновича и К. С. Колесникова [108, с. 8, 306–308].

---

* В Советском Союзе была принята двойная нумерация боевых баллистических ракет – в секретной документации использовалась буква Р и номер ракеты, а в более открытых, хотя и секретных, источниках упоминалось изделие с буквенно-цифровым индексом. В США для советских ракет применяли обозначения, не имеющие ничего общего с нашими – буквы SS и номер ракеты, а также давали имя собственное.

Украинские специалисты столкнулись с проблемами колебаний ракет в сентябре 1959 г., когда состоялся первый пуск ракеты Р-12 (8К63) с первой в СССР шахтной установки «Маяк». Доработка системы управления этой ракеты осуществлялась коллективом СКБ-897 под руководством А. М. Гинзбурга (1911–2000) и завершена специалистами ОКБ-692. Пуск оказался неудачным из-за чрезмерных вибрационных и акустических нагружений конструкции ракеты при ее движении в шахте. В ряде источников называется недостаточная вибропрочность приборов СУ. В действительности зажатая газами в стакане шахты ракета вырвалась из нее с оторванной рулевой машинкой и вскоре упала. Несмотря на то, что ракета не долетела до цели, ее пуск был огромным успехом, так как была продемонстрирована возможность выхода ракеты из шахты под действием тяги маршевых двигателей. После доработки стартового комплекса последующие пуски прошли успешно, и в 1963 г. ракета была принята на вооружение [128].

2 февраля 1961 г. осуществлен первый пуск первой в СССР межконтинентальной баллистической ракеты (МБР) Р-16 (8К64), который квалифицирован как успешный, несмотря на потерю устойчивости второй ступени. Данное испытание вскрыло еще одну техническую и теоретическую проблему – структурную неустойчивость в каналах системы угловой стабилизации, обусловленную колебаниями жидких наполнителей в частично заполненных топливных баках. Чтобы до конца выяснить причины потери устойчивости потребовался еще один пуск, закончившийся с тем же результатом.

Проблема была решена группой динамиков ОКБ-692 в составе А. И. Гудименко Я. Е. Айзенберга, В. Н. Романенко, В. С. Столетнего с привлечением ученых из НИИ-88 (Б. И. Рабинович и Г. Н. Микишев) и НИИ-4 (Г. С. Нариманов и М. М. Борзюков). С целью получения достоверных исходных данных по динамическим моделям ракет под научно-техническим руководством В. С. Столетнего создан специальный стенд для экспериментального определения структуры и параметров динамической схемы составных ракет с частично заполненными баками. Таким образом, в ОКБ-692 впервые в СССР была решена проблема устойчивости ракеты при колебаниях жидкости в топливных баках.

Впоследствии в ОКБ-692 были созданы системы управления многих МБР, в том числе самой мощной в мире боевой ракеты Р-36 2М УТТХ (изделие 15А18М), получившей в США название SS-18 «Satan» («Сатана»), ракет носителей «Энергия» и «Циклон», орбитальных модулей «Квант», «Квант-2», «Кристалл», «Природа», «Спектр», более 150 спутников серии «Космос» и др. объектов. В ОКБ-692 сформировалась школа динамиков. В ней была создана экспериментальная база и теоретическая основа для проектирования и решения проблем стабилизации ракетно-космической техники с полостями, заполненными жидким наполнителем. Методика получения достоверных характеристик динамической схемы объекта была принята в головных организациях (КБ «Южное», НПОМаш, КБ «Салют», ЦНИИМаш, ЦАГИ) [128].

Первые работы, проведенные украинскими специалистами с привлечением ученых из Москвы, показали, что ракетно-космическая техника нуждается в более основательных подходах при изучении колебаний. Поэтому в начале 1960-х гг. к выполнению задач, связанных с вибрациями ракет, были привлечены ведущие институты АН УССР [128].

В январе 1959 г. – декабре 1960 г. для ОКБ-586 проводились теоретические и экспериментальные исследования прочности ракеты средней дальности Р-14 (8К65) и межконтинентальной баллистической ракеты (МБР) Р-16 (8К64), разработанных в КБ «Южное». Руководил темой академик АН УССР Г. Н. Савин [197, л. 126].

В план научно-исследовательских работ на 1960 г. по проблеме «Научные основы прочности и пластичности» по постановлению Президиума АН УССР от 19 апреля 1960 г., протокол № 26-I, § 341 была включена тема: «Разработка методов расчета переходных процессов в несущих элементах баллистической ракеты». Сроки выполнения: январь 1960 г. – январь 1963 г., руководитель – д.т.н. А. Н. Голубенцев. Целью работы было определение упругих сил, развиваемых в несущих элементах ракеты и выбор оптимальных параметров переходного процесса в целях снижения действующих усилий и веса ракеты [197, л. 112]. В рамках этой темы разрабатывались методы расчета переходных колебательных процессов, не требующих составления и решения частотного уравнения. В частности, рассматривался расчет переходного процесса МБР при отсечке двигателей и разделении ступеней. Проводились также экспериментальные исследования динамики переходных процессов МБР и экспериментальные исследования колебаний систем с упругими связями из пластических материалов, применительно к конструкциям МБР.

Выполнялась также работа и по проблеме «Теория колебаний и устойчивость оболочек» (сроки выполнения – январь 1960 г. – декабрь 1962 г., руководитель д.ф-м.н. Н. А. Кильчевский). Цель работы – исследование в линейной и нелинейной постановке теории колебаний статической и динамической устойчивости тонких упругих оболочек. С этой целью разрабатывалась общая линейная и нелинейная теория оболочек, в частности, были составлены эластостатические и эластодинамические уравнения однородных и слоистых с начальными напряжениями оболочек. Были исследованы продольные нестационарные колебания систем гладких цилиндрических и конических оболочек, составляющих корпус изделий 8К64 (Р-16) и 8К65 (Р-14). Исследовалось также влияние подкреплений на динамические свойства ракет [197, л. 115].

К ракетно-космической тематике были подключены и сотрудники Днепропетровского филиала Института механики АН УССР. Так д.т.н. В. А. Лазарян занимался вопросами транспортировки ракет в поездах к месту старта. С января 1960 г. по январь 1962 г. по заказу ОКБ-586 и постановлению Государственного комитета Совета Министров СССР по оборонной технике под его руководством выполнялась тема «Исследование параметров собственных колебаний ракеты при различных степенях заполненности баков и разработка метода моделирования транспортировочных испытаний в лаборатории». Целью работы было изучение основных динамических характеристик ракеты и замена транспортировочных испытаний в натуре (в поездах) испытаниями ракет в лаборатории [197, л. 127]. В. А. Лазарян исследовал собственные частоты продольных колебаний изделий 8К63 (Р-12М), 8К64 (Р-16) и 8К65 (Р-14) [2, с. 306].

Колебаниями ракет занимался также профессор Днепропетровского университета Игорь Константинович Косько (1918–1988). Его докторская диссертация [108] посвящена динамической прочности боевых баллистических ракет при продольных колебаниях. О достижениях И. К. Косько и его учеников подробно рассказано в статье [214].

В работах по ракетно-космической тематике участвовал также Институт машиноведения и автоматики АН УССР (г. Львов). Там выполнялась работа «Разработка методов динамического моделирования межконтинентальных баллистических ракет». Сроки выполнения – январь 1960 г. – декабрь 1962 г., руководитель д.ф-м.н. М. Я. Леонов, ответственный исполнитель с.н.с. О. Н. Романив. В работу входило:

а) составление основных уравнений совместных продольных и изгибных колебаний ракеты;

б) уточнение постановки задачи о колебаниях ракеты на моделях (совместно с отделом моделирования Института механики АН УССР);

в) изучение возможности создания простейших электрических моделей продольно-поперечных колебаний ракет [197, л. 131].

С задачами колебаний ракет и ракетных двигателей связана также деятельность видного харьковского ученого профессора Василия Евдокимовича Бреславского (1920–1997). В 1949 г. он впервые в мире нашел аналитическое решение задачи о свободных изгибных колебаниях цилиндрических оболочек в общей математической постановке [143].

С проблемами колебаний ракет связана и Днепропетровская школа нелинейной динамики, возникшая в 1960-е годы. Ее основателем и научным лидером является Леонид Исаакович Маневич. Некоторые классы нелинейных систем допускают точные периодические решения – нормальные колебания. В школе, основанной Л. И. Маневичем, развивается разработанный Р. Розенбергом метод нелинейных нормальных форм колебаний [270]. Основным направлением стало получение аналитических решений в нелинейной теории колебаний, основанное на применении асимптотических методов. В 1976 г. Л. И. Маневич переехал в Москву, а метод нелинейных нормальных форм для существенно нелинейных систем получил дальнейшее развитие в работах его учеников и последователей [266]. Практическое приложение работы днепропетровских ученых находили в задачах динамики и управления полетом ракет и космических летательных аппаратов, их динамики и прочности и других задачах, возникавших на Южном машиностроительном заводе и в КБ «Южное». С распадом СССР и кризисом ракетно-космической отрасли Украины многие видные представители школы Маневича покинули Днепропетровск, часть из них работает за рубежом, а профессор Ю. В. Михлин в 1995 г. перешел на работу в Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (НТУ «ХПИ»). С его приходом там также стало развиваться аналитическое направление нелинейной теории колебаний. В коллективной монографии [3, с. 166–190, 228–246] Ю. В. Михлин и К. В. Аврамов дают анализ достижений харьковских ученых в этой области.

В дальнейшем расчетами колебаний ракет занимались в Днепропетровском университете, ОКБ-586, ОКБ-692, Институте проблем машиностроения (г. Харьков) и в НТУ «ХПИ». Деятельность ученых этих организаций в области колебаний ракетно-космической техники представляет большой интерес для специалистов в области истории механики и ракетостроения и нуждается в более подробном исследовании.

ГЛАВА 5

Новые разделы теории механических колебаний

Развитие техники создало новые проблемы, связанные с вибрациями. В частности, при расчетах колебаний потребовалось учитывать имеющиеся в системе нелинейности, рассеяние энергии в материале, рассматривать переходные режимы. Именно в решение этих проблем теории колебаний украинские ученые внесли наибольший вклад.

5.1. Зарождение нелинейной механики

Основание нового направления в науке – нелинейной механики и киевской научной школы относится к концу 1920-х гг., когда в составе Института строительной механики была организована кафедра математической физики, которую возглавил академик Н. М. Крылов.

Теория колебаний возникла, прежде всего, как теория малых – линейных колебаний. В первое время линейная теория колебаний вполне удовлетворяла запросам астрономии, физики и техники, и интересы ученых были сосредоточены только на исследовании линейных или линеаризованных моделей. Однако колебательные процессы, наблюдаемые в механике, физике, астрономии и др., по существу являются нелинейными и только в первом приближении, и то не всегда, описываются линейными дифференциальными уравнениями. Нелинейные колебательные процессы значительно сложнее линейных, что обусловлено самой их природой. Учение о нелинейных колебаниях зародилось в XVIII столетии и впоследствии получило название нелинейной механики. Развитие теории нелинейных колебаний первое время стимулировалось в основном потребностями астрономии. Одним из наиболее распространенных методов исследования нелинейных задач, которым пользовались астрономы, было разложение решения в ряд по степеням малого параметра [123, с. 298–299].

Мощный толчок к изучению нелинейных процессов дало развитие электротехники, акустики и, особенно, радиотехники. В начале XX века в этих дисциплинах выделился ряд задач, для которых аппарат теории линейных колебаний оказался недостаточным, а то и вовсе неприменимым вследствие специфических явлений, присущих нелинейным колебаниям. В связи с возникновением быстроходных силовых и исполнительных агрегатов механика также выдвинула перед теорией колебаний ряд новых задач. Важное место в теории нелинейных колебаний заняли уравнения с малым параметром вида (3.20), а основными методами для их решения стали асимптотические методы, основанные на разложении решения в ряд по степеням малого параметра. Эти методы стали важнейшим аппаратом для решения задач механики, физики и техники [123].

Математический аппарат, пригодный для решения нелинейных уравнений теории колебаний, существовал еще с конца XIX в., в частности, метод разложения в ряд по степеням малого параметра и метод теории возмущений. Его основы заложены еще в трудах Эйлера и развиты в работах Пуассона, Остроградского и Рэлея. Этот аппарат мог быть применен к нелинейным системам, описываемым дифференциальными уравнениями с малым параметром вида (3.20).

Асимптотические методы оказались весьма эффективными в задачах астрономии. Затем они были перенесены в квантовую механику [93, с. 266]. Однако эти методы были разработаны для консервативных систем, описываемых уравнениями в канонической форме, и без соответствующих изменений их нельзя было применить к реальным задачам механики. Кроме аппарата теории возмущений существовала еще локальная теория периодических решений Анри Пуанкаре и теория линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами А. М. Ляпунова. Однако до 30-х гг. XX века эти методы не применялись для исследования нелинейных колебаний, и даже не была раскрыта их связь с проблемами таких колебаний.

Теория нелинейных колебаний начала широко развиваться с конца 1920-х гг. С самого начала руководящую роль в развитии нелинейной механики играли советские ученые [166, с. III введения]. Особенно выдающимися стали две школы: Московско-горьковская, связанная с именами академиков Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси и А. А. Андронова и Киевская – академиков Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Л. И. Мандельштам первым четко сформулировал назревшую в радиотехнике необходимость нового теоретического подхода к колебаниям нелинейных систем, необходимость выработки «нелинейного языка и нелинейного колебательного мышления». Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси первыми в Советском Союзе стали заниматься асимптотическими методами. Их статья [153] стала фундаментальной не только для нелинейных задач технической физики, но и для задач механики. Дальнейшее развитие теория нелинейных колебаний получила в трудах А. А. Андронова, А. А. Витта и С. Э. Хайкина. Под влиянием академика Л. И. Мандельштама А. А. Андронов, бывший тогда его аспирантом, нашел в трудах Пуанкаре и Ляпунова ключ к решению проблем нелинейных колебаний. Л. И. Мандельштам в предисловии, написанном в 1935 г. к их фундаментальному труду «Теория колебаний»* [11, предисловие, с. 11] отметил, что существовавшие ранее решения отдельных задач не имели достаточного математического обоснования.

Рассматривая значение функционала S на совокупности главных свободных поперечных колебаний одного и того же периода, различающихся только формой колебания, мы получим для вариации S

$$\delta S = \int_0^l \left[\mu\lambda^2\varphi - \left(EJ\varphi''\right)'' \right] \delta\varphi dz + \left\{ \left(EJ\varphi''\right)' \delta\varphi - EJ\varphi''\delta\varphi' \right\}_0^l .$$

Таким образом, асимптотические методы и качественная теория дифференциальных уравнений, разработанная в трудах Пуанкаре и Ляпунова, стали основой развития нелинейной теории колебаний. Заслуга школы Мандельштама – Андронова состоит в том, что они первыми аргументировали необходимость рассмотрения колебательных явлений в нелинейной постановке и установили принципиальные

* В первом издании «Теории колебаний» фамилия А. А. Витта не упоминается, так как он в 1937 году был арестован по ложному обвинению и расстрелян

отличия между линейными и нелинейными системами. Их работы послужили толчком для создания математического аппарата теории нелинейных колебаний. В нее входят метод малого параметра, теория устойчивости движения, асимптотические методы, качественная теория дифференциальных уравнений, метод точечных преобразований и множество численных методов решения уравнений движения, записанных как в дифференциальной, так и в интегральной форме.

Развитие теории нелинейных колебаний на основе знаменитых работ А. М. Ляпунова и А. Пуанкаре является наиболее важным и фундаментальным достижением Московской школы. Ее представители показали, насколько хорошо вопросы нелинейных колебаний исследуются с помощью методов, разработанных, правда, для иных целей, этими великими учеными. В их знаменитых работах заложены основы математического аппарата, адекватного всему циклу проблем нелинейных колебаний. В частности, метод малого параметра получил свое развитие непосредственно из теории малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [152; 201].

В конце 1920-х гг. задачи радиотехники, а с 1940-х теории автоматического регулирования стимулировали развитие теории нелинейных колебаний. Методы, развитые Мандельштамом, Папалекси, Андроновым и их учениками для задач радиотехники и теории автоматического регулирования, были с успехом перенесены в теорию механических колебаний. Полученные геометрические представления и метод приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью разложения по степеням малого параметра оказались весьма мощным аппаратом не только для решения ряда нелинейных задач, но и для предсказания новых явлений. Исходя из существования «периодических решений второго рода Пуанкаре» с периодом, кратным периоду действующей силы, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси сделали ценные выводы и открыли ряд ранее неизвестных явлений, как, например, резонанс второго рода, синхронизация на обертоне, автопараметрические и дробные резонансы, асинхронное возбуждение и т.д. [168].

Асимптотический подход получил развитие в методе усреднения, который первоначально возник в небесной механике, а позже применялся для изучения движения космических аппаратов. В основе этого метода лежит замена нелинейных членов дифференциальных уравнений сглаженными, усредненными, не содержащими в явном виде времени и быстро изменяющихся параметров системы. В теории нелинейных колебаний метод усреднения долгое время не применялся. Существенную роль в его развитие сыграло появление электронных ламп, открывшее новые возможности для генерации и приема электромагнитных колебаний. Именно для решения дифференциального уравнения лампового генератора голландский физик и инженер Балтазар Ван-дер-Поль (1889–1959) впервые применил метод усреднения. В 1926 г. он вывел уравнение

$$\ddot{q}+q=\varepsilon\left(1-q^2\right)\dot{q} \tag{5.1}$$

и предложил для его решения метод медленно меняющихся амплитуд [26, с. 89–90]. Позже он распространил этот метод на более широкий класс задач со слабой нелинейностью. Согласно методу Ван-дер-Поля решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q}+k^2q+\varepsilon f\left(q,\dot{q}\right)=0 \tag{5.2}$$

берется в виде

$$q=A\cos\left(kt-\varphi\right), \tag{5.3}$$

где A и φ медленно меняющиеся функции времени [186, с. 55]. Если подставить теперь решение (5.3) в уравнение (5.2), то получится уравнение, содержащее две неизвестных функции A и φ. При этом обобщенная скорость определяется по формуле

$$\dot{q}=-Ak\sin\left(kt+\varphi\right), \tag{5.4}$$

как будто величины A и φ являются постоянными. Подставляя (5.3) и (5.4) в уравнение (5.2), получим уравнение первого порядка для определения $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned}\dot{A}&=-\frac{1}{k}f\left(q,\dot{q}\right)\sin\left(kt-\varphi\right);\\ \dot{\varphi}&=\frac{1}{Ak}f\left(q,\dot{q}\right)\cos\left(kt-\varphi\right),\end{aligned} \tag{5.5}$$

где q и $\dot{q}$ определяются по формулам (5.3) и (5.4). Упрощение дальнейшего решения заключается в том, что производные $\dot{A}$ и $\dot{\varphi}$, хотя они и являются сложными нелинейными функциями времени (5.5), принимаются постоянными в течение любого одного цикла.

Метод Ван-дер-Поля является адекватным методом исследования нелинейных систем, учитывает их специфику, поскольку упрощенные уравнения являются также нелинейными. Однако следует отметить, что, как и в небесной механике, так и у Ван-дер-Поля, строгого обоснования метода предложено не было. Проблему о математическом обосновании метода Ван-дер-Поля и о пределах его применимости для частных случаев решили П. Фату (1928) и Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси (1934) [93, с. 267–268]. Подробно этот вопрос изложен в монографии [11, с. 663–675]. Используя методы Ляпунова – Пуанкаре, Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронов и А. А. Витт не только дали математическое обоснование метода Ван-дер-Поля и указали пределы его применимости, но и решили ряд новых актуальных проблем, как, например, спорный вопрос о существовании порога для амплитуды внешней Э.Д.С. при синхронизации, вопрос о стационарных периодических колебаниях в системе связанных контуров и др. [167].

Однако и метод Ван-дер-Поля, и методы Ляпунова – Пуанкаре, не удовлетворяли требованиям практики в отношении простоты и прозрачности расчетных схем. Глубоко вскрывая качественную сторону явлений, они для инженерных приложений были слишком сложны [93, с. 269]. В связи с этим в начале 1930-х гг. оставался открытым вопрос о создании математически обоснованной теории, пригодной для изучения как периодических, так и непериодических колебательных процессов в нелинейных системах. Для практического применения этой теории расчетные схемы должны были быть простыми и наглядными.

Эта проблема была успешно решена киевскими учеными Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Именно с деятельностью школы Крылова – Боголюбова связано дальнейшее развитие асимптотических методов. Начиная с 1927 г., Н. М. Крылов занимался математическими проблемами асимптотических методов. Его ученик Н. Н. Боголюбов развил полученные результаты и предложил общую процедуру усреднения для системы неавтономных дифференциальных уравнений. В своих работах он показал, что с помощью усреднения можно получить сколь угодно точные приближения к искомому решению и исчерпывающе изложил сущность общего принципа усреднения. Подробно с историей развития метода усреднения в теории нелинейных колебаний можно ознакомиться в главе, написанной В. М. Волосовым для монографии [158, с. 115–135].

В 1932 г. Крылов и Боголюбов разработали асимптотический метод, который впоследствии дал начало большому новому направлению в теории нелинейных дифференциальных уравнений. Можно считать, что киевские ученые создали новое научное направление – нелинейную механику, выполнив цикл работ, посвященных методам приближенного интегрирования дифференциальных уравнений и теории почти периодических функций.

Школа Крылова – Боголюбова сделала исключительно много для развития нелинейной механики. Были созданы новые асимптотические методы нелинейной механики – теория, аналогичная теории возмущения. Но, в отличие от теории возмущения, разработанной для консервативных систем, методы нелинейной механики Крылова – Боголюбова применимы к самым общим, неконсервативных системам. Основоположники нелинейной механики применили метод теории возмущений для исследования колебаний таких колебательных процессов, для которых соответствующие дифференциальные уравнения содержат малый параметр и при том так, что при его нулевом значении эти уравнения точно интегрируются, хотя они могут быть при этом и нелинейными. Эти методы, базируясь на строгом математическом обосновании, позволяют не только первые, но и высшие приближения и применимы для изучения, как периодических, так и квазипериодических процессов [27; 114]. Следует особо подчеркнуть простоту применения этих методов к конкретным расчетам. Асимптотические методы нелинейной механики были сразу же применены их авторами к решению ряда важных задач. Были получены формулы второго приближения для определения частоты стационарных колебаний в электронных генераторах, внутренние резонансы в системах со многими степенями свободы, исследованы системы с распределенными параметрами, изучены квазипериодические режимы, возбуждаемые в электронном генераторе под действием внешней периодической силы и т.д.

В 1930-е г.г. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов занимались внедрением теории нелинейных колебаний в практику. Они убедительно показали, как идею асимптотических методов можно использовать при построении приближенных решений для колебательных систем, содержащих малый параметр, в том числе и для систем с несколькими степенями свободы. Однако для систем большой размерности возникают серьезные трудности, так как порядок рассматриваемой системы уравнений пропорционален числу степеней свободы системы. Для их преодоления Н. Н. Боголюбов в 1949 г. предложил одночастотный метод, с помощью которого можно строить асимптотические разложения решения нелинейных систем со многими степенями свободы [29]. Он основан на том факте, что под действием внешних возмущающих сил при наличии трения в системе устанавливаются колебания преимущественно одной частоты, либо основного тона, либо другой, но определенной частоты. Это позволяет рассматривать одночастотный режим, при котором все точки системы совершают колебания с одинаковой частотой. С математической точки зрения одночастотный метод заключается в том, что ищется не общее решение системы уравнений, а частное, которое зависит только от двух произвольных постоянных и отвечает определенному колебательному процессу. По сути, все сводится к исследованию некоторой эквивалентной системы с одной степенью свободы.

Наряду с большим теоретическим значением методы Крылова – Боголюбова имели важное практическое применение. Так в 1940 г. ими был разработан новый эффективный способ построения резонансных кривых для нелинейных крутильных колебаний. Этот метод они успешно применяли в годы войны для исследования вибраций авиамоторов. Но, наряду с решением задач оборонного значения, Н. Н. Боголюбов, находясь в эвакуации в Уфе, вел исследования в области нелинейной механики. Именно там он разработал метод интегральных многообразий и метод усреднения, которые затем были изложены в его монографии «О некоторых статистических методах в математической физике» (1945). В 1947 г. за исследования в области нелинейной механики и статистической физики Н. Н. Боголюбову была присуждена Сталинская премия.

Значительный прогресс в фундаментальных и прикладных вопросах теории асимптотических методов был сделан учеником Н. Н. Боголюбова Юрием Алексеевичем Митропольским (1917–2008), который с помощью метода последовательных замен построил общее решение системы нелинейных уравнений и изучил его поведение в окрестности квазипериодического решения. Он разрабатывал метод усреднения для исследования колебательных систем с медленно меняющимися параметрами, предложил способ нахождения приближенного решения задачи о колебаниях системы со многими степенями свободы. В монографии [27] было дано систематическое изложение асимптотических методов.

В кандидатской диссертации Ю. А. Митропольского [166], выполненной под руководством Н. Н. Боголюбова и защищенной в 1947 г., рассматриваются резонансные явления в нелинейных системах с переменными частотами. Данная работа посвящена разработке методов приближенного решения нелинейных уравнений с медленно меняющимися параметрами и исследованию с помощью этих методов резонансных явлений. В ней на основе методов нелинейной механики Крылова – Боголюбова была изложена методика формальных решений для нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами.

Позже Ю. А. Митропольский развил это направление в своей докторской диссертации [165; 167; 172] и последующих работах [169; 170], посвященных разработке и математическому обоснованию методов решения нелинейных уравнений с медленно меняющимися параметрами и исследованию с помощью этих методов процессов, происходящих в нелинейных механических системах при прохождении через резонанс.

В работах Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского заложены также основы метода интегральных многообразий, который связан с практически важной задачей – исследованием одночастотных колебательных процессов в системах со многими, в том числе и с бесконечным числом степеней свободы. Этот метод позволил изучать поведение решений различных классов нелинейных систем дифференциальных уравнений с малым параметром [28]. Митропольский доказал ряд теорем о существовании интегральных многообразий и их свойствах для нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Им также получена теорема, обосновывающая применение одночастотного метода для исследования системы с распределенными параметрами [92, с. 376–377].

Асимптотические методы нелинейной механики оказались исключительно общими и гибкими. Позже Н. Н. Боголюбову удалось использовать их далеко за пределами нелинейной механики и получить ряд ценных результатов в области статистической физики и теории кинетических уравнений [166, с. V введения].

В 40-е гг. прошлого века началось широкое применение асимптотических методов для расчета нелинейных колебаний, получивших дальнейшее развитие в трудах многочисленных учеников Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского. Среди них можно отметить В. М. Волосова (уравнения с медленно меняющимися параметрами, метод усреднения), Б. И. Мосеенкова (колебания систем с распределенными параметрами, исследования колебаний вращающегося стержня двоякой жесткости), О. Б. Лыкову (одночастотные колебания в системах с несколькими степенями свободы). Ссылки на их работы можно найти в монографии [170, с. 425–431].

Из киевской научной школы по нелинейной механике вышло много выдающихся ученых. Среди них В. О. Кононенко, применивший идеи асимптотических методов для исследования колебательных систем с источниками энергии ограниченной мощности [104–106]. Виктор Олимпанович решил также ряд технических задач по автоколебаниям. С помощью асимптотических процедур совместно с Р. Ф. Ганиевым он изучал нелинейную динамику сферического движения [44; 45]. Необходимо отметить вклад в прикладные аспекты асимптотических методов академика НАН Украины В. Д. Кубенко, который использовал для исследования поперечных нелинейных колебаний цилиндрических оболочек метод Крылова – Боголюбова [115; 116].

Одним из первых эффективных применений нелинейной механики при расчетах конструкций является расчет драглайна*, выполненный в 1953 г. С. А. Казаком. В своей работе он рассматривал колебания ковша как большие колебания маятника переменной длины. При медленном движении груза эта задача описывается дифференциальным уравнением с медленно меняющимися коэффициентами.

$$\frac{d}{dt}\left[m(\tau)\frac{dq}{dt}\right]+c(\tau)q=\varepsilon F\left(\tau,\theta,q,\frac{dq}{dt}\right), \tag{5.6}$$

* драглайн – разновидность экскаватора

где θ – фаза возмущающей силы, $\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau)$ – мгновенная частота. При этом в уравнении (5.6) $m(\tau), c(\tau)$ и $\nu(\tau)$ являются функциями медленного времени $\tau = \varepsilon t$. Параметр ε $(0 < \varepsilon \ll 1)$ указывает на то, что система близка к линейной консервативной и коэффициенты уравнения (5.6) меняются медленно [93, с. 328].

Дальнейшее развитие теория нелинейных колебаний получила в трудах академика АН УССР А. М. Самойленко, который обосновал методы асимптотического интегрирования разрывных и импульсных систем. Следует отметить его работы по математической теории квазипериодических колебаний [212]. Интересны также работы А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка по нелинейным динамическим системам с импульсным воздействием [210]. Отметим также работы А. А. Мартынюка, связанные с развитием теории векторных функций Ляпунова [154].

Теория нелинейных колебаний и асимптотические методы быстро развивающийся раздел механики. Чрезвычайно актуальным является вопрос исследования нелинейных динамических систем высокой размерности. Его решение позволит исследовать реальные механические системы, которые могут являться конечноэлементной дискретизацией инженерных систем. Особо важным является вопрос исследования поведения нелинейных динамических систем под действием случайных нагрузок и систем со случайными параметрами. Асимптотические методы позволяют проводить аналитические исследования и сохраняют свою актуальность и при широком применении современной вычислительной техники.

В настоящее время нелинейная динамика выросла в развитую ветвь прикладных наук, изучающую динамические процессы в системах различной физической природы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями.

5.2. Колебания с учетом рассеяния энергии в материале

В 20 – 30-е гг. XX столетия основным средством борьбы с вибрациями была отстройка от резонанса. Однако с развитием техники избавиться от резонансов в рабочем диапазоне стало невозможно. Особенно это проявлялось в ДВС и турбомашинах, имеющих достаточно плотный спектр собственных частот. В отличие от расчета свободных колебаний, заключающегося в определении собственных частот и форм колебаний и вынужденных колебаний вдали от резонанса, которые производятся без учета трения, для рассмотрения колебаний вблизи резонанса необходимо знать силы сопротивления. Причины рассеяния энергии при колебаниях тела могут быть внешние и внутренние. Внешние – сопротивление среды, в которой колеблются тела (воздух или жидкость), трение между поверхностями скольжения в сочленениях отдельных элементов конструкции, а также в опорах. К внутренним причинам относится рассеяние энергии в самом материале за счет его несовершенной упругости.

Доля этих видов демпфирования неодинакова и зависит от многих факторов: особенностей колебательной системы, материала, из которого изготовлены детали, от параметров внешней среды и ее температуры, а также от формы колебаний.

Сопротивление среды, особенно при небольших скоростях движения, хорошо моделируется так называемым ***вязким трением***, при котором принимается, что силы сопротивления пропорциональны скорости. При бóльших скоростях эта зависимость принимается квадратичной. При моделировании трения между поверхностями скольжения применяется закон Кулона – Морэна, по которому сила трения принимается пропорциональной нормальной составляющей давления, действующего между поверхностями. При этом она не зависит от скорости скольжения. В случае наличия смазочного слоя, например, когда между скользящими поверхностями существует масляная пленка, наоборот, предполагается, что сила трения не зависит от давления и пропорциональна скорости скольжения. Такая характеристика справедлива также для масляного демпфера. Действительная характеристика трения занимает некоторое промежуточное положение между этими идеальными случаями.

Среди сопротивлений, возникающих при колебаниях упругих систем, внутреннее неупругое сопротивление имеет особое значение. Опытными исследованиями было установлено, что упругие материалы не следуют в точности закону Гука даже при деформациях, не выходящих за пределы упругости. Этим обусловлены внутренние потери энергии при колебаниях. Первым на наличие внутреннего трения в материале указал Ш. Кулон, обнаруживший его при проведении опытов с крутильными весами. А первым, кто занялся изучением внутреннего трения, был У. Томсон (1865 г.) [67, с. 482].

О важности внутреннего трения в материале говорят исследования многих ученых, проведенные в начале XX века. Широко поставленные опыты Ж. Гюи над внутренними потерями в материале при крутильных колебаниях металлических проволок показали ничтожную роль трения воздуха по сравнению с потерями в самом металле. Ф. Роветт на основании исследования затухания колебаний в ряде машин установил, что на долю внутреннего рассеяния энергии в материале приходится не менее двух третей всех потерь при колебаниях. Гейгер, исследуя рассеяние энергии при колебаниях в моторах, относит к внутреннему рассеянию в металле до 64 % всех потерь [205, с. 1].

Несмотря на сложный характер внутреннего рассеяния энергии в материале В. Фойгт, исходя из аналогии сил внутреннего трения упругих тел с трением внутри жидкости, полагает, что силы внутреннего трения пропорциональны первой степени скорости колебаний и представляет его в виде вязкого трения. При этом он руководствовался, в первую очередь, удобством интегрирования дифференциальных уравнений колебательного движения, а не близостью данного закона к действительному. Дифференциальное уравнение свободных колебаний линейной системы с одной степенью свободы и вязким трением выглядит в этом случае так

$$m\ddot{q} + \beta\dot{q} + cq = 0\,, \tag{5.7}$$

где q – обобщенная координата, m, β и c – приведенные коэффициенты соответственно инерции, демпфирования (вязкого трения) и жесткости. После деления на обобщенную массу получим приведенное уравнение

$$\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0\,. \tag{5.8}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q = Ae^{-nt}\sin\,\left(k_1 t + \varepsilon\right)\,, \tag{5.9}$$

где Ae^{-nt} – амплитуда затухающих колебаний, k_1 – частота свободных колебаний с сопротивлением $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, $k = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ – собственная частота системы без учета сопротивления. Из начальных условий q_0 и $\dot{q}_0$ запишем значение начальной амплитуды

$$A_0 = \sqrt{\frac{\left(\dot{q}_0 + nq_0\right)^2}{k^2 - n^2} + q_0^2} \quad . \tag{5.10}$$

В качестве безразмерной характеристики трения используют так называемый ***декремент**** ***колебаний***, т.е. отношение двух амплитуд колебаний через интервал времени, равный периоду, но чаще более удобную величину, равную логарифму этого отношения – ***логарифмический декремент колебаний***. В соответствии с видом решения (5.9) он равен

$$\delta = nT_1 = \frac{\beta}{2m} T_1 , \tag{5.11}$$

где $T_1 = \dfrac{2\pi}{k_1}$ – период затухающих колебаний. Нетрудно заметить, что δ не зависит от амплитуды колебаний, но зато изменяется пропорционально периоду. Так, в случае изменения массы при постоянном сопротивлении и жесткости, логарифмический декремент также будет меняться, что, вообще говоря, выглядит странно.

При исследовании установившихся гармонических колебаний применяется еще один подход, при котором демпфирование берется пропорционально скорости деформации, деленной на частоту колебаний [185]. В этом случае оно пропорционально амплитуде колебаний.

Обе эти гипотезы чрезвычайно удобны для использования, однако недостаточно обоснованы. В частности, трение, заданное в таком виде, не приведет к полному прекращению колебаний. Благодаря многочисленным исследованиям ряда ученых, особенно А. О. Фёппля и его учеников, было твердо установлено, что величина демпфирования не зависит от частоты в интервале от 0 до 40 Гц [185, с. 65]. Обширные исследования Ф. Роветта по вопросу о рассеянии энергии в материале при кручении круглых труб показывают, что в пределах изменения частоты от 0 до 4200 кол/мин расхождения в рассеянии

---

* слово декремент происходит от латинского *decrementum* – убавление. Однако раньше большинство авторов, тем не менее, использовали словосочетание декремент затухания, что, по сути, является тавтологией.

энергии не превышают 5 %, т.е. рассеяние почти не зависит от частоты (Rowett, Proc, Royal Soc. Ser. A, Vol. 89, 1913/1914 с. 528–543). Опыты проводились с тонкостенными трубками из мягкой стали, подвергавшимся знакопеременному скручиванию до значений, не превосходящих предела упругости.

Однако, благодаря своему удобству, оба указанных способа применялись и применяются сейчас многими исследователями. Внутреннее трение, пропорционально скорости задавали и основоположники прикладной теории колебаний А. Н. Крылов [110, с. 16–19] и С. П. Тимошенко [229, с. 28].

И. Ньютон в «Математических началах натуральной философии» предложил правило, позволяющее по затуханию колебаний маятника определить зависимость силы сопротивления движению от скорости. В 1935 г. академик А. Н. Крылов показал, что для свободных затухающих колебаний, описываемых дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + \operatorname{sign}\dot{x}\,\beta\left|\dot{x}\right|^{n} + cx = 0\,, \tag{5.12}$$

с помощью забытого к тому времени метода Ньютона можно получить выражение работы рассеяния за период колебаний. Крылов считал теорему Ньютона одной из основных теорем в учении о колебательном движении [110, с. 174–179].

В большинстве работ, посвященных вопросу рассеяния энергии в материале, в 1920 – 1930-е гг. рассматривалось рассеяние в случае крутильных колебаний, что обусловлено, в первую очередь, задачами крутильных колебаний ДВС, поскольку именно эти задачи в то время стояли на первом месте. Рассеяние энергии при изгибных колебаниях было освещено мало. Кроме того, опыты с изгибными колебаниями не всегда проводились в условиях, исключающих потери энергии в зажимах образца. Следует также отметить, что почти все исследования рассеяния энергии производились при незначительных напряжениях, в то время как практический интерес представляет как раз рассеяние энергии в системе с большой начальной амплитудой напряжения.

К концу 1930-х гг. большое практическое значение приобрели также задачи о колебаниях лопаток паровых турбин. Густота спектра возбуждающих сил и частот собственных колебаний лопаточного аппарата, многообразие форм колебательных процессов вынудило опытным путем определять потери энергии, необходимые для вибрационного расчета. Важным для турбостроения того времени вопросом стал учет затухания при вынужденных поперечных колебаниях стержней. Одной из первых работ в этом направлении стала статья А. П. Филиппова [239].

В 1940 г. в Институте строительной механики АН УССР молодыми сотрудниками, будущими академиками Г. С. Писаренко и А. Д. Коваленко в рамках комплексного решения проблем динамической прочности проводились исследования рассеяния в материалах турбинных лопаток отдельно и в их пакетах [86; 205].

Г. С. Писаренко выяснял зависимость логарифмического декремента колебаний в материале от величины нормальных напряжений в случае поперечных колебаний. Для этого была создана оригинальная экспериментальная установка, позволяющая более точно определять диссипативные свойства материалов [205, с. 6].

Однако для лопаток турбин, объединенных в пакеты, доминирующее значение при демпфировании имеют не внутренние потери, а трение в сочленениях. В связи с этим А. Д. Коваленко было проведено исследование демпфирования при вибрации пакетов лопаток паровых турбин [86]. Однако важнейшие для турбостроения исследования ученых Института строительной механики были прерваны войной. Подробно результаты этих исследований освещены в монографии [137, с. 180–186].

Г. С. Писаренко вернулся к проблеме рассеяния энергии в материале при циклических нагрузках только в 1945 г. При этом он обратился к более точным зависимостям внутреннего сопротивления. Как показали многочисленные исследования, действие этого сопротивления выражается в так называемых ***гистерезисных потерях*** энергии деформации, т.е. оно носит неупругий характер. В связи с этим была принята гипотеза зависимости рассеяния энергии в материале от величины напряжения. В соответствии с ней при составлении уравнения колебаний необходимо вводить в рассмотрение ***петлю гистерезиса***, ограниченную двумя пологими кривыми, соответствующими нагрузке и разгрузке. В местах сопряжения этих кривых наблюдается резкий излом петли, отчего ее форма не поддается описанию с помощью уравнения гладкой кривой. Тогда контур петли гистерезиса представляется двумя уравнениями, одно из которых относится к восходящей кривой, а другое к нисходящей. В местах же сопряжения ветвей должны удовлетворяться граничные условия. В соответствии с этим, колебания системы с рассеиванием энергии описывается не одним, а двумя уравнениями. Для большинства материалов, применяемых в машиностроении, ветви петли гистерезиса мало отклоняются от прямой, характеризующей закон Гука. Таким образом, задача о колебаниях с учетом рассеяния энергии в материале относится к разряду слабонелинейных. На рис. 5.1 представлена типичная характеристика зависимости напряжения от деформации (петля гистерезиса).

Аналитическое описание петли гистерезиса при одномерном наряженном состоянии впервые предложено академиком АН УССР Н. Н. Давиденковым в статье [67], опубликованной в 1938 г. Для симметричного цикла $(\varepsilon = 0)$ в предположении степенной зависимости модуля упругости от амплитуды деформации оно имеет вид

$$\vec{\overleftarrow{\sigma}}(\varepsilon) = E\left\{\varepsilon \mp \frac{v_n}{n}\left[\left(\varepsilon_0 \pm \varepsilon\right)^n - 2^{n-1}{\varepsilon_0}^n\right]\right\}.$$

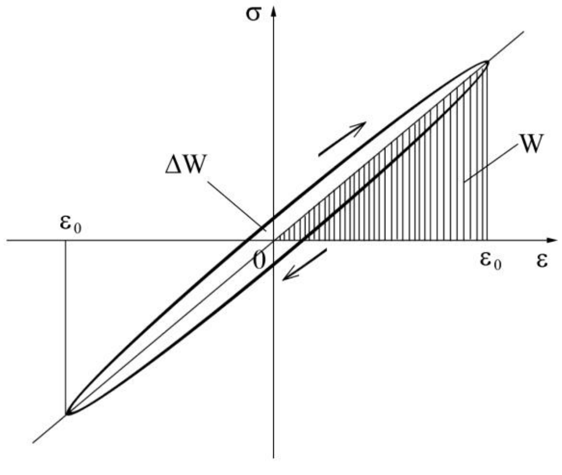

Рис. 5.1. Петля гистерезиса

Однако применение полученной зависимости для анализа вынужденных колебаний упиралось в отсутствие соответствующего расчетного аппарата. Кроме того, что зависимость сопротивления от деформации нелинейна, она еще представляется и разными функциями для процессов нагружения и разгрузки. В той же статье Давиденков высказал сомнение о возможности математического решения проблемы колебаний механических систем с учетом рассеяния энергии в материале [67]. Именно это заявление и привлекло внимание Г. С. Писаренко к аналитическому решению проблемы внутреннего сопротивления [192, с. 68]. Он обратился за консультацией к одному из основателей нелинейной механики – Н. Н. Боголюбову, и вместе с ним пришел к выводу о возможности решения этой проблемы асимптотическими методами, основанными на разложении по степеням малого параметра. Этот подход для решения задачи, относящейся к классу слабо нелинейных, оказался весьма эффективным. Существенным является и тот факт, что малый параметр в уравнении имеет определенный физический смысл. Проведенный анализ показал, что для получения необходимой точности при определении частоты и темпа затухания свободных колебаний, а также для определения амплитуд резонансных колебаний достаточно при решении задачи ограничиться первым приближением. Это обстоятельство облегчает практическое использование метода [200, с. 813].

Кроме теоретической части, работа Писаренко включала и экспериментальные исследования. Для этой цели Георгий Степанович создал ряд оригинальных виброустановок с остроумными принципами работы. Эти установки позволили провести исследования демпфирующих свойств материалов при «чистых» видах деформации и при различных температурных условиях [193, с. 220–235]. С их помощью были проведены эксперименты, подтвердившие правильность теоретических выводов. В результате Г. С. Писаренко были получены фундаментальные результаты по вопросу, необходимость разрешения которого давно назрела.

29 июня 1948 г. Г. С. Писаренко успешно защитил докторскую диссертацию на тему «Вынужденные колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале» [191]. Один из официальных оппонентов – Н. Н. Давиденков в своем отзыве отмечал: «Диссертант не ограничился решением задачи для простейшей системы с одной степенью свободы и однородным напряженным состоянием…, но и

подробно разработал технически более важный и много более сложный случай изгиба консольного бруса и даже распространил этот случай на брусья переменного сечения, что имеет еще большее практическое значение» [192, с. 74–75]. В 1955 г. АН УССР выпустила монографию Г. С. Писаренко «Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале» [193]. Таким образом, им впервые были созданы теоретические основы для исследования колебаний упругих тел с учетом несовершенной упругости материала [200, с. 812]. Работа Г. С. Писаренко заложила основы нового направления в теории колебаний, в результате развития которого образовалась научная школа, основанная Георгием Степановичем.

Эпоха НТР поставила перед теорией колебаний целый ряд новых проблем. Появился обширный класс машин, при работе которых из-за плотных спектров собственных частот и частот возбуждения избавиться от резонансов в их рабочем диапазоне стало невозможно. Стремление прогнозировать динамическое поведение машины на этапе ее проектирования потребовало более точного учета демпфирования при расчетах колебаний.

В 1966 г. по инициативе Г. С. Писаренко был создан Институт проблем прочности (ИПП) АН УССР, который ныне носит его имя [200, с. 11]. В нем под руководством Георгия Степановича был создан отдел колебаний неконсервативных механических систем, основным направлением которого стало исследование влияния рассеяния энергии в материале на колебания механических систем с учетом воздействия других факторов, таких как температура, ударные нагрузки, различные конструктивные, технологические и эксплуатационные особенности.

Исследования Писаренко и его учеников помогли создать мощные высоконадежные энергетические блоки (котел – турбина – генератор – трансформатор) с давлением пара 240 атм. и температурой 540 – 560 С°, которые нашли применение на крупных электростанциях. Важнейшим направлением деятельности отдела стало также изучение влияния температурного фактора на демпфирующую способность конструкционных материалов, что очень важно как для районов крайнего севера с низкой климатической температурой, так и для деталей, эксплуатирующихся в условиях очень высоких температур.

Ученики и последователи Г. С. Писаренко в дальнейшем развивали направление, открытое Георгием Степановичем, широко используя асимптотический подход при расчетах колебаний всевозможных упругих систем при разнообразном описании неупругого сопротивления материала и разных видах деформирования [200, с. 810]. Результаты исследований были опубликованы Г. С. Писаренко и его учениками в десяти монографиях, одна из которых была переведена на английский язык и издана в США в 1962 г. [200, с. 13]. Представители школы в течение 30 лет защитили в данном направлении шесть докторских и свыше 50 кандидатских диссертаций [192, с. 74]. Подробно деятельность этой школы освещена в разделе 8 «Колебания неконсервативных механических систем» коллективной монографии, выпущенной в ИПП и посвященной 95-летию со дня рождения основателя школы и института – Г. С. Писаренко [200, с. 809–916]. В ней обобщены исследования, выполненные в ИПП НАН Украины, с момента его основания и приведена обширная библиография, посвященная этой теме.

5.3. Теория нестационарных колебаний

Среди задач о вынужденных колебаниях особое место занимают нестационарные колебания. С ростом скорости вращения энергетических машин – двигателей внутреннего сгорания, паровых и газовых турбин и одновременным снижением их веса, эксплуатационные обороты во многих случаях стали превышать резонансные или критические значения колебаний машин в целом или их отдельных деталей, таких как рабочие лопатки, диски, роторы, коленчатые валы и др. Стремление облегчить конструкцию привело развитие турбомашин к применению в паровых и газовых турбинах так называемых «гибких» роторов, для которых первые критические скорости оказываются ниже рабочих оборотов. В этом случае во время пуска (разгон) или остановки (выбег) машина проходит резонанс. Амплитуды колебаний при этом меньше, чем на установившемся резонансном режиме, так как они не успевают развиться. Следовательно, простой расчет вынужденных резонансных колебаний даст завышенное значение амплитуд. Поэтому актуальной задачей для таких систем стало изучение нестационарных колебаний, т.е. переходного процесса. Учет особенностей нестационарных колебаний в динамических расчетах способствует более обоснованному выбору запасов прочности и служит дополнительным резервом снижения веса конструкции.

С необходимостью исследования нестационарных колебаний мы встречаемся в задачах о прохождении через резонанс не только двигателей и турбомашин, но и центрифуг, насосов, различных гироскопических систем, в задачах исследования систем регулирования, при изучении колебаний в системах с переменными параметрами. Нестационарные колебательные процессы возникают также в машинах и механизмах при аэродинамических воздействиях среды, движущейся с переменной скоростью, при действии ударных, пульсирующих или подвижных нагрузок, например, в задачах, связанных с колебаниями мостов и подъемных кранов. Нестационарные процессы имеют большое значение также и для решения практических задач электротехники, радиотехники и акустики.

Развитие машиностроения в послевоенный период предъявило бóльшие требования к достоверности расчетов на колебания элементов конструкций. В этой связи учет особенностей нестационарных колебаний в динамических расчетах способствует более обоснованному выбору запасов прочности и служит дополнительным резервом снижения веса конструкции, поскольку, если система совершает нестационарные переходы через резонанс или критические состояния, амплитуды колебаний существенно ниже установившихся резонансных.

Дифференциальные уравнения, описывающие переходные режимы, принципиальных отличий от уравнений установившихся движений не имеют. Однако сам процесс решения этих уравнений в корне отличается от расчета вынужденных установившихся колебаний и требует большого объема вычислений. В связи с этим до появления вычислительной техники разрабатывались различные приемы решения данных уравнений. Наибольший практический интерес среди всех переходных процессов представляет прохождение через резонанс, которое зачастую определяет работоспособность конструкции.

Исследование нестационарных процессов в линейной системе с одной степенью свободы в предположении, что источник энергии обладает неограниченной мощностью, сводится к интегрированию дифференциального уравнения

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=P(t)\cos\theta(t), \tag{5.13}$$

где $q(t)$ – обобщенная координата, $P(t)$ – амплитуда возмущающей обобщенной силы, отнесенной к единичной обобщенной массе, n – коэффициент, зависящий от демпфирования, k – собственная частота колебаний системы, а частота внешней силы $\nu=\dfrac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$ является функцией времени.

Первыми исследованиями, посвященными переходу через резонанс линейной системы с одной степенью свободы, были работы Ф. М. Льюиса [265], изданная в 1932 г. и Т. Пёшля (1933 г.) [269]. В них частота возмущающей силы принималась изменяющейся по линейному закону, т.е. $\dfrac{d\nu}{dt}=\text{const}$ или $\nu(t)=\varepsilon t$, где ε – скорость изменения частоты $\nu(t)$.

Для линейной системы с одной степенью свободы и сопротивлением, пропорциональным скорости, определение вынужденных колебаний при переходе через резонанс приводится к вычислению интеграла

$$\int_0^t P(\tau)\cos\left(\frac{\varepsilon\tau^2}{2}+\delta_0\right)e^{-n(t-\tau)}\sin(t-\tau)\,d\tau, \tag{5.14}$$

где δ_0 – начальная фаза.

Льюис предложил рассматривать интеграл в плоскости комплексного переменного и выбирать путь интегрирования так, чтобы избежать вычислительных затруднений [265]. Преобразуя выражение (5.14), он приходит к формуле, содержащей интегралы вида

$$\int_{z_1}^{\infty}\frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}dz, \tag{5.15}$$

где z_1 – комплексная переменная. Для вычисления этих интегралов Льюис предлагает использовать ряды, при малых $|z_1|$ – сходящийся, а при больших – асимптотический. В тех случаях, когда ряды оказываются непригодными для вычислений, он прибегает к численному интегрированию. При этом для упрощения вычислений Льюис использует графоаналитический прием, связанный с применением двух специально построенных транспарантов, но все же довольно трудоемкий.

Пёшль рассматривает задачу без учета затухания [269]. В этом случае интеграл (5.14) сводится к интегралу Френеля [146]. Поскольку эти интегралы представляют собой хорошо изученные и табулированные функции, то вычисление амплитуд колебаний не вызывает затруднений.

Однако результаты первых исследователей прохода через резонанс очень плохо согласовываются с экспериментальными данными [99]. Это объясняется отсутствием в этих исследованиях трения, а, как известно, амплитуда резонансных колебаний очень сильно зависит от демпфирования. Но учет сопротивления даже в виде простого вязкого трения (пропорционального первой степени скорости) приводит к серьезным вычислительным трудностям. Следующим важным шагом в вопросе о переходе через резонанс системы с одной степенью свободы явилась работа А. М. Каца [99]. Используя идею Льюиса, он выбирает независимые переменные и путь интегрирования иначе, что позволяет ему прийти к более простой методике расчета [51, с. 7]. Однако если ввести в рассмотрение силу сопротивления, то вычисление интеграла (5.14) сильно усложняется. Долгое время этот интеграл не был выражен через табулированные функции, а численное его определение крайне затруднительно, так как подынтегральная функция является быстроколеблющейся. Но в большинстве технических задач интерес представляет лишь максимальное значение амплитуды колебаний, а для этого не требуется построения всей кривой амплитуд, т.е. огибающей. А. М. Кац получил весьма важную формулу для определения частоты возмущающей силы, при которой достигается максимальная амплитуда колебаний, а также нашел границы частот, в пределах которых скорость изменения частоты не влияет на амплитуду колебаний [99].

Большой вклад в развитие теории нестационарных колебаний внес академик АН УССР А. П. Филиппов [41]. Решения задачи о переходе через резонанс линейной системы с одной степенью свободы при изменении частоты по законам квадратной и кубической парабол им получены в рядах [238; 240]. В монографии [242] решения для системы с одной степенью свободы распространяются на случай линейных систем с n степенями свободы. Это одна из первых работ, где рассматриваются такие системы. Задачи доведены до числовых результатов с построением графиков максимальных амплитуд в зависимости от скорости перехода через резонанс.

Проблемами теории нестационарных колебаний занимался ученик Анатолия Петровича Е. Г. Голоскоков [124]. Их совместные монографии [52; 53] являются самыми фундаментальными в этой области теории колебаний. В противовес прямому интегрированию и разложению решения в ряды харьковские ученые предложили вместо обобщенной координаты q использовать комплексную переменную ψ $\left(q = \mathrm{Re}\,\psi\right)$, удовлетворяющую уравнению

$$\ddot{\psi} + 2n\dot{\psi} + k^2\psi = P\left(t\right)e^{-i\theta(t)}, \quad i = \sqrt{-1}. \tag{5.16}$$

Его решение при нулевых начальных условиях $\psi\left(0\right) = 0$ и $\dot{\psi}\left(0\right) = 0$ найдем методом вариации произвольной постоянной

$$\psi_1\left(t\right) = \frac{1}{k}\int_0^t P\left(t\right)e^{-i\theta(t)-n(t-\tau)}\sin k_1\left(t-\tau\right)d\tau, \tag{5.17}$$

где $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, $\theta\left(t\right) = \varepsilon t^2/2 + \delta_0$. Интеграл (5.17) не выражается через простые функции в замкнутой форме, а подынтегральная функция является быстроколеблющейся. Поэтому для решения задачи А. П. Филиппов и Е. Г. Голоскоков применяли табулированные функции [235]. В результате они получали зависимость $A\left(t\right)$ амплитуды колебаний, происходящих с переменной частотой, от времени, т.е. огибающую кривую колебательного процесса. Таким образом, в систематизированном виде была разработана методика определения амплитуды колебаний в задаче о прохождении через резонанс линейной системы с одной степенью свободы под действием возмущающей силы с линейно изменяющейся частотой.

Полученное решение задачи для системы с одной степенью свободы, а также информация и выводы, следующие из этого решения, служат основой для анализа нестационарного колебательного процесса в любых других системах, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поскольку они сводятся к сумме решений соответствующих дифференциальных уравнений второго порядка. Это обстоятельство позволило разработать единую методику решения задач о нестационарных колебаниях более сложных систем с любым числом степеней свободы. Применение таблиц для вычисления интегралов от быстро колеблющихся функций значительно сокращает трудоемкость вычислений по сравнению с численным интегрированием или пользованием рядами. Это обстоятельство обеспечивает эффективность метода решения данной задачи, в том числе и для системы с любым числом степеней свободы. Решения, выраженные через интеграл вероятностей от комплексного аргумента, позволяют рассматривать прохождение через резонанс не только с первой собственной частотой, но и с высшими частотами. Применение этого интеграла позволило получить удобные для анализа и вычислений решения ряда новых задач, важных для практики, установить некоторые ранее неизвестные закономерности в поведении систем при нестационарном режиме колебаний, описываемых линейными уравнениями, как с постоянными коэффициентами, так и с периодически изменяющимися, а также определить характер совместного влияния различных параметров системы на развитие колебаний. Полученные решения позволяют найти амплитуды нестационарных колебаний и, таким образом, дают возможность ответить на важный вопрос, насколько уменьшается эта амплитуда по сравнению со стационарным резонансным режимом, насколько опасными являются нестационарные колебания и при какой скорости перехода через резонанс амплитуда колебаний окажется в допустимых пределах.

В докторской диссертации Е. Г. Голоскокова [50] получено решение для стержней, пластин и оболочек при действии продольных сил (или сил, действующих в срединной плоскости) постоянной частоты. Обнаружены новые особенности систем, характерные для такого сочетания действующих сил. Значительно сложнее задача исследования нестационарных процессов в нелинейных системах. Однако для них оказалась применима идея асимптотических методов, развитых Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым. Правда, в их работах метод асимптотических разложений не применен для детального исследования нестационарных процессов в нелинейных системах. Случай медленного прохождения через резонанс, но только линейных систем, в том числе и со многими степенями свободы, с помощью метода асимптотического интегрирования был рассмотрен С. Ф. Фещенко [237].

Разработке методов приближенного решения нелинейных уравнений с медленно меняющимися параметрами и исследованию с помощью этих методов резонансных явлений посвящена кандидатская диссертация Ю. А. Митропольского [166], выполненная в 1947 г. под руководством Н. Н. Боголюбова. В ней на основе методов нелинейной механики Крылова – Боголюбова была изложена методика формальных решений для нелинейных систем с медленно меняющимися параметрами. До этого подобные задачи решались только для простых линейных систем. Однако в этой работе еще отсутствовало строгое математическое доказательство изложенного метода.

Ю. А. Митропольским дано дальнейшее развитие и применение метода усреднения для изучения нестационарных режимов в сложных нелинейных системах, а также дано математическое обоснование асимптотического метода. Рассматриваются особенности резонансных кривых при различных типах нелинейностей упругих характеристик элементов, прохождение через резонансы основной, дробный и внутренний, влияние гармоник возмущающей силы, прохождение через параметрический резонанс и т.д. Построены асимптотические решения, описывающие одночастотные колебания в нелинейных гироскопических системах и в некоторых системах с распределенными параметрами. Одночастотный метод оказался особенно эффективным, позволяя построить асимптотические приближения для нелинейной системы со многими степенями свободы на основе простой расчетной схемы, представляющей некоторую эквивалентную систему с одной степенью свободы. Таким образом, в трудах Ю. А. Митропольского впервые в мировой литературе изложена полная теория нестационарных колебаний [249, с. 103].

Идеи асимптотических методов используются в работах Б. И. Мосеенкова [178], В. П. Рубаника [209], Т. А. Тибилова [224] и других авторов для получения решений задач о нестационарных колебаниях стержней двоякой жесткости, при рассмотрении многочастотных нестационарных колебаний в квазилинейных системах с запаздывающими аргументами и других нелинейных систем.

В исследованиях А. П. Филиппова и Е. Г. Голоскокова проведено сравнение результатов точного численного интегрирования дифференциального уравнения с решением в первом приближении, полученным при помощи асимптотических методов, выяснена точность первого приближения, т.е. пределы применимости их к задачам с существенной нелинейностью. Расчеты выполнялись на ЭЦВМ и моделирующей машине. В частности, при малом затухании и большой амплитуде возмущающей силы, т.е. в случае резко выраженного резонанса, асимптотические методы дают завышенные значения амплитуды.

С развитием ЭВМ точные численные методы пришли на смену приближенным аналитическим. Их достоинство в том, что они не накладывают каких-либо ограничений на вид рассматриваемой нелинейности и на скорость протекания процесса. При их использовании нет необходимости заранее предписывать вид решения. Поэтому численные методы представляют собой наиболее мощное средство решения обширного круга задач нестационарных колебаний, задач об ударном воздействии нагрузок, о воздействии подвижных нагрузок и др.

Наиболее важной для практики задачей теории нестационарных колебаний является задача о переходе ротора через критические скорости. Однако, несмотря на ее важность, долгое время вопрос о нестационарных изгибных колебаниях вращающихся при переменных оборотах валов и соответствующем напряженном состоянии гибкого вала в связи с его вращением долго оставался слабо изученным. Совершенно не был освещен вопрос об изгибных колебаниях при переходе через критическую скорость вращения вала на упругих анизотропных опорах и вала неравножесткого в двух плоскостях изгиба.

Задачи о переходе ротора через критические скорости в процессе разгона или выбега соответствуют задачам перехода через резонанс и рассматриваются с помощью тех же методов. Теория вращения гибкого вала с одним диском при постоянном числе оборотов дает следующее представление о характере движения на критических оборотах: вал выгибается в плоскости неуравновешенности и в таком изогнутом состоянии вращается вокруг линии опор. При этом вектор прогиба на скорости ниже критической направлен в ту же сторону, что и вектор дисбаланса, а на скорости выше критической – в противоположную сторону. При наличии трения вектор дисбаланса всегда составляет некоторый угол с вектором прогиба. На критической же скорости эти векторы образуют прямой угол. Это соответствует сдвигу фазы на резонансе на $\pi/2$ обычной колебательной системы с одной степенью свободы.

Первая попытка решения вопроса поперечных колебаний вращающегося вала с одним диском при переходе через критическую скорость была предпринята известным физиком П. Л. Капицей (1894–1984) в 1939 г. [96]. Но в этой работе автор, принимая угловое ускорение слишком малым, приходит к решению, которое, в сущности, отражает вынужденные установившиеся колебания. Задача о переходе через критическую скорость гибкого вала, лежащего на жестких или упруго-податливых опорах, сводится к вычислению интегралов вероятностей от комплексного аргумента. В системе с упругими опорами разной жесткости в вертикальном и горизонтальном направлении имеется две критические скорости, а прогибы вала на оси, вращающейся вместе с ним системы координат, содержат вторую гармонику колебаний. Напряжения в вале содержат медленно меняющуюся составляющую, которая неоднократно переходит через 0, достигая наибольшего значения в момент времени, несколько смещенный относительно момента достижения критической скорости вращения. Сравнивая прохождения через критическую скорость вала с распределенной массой и системы с одной степенью свободы (случай вала с одним диском), Ф. М. Диментберг [71, с. 47–65] установил, что вал с распределенной массой вблизи любой из критических скоростей ведет себя как система с одной степенью свободы.

В 1960-е гг. в связи с увеличением мощности и быстроходности турбомашин, а также с развитием роторных машин актуальной стала проблема динамических расчетов роторов. Решение ряда задач для роторов удалось построить на основе асимптотических методов нелинейной механики. В 1957 г. Б. И. Мосеенков в работе [178] рассмотрел дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержня двоякой жесткости с учетом собственного веса стержня и сил трения. Если главные моменты инерции поперечного сечения стержня мало отличаются друг от друга, то задаче соответствует система уравнений, содержащая малый параметр. В этом случае ее можно интегрировать методами Крылова – Боголюбова. Параллельно изгибные колебания стержня двоякой жесткости изучал ученый из Львова Олег Николаевич Романив (1928–2005) [209]. Его результат, полученный методом Ван-дер-Поля, совпадает с первым приближением Мосеенкова. Изгибные колебания стержня с неодинаковой жесткостью рассматривались также Ф. М. Диментбергом [71].

Известный практический и теоретический интерес представляет задача о вращении ротора на нелинейных упругих опорах, впервые поставленная и решенная Н. В. Григорьевым [38, с. 115–129]. Это решение позволяет объяснить поведение ряда упругих систем, а также построить теорию и методы учета нелинейного демпфирования колебаний элементов машин с помощью применения упруго-нелинейных звеньев.

В 1960-е гг. появились газотурбинные установки, у которых соосные роторы связаны между собой через опоры. При этом на каждый вал действуют возмущения, имеющие разные частоты, что приводит к возникновению режимов прямой и обратной прецессии. В таких системах происходит перекачка энергии от одного ротора к другому, вследствие чего могут возникнуть субгармонические (дробные) резонансы и автоколебательные режимы. В работе В. А. Гробова [63] рассматриваются изгибные колебания валов быстроходных турбомашин на основе асимптотических методов. Им исследуются нестационарные колебания валов на жестких опорах, на упругих опорах, совместные колебания системы ротор – статор, колебания соосных роторов, а также исследуется ряд других задач, связанных с устойчивостью и стационарными и нестационарными колебаниями валов.

В 1904 г. немецкий физик и математик Арнольд Зоммерфельд (1868–1951) обнаружил эффект неустойчивого вращения с двигателем ограниченной мощности [229, с. 41–42]. Явление, получившее название «эффект Зоммерфельда» заключается в том, что из-за резонансных колебаний основания машины или самого ротора, обороты последнего «застревают» на резонансном режиме, а вся энергия от двигателя расходуется на колебания.

Начало новому разделу в исследовании нестационарных колебаний механических систем – систем с источниками энергии ограниченной мощности положил В. О. Кононенко. В его монографии [105] излагаются основополагающие исследования автора, определяющие основные особенности поведения систем с ограниченным возбуждением в стационарном и нестационарном режимах. Частично они опубликованы ранее в виде отдельных статей. Виктором Олимпановичем были выяснены энергетические соотношения, вносимые связностью с двигателем, и показан их геометрический смысл в стационарном режиме. При этом на базе метода усреднения рассмотрены параметрические колебания, автоколебания, резонанс n-го рода, одночастотные резонансные колебания в системе с s степенями свободы, взаимодействующей с источником энергии и другие задачи. Для изучения взаимодействия колебательных систем с источником энергии широко использовалось электромоделирование. Ряд теоретических результатов проверен экспериментально на лабораторной модели, представляющей собой вал с двумя тяжелыми неуравновешенными дисками. Было установлено, что экспериментальные данные, как при стационарном режиме, так и при нестационарном, находятся в достаточно хорошем согласии с теоретическими выводами.

В докторской диссертации Е. Г. Голоскокова задача о критических режимах обобщается на случай валов переменного поперечного сечения и решается методом последовательных приближений на базе интегральных уравнений, предложенных И. А. Биргером [23, с. 122–129]. Метод позволяет учитывать гироскопический эффект распределенных и сосредоточенных масс и допускает реализацию алгоритма последовательных приближений на ЭЦВМ для вычисления не только первой, но и высших критических скоростей вращения. При этом метод не имеет ограничений на количество нелинейных упругих опор и имеет хорошую сходимость, что иллюстрируется примером [50, с. 540].

Е. Г. Голоскоков рассмотрел одну из принципиальных схем соосных роторов и подтвердил своим исследованием возможность существования устойчивых автоколебательных режимов. Он также проанализировал влияние некоторых параметров на амплитуды автоколебаний. Им подробно изучено влияние упругих опор на критические скорости вала с одним диском при учете гироскопического эффекта, обусловленного податливостью опор. Показано, что при определенных условиях поведение системы является таким же, как и в хорошо изученном случае жестких опор, но с несимметрично расположенным диском [183]. В задачах об устойчивости вала двоякой жесткости установлено, что, в отличие от вращения круглого вала с критической скоростью, когда силы внешнего трения, независимо от их величины, ограничивают деформации вала, здесь не всегда наблюдается такой результат.

Известный теоретический и практический интерес представляет задача о вращении ротора на нелинейных упругих опорах, впервые поставленная и решенная в работе [38] для вала постоянного поперечного сечения. Решение этой задачи позволяет объяснить поведение ряда упругих систем, а также построить теорию и методы нелинейного демпфирования колебаний элементов машин с помощью применения упруго-нелинейных звеньев.

Полученные для различных моделей результаты прохода гибкого вала через критические обороты нашли широкое применение при расчетах паровых и газовых турбин.

ГЛАВА 6

Применение вычислительной техники для расчетов колебаний

Как уже было показано, решение задач теории колебаний в замкнутом (аналитическом) виде возможно только в простейших случаях, в частности для линейной системы с одной – тремя степенями свободы или для нелинейных систем с одной степенью свободы при частных видах нелинейности. При рассмотрении континуальной системы аналитическое решение существует только для тел геометрически правильной формой и при линейной постановке задачи. Таким образом, важнейшее место в теории механических колебаний занимают численные методы расчетов.

На протяжении многих лет исследователи могли применять либо ручной счет, либо графические методы расчетов. Поэтому до широкого внедрения вычислительной техники исследования колебаний проводились для дискретных систем небольшой размерности или для таких континуальных систем, для которых существовали аналитические решения. Это существенно ограничивало применение теории колебаний при расчетах реальных механических систем. В связи с этим теория колебаний являлась одним из основных стимулов для развития численных методов анализа. В 1940-е гг. появились методы исследования, основанные на применении электромеханических аналогий.

6.1. Применение аналоговых вычислительных устройств для исследования колебаний

С развитием электротехники появляется аналоговая вычислительная техника, предназначенная для моделирования в реальном времени как линейных, так и нелинейных динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Аналоговые средства обеспечивали высокое быстродействие при небольшой стоимости и легко перестраивались для решения других задач. Поэтому они широко использовались при исследовании колебаний энергетических установок, судов, самолетов, ракетных комплексов, космических кораблей и др.

Одним из первых таких способов стало моделирование колебательных процессов в машинах с помощью специально собранной эквивалентной электрической цепи (ЭЭЦ). В основе этого моделирования лежат свойства электромагнитных колебаний, описываемых теми же самыми дифференциальными уравнениями, что и колебания механической системы.

Еще Дж. К. Максвелл заметил, что подобно тому, как при колебаниях механической системы происходит перекачка потенциальной энергии в кинетическую, при колебаниях электромагнитной системы энергия магнитного поля преобразуется в энергию электрического поля. Максвелл уподобил энергию магнитного поля электрической системы кинетической энергии, а энергию электрического поля – потенциальной. Этим были заложены основы, так называемой, **первой системы** электромеханических аналогий. При использовании **второй системы**, наоборот, энергия магнитного поля уподобляется потенциальной энергии, а энергия электрического поля – кинетической.

На рис. 6.1 a представлена простейшая механическая колебательная система, состоящая из точечной массы m, пружины жесткости c и демпфера вязкого трения с коэффициентом β, а на рис. 6.1 b и c ее электрические аналоги соответственно 1-го и 2-го типа. Электрические системы состоят из конденсатора емкостью C, катушки с индуктивностью L и резистора с сопротивлением R, соединенных последовательно (1-я система аналогий) или параллельно (2-я система). На схемах также показаны источники ЭДС $e(t)$ и тока $i(t)$.

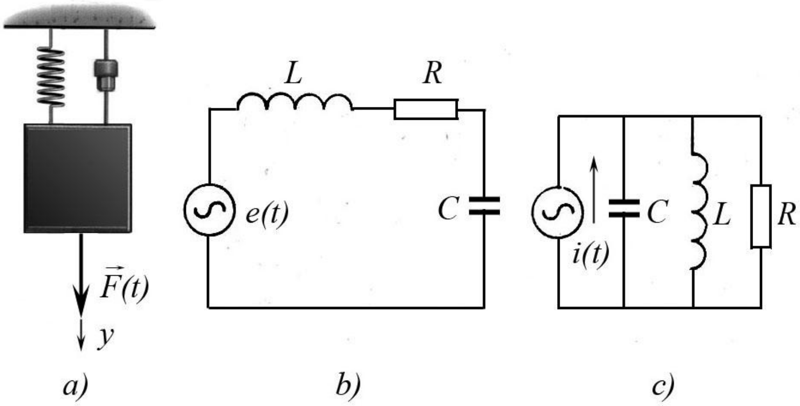

Рис. 6.1. Модели простейших колебательных систем

Аналогия заключается в схожести дифференциальных уравнений, описывающих изменение координаты y для схемы a, дифференциальное уравнение (6.1), также электрического заряда q – схема b, уравнение (6.2) и напряжения u –схема c, уравнение (6.3).

$$m\ddot{y}+b\dot{y}+cy=F_y\left(t\right); \tag{6.1}$$

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=e\left(t\right); \tag{6.2}$$

$$C\ddot{u}+\frac{1}{R}\dot{u}+\frac{1}{L}u=\frac{di\left(t\right)}{dt}. \tag{6.3}$$

Подбирая соответствующим образом параметры C, R, и L, а также законы изменения ЭДС $e(t)$ или тока $i(t)$, можно добиться того, чтобы законы изменения электрического заряда q или напряжения u соответствовали закону изменения координаты y механической системы.

Идея замены громоздких вычислений измерением электрических величин возникла 1930-е гг. при исследовании динамической прочности валопроводов ДВС, в первую очередь рядных бензиновых авиамоторов и судовых дизелей. Когда при колебаниях стали деформироваться коленчатые валы, и их нельзя было моделировать одной массой, при расчете потребовалось рассматривать системы с десятью и более степенями свободы. Хотя методы расчетов свободных и вынужденных колебаний именно таких систем, имеющих цепную структуру, были развиты неплохо, они требовали достаточно большого объема вычислений, что затрудняло решение задачи их синтеза по вибрационным характеристикам. Наличие же в системе нелинейных элементов – муфт, демпферов или антивибраторов, а также технологических нелинейностей, например, зазоров в зубчатых передачах или шлицевых соединениях, зачастую делало невозможным их расчет в многомассовой постановке. Это вынуждало рассматривать систему с одной степенью свободы, что позволяло получать только качественные результаты. Сопоставление механических и электрических величин при исследовании крутильных колебаний дискретных систем приведено в табл. 6.1 [223, с. 141–142].

В Советском Союзе пионером применения электромеханических аналогий для расчетов колебаний систем с ДВС стал старший научный сотрудник Института строительной механики АН УССР И. М. Тетельбаум. В начале 1940-х гг. он разработал теорию электрического моделирования крутильных колебаний валопроводов поршневых двигателей. На июльской сессии АН УССР 1942 года Илья Маркович выступил с докладом «Новый метод определения расчетных усилий в валах авиационных и судовых рядных двигателей путем электромеханического моделирования» в котором предложил этот метод в качестве «радикального способа упрощенного определения расчетных усилий» при крутильных колебаниях валопроводов указанных двигателей. Автором была предложена конструкция расчетного стенда, состоящего из электрической модели рядного двигателя, составляемой из дросселей и конденсаторов, фотоэлектрического датчика импульсов тангенциальных усилий и измерительного устройства. Аналитический расчет предполагалось заменить осциллографированием напряжений или токов в отдельных ячейках модели двигателя. В докладе был приведен анализ принципов моделирования, рассматривались элементы установки и их технические характеристики [137, с. 300–301].

Таблица 6.1

Сопоставление механических и электрических величин при исследовании крутильных колебаний дискретных систем

Механические величины	Электрические величины	
	1-я система аналогий	2-я система аналогий
Кинетическая энергия	Энергия магнитного поля	Энергия электрического поля
Потенциальная энергия	Энергия электрического поля	Энергия магнитного поля
Рассеяние энергии (диссипативная функция)	Рассеяние энергии	Рассеяние энергии
Угловое перемещение	Электрический заряд	Магнитное потокосцепление
Угловая скорость	Сила тока	Напряжение
Момент силы	Напряжение	Сила тока
Момент инерции массы	Самоиндукция	Емкость
Податливость	Емкость	Самоиндукция
Сопротивление потерь	Омическое сопротивление	Омическая проводимость
Механический импеданс, динамическая жесткость	Электрический импеданс (полное или кажущееся сопротивление)	Электрический адмитанс (полная или кажущаяся проводимость)

В резолюции по докладу И. М. Тетельбаума были отмечены эффективность предлагаемого стенда, позволяющего заменить громоздкие вычисления измерениями на электрической модели. Сессия технического отделения АН УССР приняла решение: «Обратиться совместно с ЦИАМом* в НКАП с предложением о скорейшем создании таких стендов в системе НКАП и в Институте строительной механики АН УССР и организовать в последнем на базе стенда лабораторию динамических исследований» [137, с. 301]. Однако И. М. Тетельбаум перешел на работу в ЦИАМ, и электрический

* ЦИАМ – Центральный институт авиационного моторостроения

расчетный стенд был создан только там. Подробный анализ исследований крутильных колебаний с помощью данного стенда приведен в статье И. М. Тетельбаума [223]. Он позволял задавать параметры электрической модели с точностью до 1 %, что превосходит точность определения расчетных значений элементов механической модели при рассмотрении реальной конструкции с учетом упрощающих модель допущений. Кроме того, данная методика позволяет легко варьировать параметрами системы, внося лишь небольшие изменения в конструкцию стенда. Этот стенд успешно применялся в военные и послевоенные годы, за несколько лет была исследована динамика 50 рядных авиамоторов. При его помощи не только были проведены подробные исследования распределения динамических нагрузок в коренных и шатунных шейках коленчатых валов авиамоторов, но и разрешен ряд других актуальных задач [223, с. 164–165].

Стенд Тетельбаума успешно справлялся с исследованием крутильных колебаний линейных систем валопроводов. Наибольшую трудность при этом представлял учет маятниковых антивибраторов и изгибных колебаний упругого винта, связанных с крутильными колебаниями валов. Для маятниковых антивибраторов, работающих в поле центробежных сил, соответствующие емкости конденсаторов должны изменяться обратно пропорционально квадрату числа оборотов двигателя. Для электромоделирования упругого винта используется метод динамических жесткостей, согласно которому винт характеризуется его резонансными и антирезонансными частотами [72, с. 268–271].

Бóльшие проблемы вызывал расчет нелинейных колебаний, поскольку подбор электрической схемы для моделирования нелинейных элементов представляет особую трудность. Зачастую приходится удовлетворяться лишь приблизительным соответствием характеристик или ограничиваться применением линейных моделирующих устройств в сочетании с аналитическими методами линеаризации.

Для получения жестких характеристик удобнее вторая система аналогий, при которой за счет использования нелинейных свойств ферромагнитных материалов, кривые намагничивания которых позволяют получить требующиеся характеристики. И. М. Тетельбаум, например, моделировал жесткие характеристики с помощью дросселей с сердечниками из пермаллоя (железо-никелевый сплав). Сухое трение моделировалось с помощью газоторонов (при использовании 1-й системы аналогий) или электронных ламп в режиме насыщения (2-я система) [223, с. 151–152].

В последующие годы И. М. Тетельбаумом была разработана теория электромеханического моделирования изгибных и связанных изгибно-крутильных колебаний, а также расчета статически неопределимых систем. Профессор И. М. Тетельбаум стал одним из основоположников аналогового моделирования в СССР. Работая в Московском энергетическом институте, ученый занимался общей теорией аналоговых вычислительных машин и методов электрического моделирования. Он является одним из основоположников теории электронного моделирования сложных систем. Ряд его научных результатов получил широкое признание среди специалистов в нашей стране и за рубежом.

С развитием электронных вакуумных ламп появились **аналоговые вычислительные машины** (АВМ). В них, в отличие от стендов, моделируется не сама исследуемая система, а уравнения, описывающие ее движение. В этих машинах физическим способом выполняются математические операции: сложение, умножение, дифференцирование, интегрирование и т.п. АВМ имеют набор операционных блоков, предназначенных для выполнения этих операций. Для решения уравнений на АВМ составляется соответствующая структурная схема, в которой реализуется необходимая связь между блоками машины.

Основой для создания АВМ стал операционный усилитель постоянного тока, разработанный в 1942 – 1944 гг. в США под руководством Б. Рассела. Он имел достаточно высокий коэффициент усиления и предназначался для выполнения математических операций путем использования напряжения как аналоговой величины. Это дало возможность конструировать аналоговые компьютеры без движущихся частей, на постоянном токе.

Первая в СССР электронная АВМ с повторением решения была разработана в 1946 г. коллективом под руководством Л. И. Гутенмахера. В 1949 в НИИ-885 (Головной институт по системам управления баллистических ракет дальнего действия и зенитных управляемых ракет) коллективом под руководством В. Б. Ушакова были созданы первые АВМ, которые назывались интеграторами постоянного тока (ИПТ) и предназначались для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Созданные в следующем году машины «ИПТ-4» и «ИПТ-5», выпускались уже серийно. Эти АВМ обеспечивали решение наиболее важных задач в разных научных и технических областях (авиации, ракетостроении, космических исследованиях, оборонной промышленности и др.).

В 1952 – 1953 гг. под руководством В. Б. Ушакова были созданы более совершенные АВМ, которые получили наименование «моделирующие установки постоянного тока» (МПТ). Серийные АВМ «МПТ-9» предназначались для решения линейных дифференциальных уравнений, а «МПТ-11» – для решения нелинейных дифференциальных уравнений. В 1960-е гг. аналоговые компьютеры стали повседневным инструментом ученых для решения множества специфических задач в различных областях науки.

Рассмотрим создание аналоговой схемы на примере интегрирования простейшего дифференциального уравнения, описывающего свободные колебания линейной механической системы с одной степенью свободы и без учета сопротивления

$$\ddot{q} + k^2 y = 0 \tag{6.4}$$

при заданных начальных условиях

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0.$$

Вместо уравнения (6.4) можно записать два дифференциальных уравнения первого порядка

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = -k^2 q,$$

или два интегральных соотношения

$$q = q_0 + \int_0^t \dot{q}dt, \quad \dot{q} = \dot{q}_0 - \int_0^t k^2 q dt. \tag{6.5}$$

В АВМ в качестве аналога обобщенной координаты $q(t)$ используется электрическое напряжение $u(t)$, и уравнения для u и $\dot{u}$, соответствующие выражениям (6.5) имеют вид

$$u = u_0 + \int_0^t \dot{u} dt; \tag{6.6}$$

$$\dot{u} = \dot{u}_0 - \int_0^t k^2 u dt. \tag{6.7}$$

Для решения уравнения (6.6) в интегрирующий блок следует ввести переменное напряжение, численно равное $\dot{u}$. Тогда на выходе в каждый момент времени будут получаться значения интеграла $\int_0^t \dot{u} dt$. Применяя суммирующий блок, складываем их с u_0 и получим текущее значение u. Для получения величины $\dot{u}$ необходим второй интегрирующий блок, на вход которого подается величина $-k^2 u$, а результат интегрирования суммируется с $\dot{u}_0$. Для того, чтобы связать всю систему, нужно вырабатываемое напряжение $\dot{u}$ подать на вход первого интегрирующего блока. Таким образом, получается замкнутая цепь. Снимая показания на выходе из первого блока, мы получим функцию-аналог, соответствующую искомой зависимости обобщенной координаты от времени $q(t)$. Если, кроме того снимать показания, соответствующие выходу из второго блока, то будет получена и зависимость обобщенной скорости $\dot{q}(t)$.

Различные схемы соединения отдельных функциональных блоков позволяют создать аналоги довольно сложных механических систем, в том числе и многомассовых, и нелинейных.

С развитием вычислительной техники, позволяющей получать точные решения для линейных дискретных систем, применение методов электромеханических аналогий при расчете свободных и вынужденных установившихся колебаний стало нецелесообразным. Для расчетов переходных режимов и нелинейных колебаний, ввиду сложности их алгоритмов и высокой стоимости машинного времени, они еще долго находили применение.

6.2. Численные методы расчетов и применение ЭВМ

ЭВМ не только открыли новые возможности для применения уже существующих численных методов, но и вызвали появление новых. На первом этапе расчеты с применением ЭЦВМ проводились с помощью методов, разработанных для ручного счета. Среди них наибольшее распространение получили ***метод начальных параметров*** и ***метод динамических жесткостей (или податливостей).***

В методе начальных параметров, предложенном А. Н. Крыловым в работе [112], кинематические и силовые параметры на одной границе системы выражаются через аналогичные параметры на другой границе. Эти зависимости имеют вид системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{A}(k)\mathbf{X}_0, \tag{6.8}$$

где $\mathbf{X}$ – вектор столбец начальных параметров, $\mathbf{A}(k)$ - матрица перехода, зависящая от собственной частоты системы *k*. Параметры выбираются так, чтобы часть компонентов вектора столбца на конце системы $\mathbf{X}_N$ обращалась в нуль. Система разбивается на участки, для которых легко строятся матрицы перехода $\mathbf{A}_k$. Тогда матрица перехода всей системы

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_N \cdot \mathbf{A}_{N-1} \cdots \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1. \tag{6.9}$$

В случае дискретной системы матрица перехода строится очень легко. Частный случай метода – метод остатка для систем с одномерными движениями (например, крутильные колебания) был предложен в 1921 г. немецким ученым Максом Толле в работе «Регулирование двигателей» (Tolle. Regelung der Kraftmashinen, 1921, S. 231).

При определении собственных частот и форм частотное уравнение получается из условия нетривиальности

$$\left|\mathbf{A}^0(k)\right| = 0, \tag{6.10}$$

где $\mathbf{A}^0$ - матрица однородной системы.

Частотное уравнение (6.10) решается методом подбора, начиная с пробного значения собственной частоты. При этом вычисление левой части при частотах, близких к собственным, сопряжено с потерей точности ввиду вычисления малых разностей больших величин. Это сказывается при определении форм колебаний. При расчете вынужденных колебаний рассматривается система с правой частью.

Метод динамических жесткостей основан на применении величины, характеризующей упруго-инерционное сопротивление колебательной системы или ее части действующему усилию. Динамической жесткостью называется величина, равная отношению амплитуды усилия, возбуждающего гармонические колебания упругой системы к амплитуде перемещения точки приложения этого усилия. Этот метод представляет собой развитие метода цепных дробей, предложенного в 1930 г. В. П. Терских для расчета крутильных колебаний валопроводов (см. с. 107). Сам термин динамическая жесткость был введен в 1940 г. профессором Колумбийского университета (США) Мариусом Био в работе, посвященной связанным колебаниям коленчатых валов авиационных двигателей с гибким винтом [261].

Согласно этому методу, система расчленяется на ряд звеньев, для которых определяются динамические жесткости. Условия сопряжения звеньев позволяют составить частотное уравнение всей системы. Для дискретной системы оно получается в виде цепной дроби (форма В. П. Терских). В отличие от метода начальных параметров, метод динамических жесткостей пригоден и для расчета разветвленных систем.

Широкое применение с внедрением ЭЦВМ нашли также вариационные методы Ритца и Бубнова – Галеркина. Вариационные методы позволяют рассматривать самые сложные задачи динамики в наиболее общей постановке, как для нелинейных дискретных, так и для континуальных систем. Применение ЭВМ позволило использовать большее количество базисных функций. Однако при этом возникает вопрос не только о сходимости, но и об устойчивости метода. Неустойчивость, возникающая при неправильном подборе базисных функций, приводит к тому, что при большем их числе погрешность метода не уменьшается, а растет.

При рассмотрении переходных режимов и для исследования стационарных колебаний в нелинейных системах применяются методы непосредственного интегрирования уравнений движения. Среди них наибольшее распространение получил ***метод Рунге – Кутта***. Для его применения уравнения сводятся к системе вида

$$\frac{du_i}{dt} = f_i\left(t, u_1, u_2, ..., u_s,\right); \quad i = 1, 2, ..., s, \tag{6.11}$$

с начальными условиями $u_i\left(t_0\right) = u_{i0}$, где $u_i\left(t\right)$ – неизвестные функции времени. В задачах динамики чаще применяется метод Рунге – Кутта в модификации Мерсона, позволяющий оценивать точность вычислений и автоматически выбирать шаг. Его недостатком является то, что на каждом новом шаге вычислений не используется информация о предыдущем поведении искомых функций, что снижает их эффективность. Этого недостатка лишены методы Адамса – Крылова и Милна, но они требуют большего объема памяти для хранения промежуточных результатов.

С появлением и бурным развитием ЭВМ, появились и широкие возможности исследования колебаний существенно нелинейных систем. Методы линеаризации и малого параметра, развитые в предыдущие годы, основаны на близости нелинейной системы к линейной и, поэтому, не подходят для исследования существенно нелинейных систем. Строго говоря, разделение нелинейных систем на слабо и сильно нелинейные должно базироваться не на близости нелинейных дифференциальных уравнений к линейным, а на близости или неблизости их решений [30].

На первом этапе исследования нелинейных колебаний получили развитие функционально-аналитические методы, в которых широко используются топологические понятия. Они являются удобным средством качественного исследования периодических решений, их числа и устойчивости. Развитие этих методов в СССР связано с Московско-горьковской научной школой Мандельштама – Андронова. В монографии [11] приведено наиболее полное исследование автономных динамических систем с одной степенью свободы методами качественной теории дифференциальных уравнений, с использованием фазовой плоскости. Там же изложены основы метода точечных отображений. Направление, связанное с этим методом получило широкое развитие в работах Ю. И. Неймарка [182] и его учеников. Ими решено множество практически важных задач. Однако для систем с большим числом степеней свободы и нелинейностями общего вида применение этого метода сопровождается значительными трудностями.

В трудах ученых Киевской школы Крылова – Боголюбова – Митропольского получили развитие приближенные аналитические методы, основанные на применении асимптотических разложений. До появления мощных ЭВМ это было, пожалуй, наиболее доступное средство для исследования нелинейных колебаний механических систем. Создание систем аналитических вычислений на ЭВМ открывает новые перспективы в области использования асимптотических методов [4].

С появлением ЭВМ интенсивно стали развиваться численно-аналитические и численные методы. С точки зрения функционального анализа они могут быть отнесены к двум обширным классам – проекционным и итерационным. Наиболее простыми из проекционных методов являются методы гармонического баланса и гармонической линеаризации. Кроме них в теории нелинейных колебаний из проекционных методов наибольшее распространение получили методы Ритца, Бубнова – Галеркина и коллокаций [119; 211]. Основная трудность проекционных методов – это выбор небольшого числа базисных функций, хорошо описывающих искомое решение, поскольку увеличение их числа резко усложняет задачу. Кроме того, практически не существует приемов оценки погрешности результатов, получаемых этими способами.

С ростом быстродействия ЭВМ все большее развитие стали получать итерационные методы решения нелинейных задач, которые очень хорошо приспособлены для реализации на алгоритмических языках. Из этих методов самым простым является метод последовательных приближений, но он требует большого числа итераций. Этого недостатка лишен метод Ньютона – Канторовича (МНК), полученный Л. В. Канторовичем путем распространения метода касательных Ньютона на операторные уравнения. Это наиболее известный из итерационных методов.

Более удобной для использования итерационных методов является интегральная форма записи уравнений движения. Важнейшим преимуществом интегральных уравнений является то, что трудоемкость решения задачи в этом случае практически не зависит от размерностей линейных контуров системы.

Наиболее существенным достоинством проекционных методов является бóльшая, чем у итерационных, область сходимости. К достоинствам итерационных методов, кроме удобства реализации на ЭЦВМ, относится возможность получения результатов с любой степенью точности. Отмеченные обстоятельства делают целесообразным совместное применение проекционных и итерационных методов. С помощью проекционных методов можно получать начальное приближение, которое потом уточнить одним из итерационных методов.

Что касается решения задач на колебания континуальных систем, то замена их дискретной расчетной схемой позволяет свести уравнения в частных производных к обыкновенным. Дискретную систему принято считать эквивалентной исходной континуальной если ее массы и жесткости подобраны так, что кинетическая и потенциальная энергии дискретной системы при колебаниях такие же, как у исходной континуальной. Подобная эквивалентность возможна только в ограниченном частотном диапазоне, поскольку спектр собственных частот континуальной системы бесконечен, а у дискретной ограничен. Дискретизация системы проводится приближенными интуитивными методами.

Одним из способов дискретизации являются конечно-разностные методы, основанные на замене в дифференциальных уравнениях производных конечными разностями. Для такой замены вся область изменения аргументов представляется в виде некоторой сетки с соответствующими шагами вдоль осей координат. Значения функции в узлах сетки и являются неизвестными системы алгебраических уравнений. Эти методы обладают хорошей алгоритмичностью. Их точность увеличивается с уменьшением шага, но при этом возрастает порядок системы алгебраических уравнений, что ведет к резкому увеличению времени счета и необходимой оперативной памяти. Кроме того, при использовании метода конечных разностей могут возникнуть малые разности больших величин, что ведет к ухудшению точности. Тем не менее, этот метод имеет широкую область применения, в том числе и в теории колебаний.

Иногда конечными разностями заменяют только производные по части аргументов, в результате чего дифференциальные уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным. Сеточные методы трудно использовать при сложной геометрии рассматриваемой области. Правда и вариационные методы в этих случаях также практически невозможно использовать вследствие затруднений с построением базисных функций.

Особое место среди расчетных методов занимает метод конечных элементов, основанный на замене сплошной среды совокупностью большого числа конечных элементов. В 1933 г. известный ученый в области строительной механики И. М. Рабинович высказал мысль о возможности и эффективности использования методов строительной механики стержневых систем в теории упругости [34, с. 29]. ЭВМ неизмеримо расширили возможности прямых методов теории упругости. В 1950-е гг. М. Тернер, Р. Клаф, Г. Мартин и Л. Топп в связи с анализом авиационной конструкции предложили МКЭ [271]. Одним из основоположников МКЭ является также Ольгерд Зенкевич, фундаментальные труды которого [83–85] были широко распространены в СССР.

В сплошной среде число точек бесконечно, что составляет главную трудность получения численного решения. В МКЭ она преодолевается путем разбиения сплошного тела на отдельные элементы, взаимодействующие друг с другом только в узловых точках. В них вводятся фиктивные силы, эквивалентные поверхностным напряжениям, распределенным по границам элементов. МКЭ обладает всеми достоинствами вариационных и сеточных методов решения задач математической физики и при этом лишен их недостатков. Он «безразличен» и к геометрии области, и к характеру краевых условий, и к законам изменения свойств среды, и к внешним воздействиям. Применение МКЭ произвело революцию в решении задач механики сплошной среды. Наличие эффективных и быстродействующих алгоритмов расчета колебаний позволило решать не только задачи анализа, но и синтеза механических систем по вибрационным характеристикам.

Для иллюстрации того, какого прогресса достигло применение МКЭ за последние 20 лет, мы приводим две конечноэлементные модели корпусов тепловозных дизелей. На рис. 6.2 представлена модель стойки блока цилиндров двухвального дизеля 10Д100, составленная в 1984 г. Данная двумерная модель предназначалась для определения жесткости опор коленчатого вала и состояла из 1640 треугольных элементов при числе узлов 1107 [216, с. 92–96].

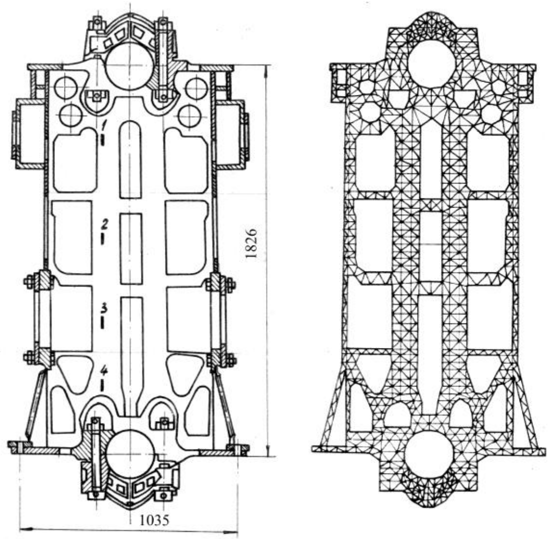

Рис. 6.2. Разбивка сечения блока цилиндров тепловозного дизеля 10Д100

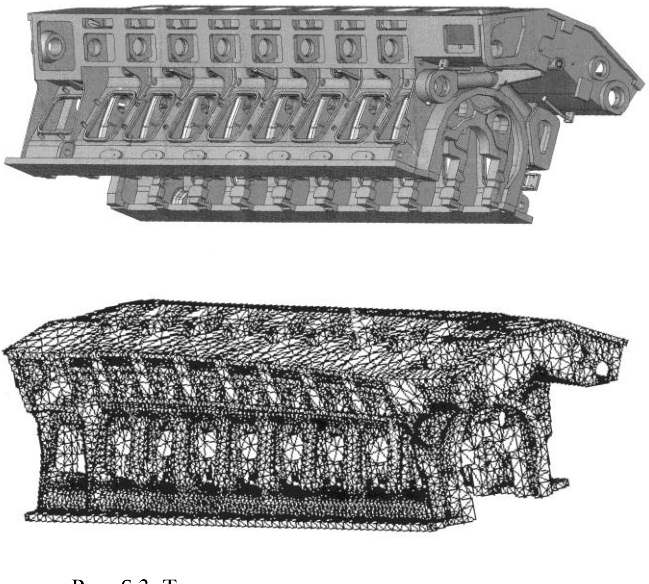

Рис. 6.3. Трехмерная конечноэлементная модель
блока цилиндров тепловозного дизеля 1Д80

На рис. 6.3 представлена трехмерная конечноэлементная модель блока цилиндров дизеля 1Д80, состоящая из 189 381 элементов гексаэдрической формы, соединенных друг с другом в 373 532 узлах. Данная модель, созданная в 2006 г. позволяет проводить анализ колебаний на персональном компьютере невысокой производительности [2, с. 414–415].

Применение ЭВМ для решения задач теории колебаний связано в Украине со школой, научным лидером которой был А. П. Филиппов. В 1964 г. Анатолий Петрович возглавил Харьковский филиал Института механики АН УССР, организованный на базе Лаборатории гидравлических машин. Филиал был призван осуществлять свою деятельность в направлении комплексных исследований вопросов механики, связанных с процессами в тепловых и гидравлических машинах высоких параметров, разрабатывать методы расчета машин и механизмов с применением вычислительной техники. Научным направлением отдела динамики и прочности филиала стало исследование колебательных процессов (нестационарных, переходных, ударных, импульсных) в механических системах с учетом нелинейных факторов и влияния рабочей среды. Разработка методов расчета деталей тепловых и гидравлических машин с использованием вычислительной техники. Руководителем отдела был назначен руководитель филиала член-корреспондент АН УССР А. П. Филиппов. Кроме того, в филиале была организована лаборатория численных методов исследований, научным направлением которой являлась разработка аналитических и численных методов решения задач механики с использованием электронных машин [137, с. 212, 214].

В последующие годы научное направление, связанное с исследованием статической и динамической прочности современных конструкций в условиях интенсивных нагрузок при учете высокотемпературных полей и воздействия среды получило широкое развитие. Ученые школы Филиппова одними из первых широко внедряли численные методы и вычислительную технику при решении задач прочности и надежности в машиностроении. Это нашло отражение в монографиях, посвященных решению задач теории упругости и теории колебаний с помощью ЭВМ [245; 246; 247].

С помощью реализации на ЭВМ различных численных методов А. П. Филиппов и его многочисленные ученики исследовали напряженно-деформированное состояние конструкций при ударных, импульсных и нестационарных нагрузках. Особое место занимает развитие нового направления – оптимизации конструкций по прочностным и вибрационным характеристикам. Этому посвящены монографии, написанные совместно с В. Б. Гриневым [61; 62]. Дальнейшее развитие это направление получило в трудах профессора Гринева и его учеников в ХПИ.

Развитие вычислительной техники существенным образом повлияло на развитие теории колебаний. Хотя скорость счета первых ЭВМ была всего порядка нескольких сот операций в секунду, она превосходила скорость ручного счета в тысячи раз, что позволило решать новые классы задач. Была решена проблема собственных значений и собственных векторов, что позволило определять собственные частоты и формы колебаний линейных дискретных систем большой размерности [232; 272]. Стало возможным также численно рассчитывать вынужденные колебания, численно интегрировать нелинейные дифференциальные уравнения, решать задачи механики сплошной среды, описываемые уравнениями в частных производных.

Быстрый рост памяти и быстродействия ЭВМ привели к ограничению применения аналитических методов и постепенному вытеснению «ручных» способов счета. Сначала для решения задач теории колебаний применялись численные методы, разработанные в предыдущем периоде, которые оказались пригодными для программирования на ЭВМ. Постепенно все эти методы вытесняются более общими, хотя и более трудоемкими по количеству операций.

Внедрение в научную и инженерную практику расчетов на ЭВМ стимулировало дальнейшее развитие теории механических колебаний. Раньше практические задачи ограничивались либо расчетами свободных и вынужденных колебаний линейных систем небольшой размерности, а для нелинейных систем и переходных режимов, зачастую рассматривались системы только с одной степенью свободы. Что касается континуальных систем, то, поскольку аналитическое решение возможно только для некоторых тел геометрически правильной формы, то и в этой области возможности исследователей были очень сильно ограничены.

В области колебаний дискретных механических систем применение ЭВМ позволило справиться с вычислительными трудностями и существенно повысить порядок рассматриваемых систем, в том числе и при решении нелинейных задач. После этого на первое место вышли проблемы построения математических моделей, т.е. составление уравнений равновесия или движения, адекватно отражающих основные свойства механических систем. Особенно большие трудности вызывает составление моделей, описывающих поведение пространственных конструкций, в которых реализуется общий случай движения твердого тела, или систем со сложными видами связей – неудерживающими, нестационарными, неголономными. Дальнейшее развитие вычислительной техники позволило и эту функцию доверить компьютеру. Автоматизированное построение дискретных моделей имеет более чем сорокалетнюю историю.

Ввод исходных данных в формульном виде, их хранение, а также выполнение громоздких выкладок, включая процедуру дифференцирования, а позже и интегрирования, явилось одной из первых попыток моделирования на ЭВМ интеллектуальной деятельности. Системы, позволяющие выполнять эти операции, получили название систем аналитических вычислений (САВ), а позже их стали называть системами компьютерной алгебры (СКА). Механика всегда была связана с использованием самого сложного математического аппарата, поэтому механики внесли весомый вклад в создание СКА. История использования компьютерных систем аналитических вычислений для решения задач механики изложена в работах [64; 79; 80].

На протяжении последних 40 лет САВ развивались и разнообразно и широко применялись для решения различных задач механики. При этом роль ученых Украины была весомой, а во многих случаях и ведущей [80, с. 90]. Среди задач, рассматриваемых с помощью САВ, не последнее место занимают задачи теории колебаний.

Одной из первой САВ, реализованной в конце 1960-х гг., была система АНАЛИТИК, созданная под руководством академика В. М. Глушкова и реализованная на достаточно примитивных, с современных позиций, ЭВМ типа МИР [4]. Эта система успешно применялась представителями Киевской школы нелинейной механики Ю. А. Митропольским и А. А. Молчановым при использовании метода осреднения [171].

Созданием СКА, предназначенной для решения задач статики, кинематики и самых разнообразных задач динамики дискретных механических систем, с 1970-х гг. занимались и в ХПИ под руководством профессора Л. И. Штейнвольфа [136]. Несмотря на их ограниченность, такие модели позволяют в рамках одной постановки рассмотреть очень сложные взаимодействия частей механической системы, в том числе с нестационарными, неголономными связями. Дискретные модели, состоящие из абсолютно твердых тел, соединенных невесомыми упругими связями целесообразно рассматривать на первом этапе решения задачи динамической прочности. Такие модели позволяют вполне адекватно моделировать условия эксплуатации различных деталей механизмов и машин и получить значения действующих в них сил. Дальнейшее решение задачи, т.е. определение напряжений и деформаций, может быть получено с помощью уточненных континуальных или конечноэлементных моделей.

Первым шагом в создании специальной СКА, предназначенной для проведения всевозможных расчетов механических систем была автоматизация ввода исходных данных для решения задачи о крутильных колебаниях валопроводов, описываемых моделью в виде линейной цепной системы. Хотя дифференциальные уравнения колебаний данной системы легко записываются в прямой форме, ввод исходных данных при рассмотрении системы, имеющей несколько десятков степеней свободы, требует выполнения большой работы по заполнению матриц инерции **I**, демпфирования **B** и жесткости **C**.

В статье [163] В. Н. Митиным и Л. И. Штейнвольфом впервые вводится термин «структурная матрица» с целью формального описания структуры линейных цепных систем, в том числе и разветвленных. Для построения структуры приведенной крутильной системы последняя разбивается на элементарные звенья, представляющие собой абсолютно жесткий диск с моментом инерции I_k с присоединенной к нему безынерционной упругой связью с крутильной жесткостью c_k. Исходными данными являются векторы моментов инерции – $\vec{I}$, крутильных жесткостей – $\vec{c}$ и демпфирования на массах и участках – $\vec{\beta}^{м}$ и $\vec{\beta}^{у}$. Кроме этого надо задать последовательность соединения элементов, которая задается в виде массива чисел размерности $2\times s$, так называемой матрицы индексов. На основе последнего строится матрица структуры **S**, размерности $s\times s$, где s – число степеней свободы системы. В данном случае структурная матрица состоит только из единиц или нулей, показывающих наличие или отсутствие связи между соответствующими элементами. Кроме того, строится n-мерный вектор, определяющий знаки упругих сил или моментов в полученных уравнениях. По данной последовательности строится структурная матрица, которая для приведенной системы будет состоять только из нулей и единиц, взятых со знаком «+» или «-». Фактически структурная матрица здесь показывает порядок соединений элементов.

С использованием структуры матрицы инерции, демпфирования и жесткости системы уравнений (1.16) запишутся в виде

$$\mathbf{I} = D\vec{I}\ ;$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}^T \vec{\beta}^{у} \mathbf{S} + D\vec{\beta}^{м}\ ;$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{S}^T \vec{c} \mathbf{S}\ .$$

Здесь D – линейный оператор, переводящий s-мерный вектор в диагональную матрицу размерности $s \times s$, T – символ транспонирования. С помощью данного подхода были созданы программы расчета свободных и вынужденных колебаний цепных дискретных систем с автоматизированным составлением дифференциальных уравнений колебаний. Эти программы на протяжении ряда лет применялись для расчетов колебаний валопроводов танковых дизелей, выполняемых в рамках хоздоговорных работ с Харьковским заводом транспортного машиностроения им. Малышева (ХЗТМ) [70; 87].

Следует отметить, что этот подход только немного облегчал ввод исходных данных в память ЭВМ, поскольку все равно требовал построения приведенной крутильной системы и определения ее параметров и моментов возбуждения, которое проводилось за рамками данной программы. Однако этот первый шаг все же оказался достаточно важным, поскольку применение аппарата структурных матриц для консервативных систем позволило уточнить ряд теорем теории колебаний, касающихся спектральных свойств дискретных систем [162, с. 10–12]. С помощью обратных структурных матриц легко можно составить уравнения колебаний в обратной форме [163, с. 7].

Дальнейшее развитие метод структурных матриц получил в работе [164] для плоских линейных систем произвольного вида. При составлении уравнений движения данная система разбивается на инерционные, диссипативные, упругие и силовые элементы. Однако трудности появляются при составлении вручную матриц инерционной, диссипативной и упругой структур.

К понятию структурных матриц в трактовке Митина и Штейнвольфа [163] примыкает понятие «матрица инцидентности», введенная Й. Виттенбургом [39, с. 107]. Однако для ее получения надо сначала иметь нарисованный граф механической системы. Нельзя не отметить здесь фундаментальную работу В. В. Величенко [35], где дается геометрический смысл понятия «структурная матрица», называемая там «матрица касательного базиса». Аналогичное рассматриваемому, следует трактовать и направление работ В. А. Коноплева [107].

Несмотря на фундаментальную проработанность и законченность упомянутых исследований [39; 79; 107], у них отсутствует единый подход для получения математической модели с учетом связей любого вида в обобщенных и псевдокоординатах.

Предложенное описание дискретных механических моделей оказалось столь эффективным, что удалось распространить его на случай нестационарных и неголономных систем [7; 8], доказать практически важный результат в области чувствительности частот свободных колебаний от дискретных параметров системы [10]. Обобщение понятий «структура» и «структурная матрица» на случай кинематических связей [9] позволило включить в круг рассматриваемых систем пространственные голономные системы. Большое значение имеет также возможность составления универсальной дискретной механической модели, что позволяет, не меняя последнюю, решить комплекс задач, не только динамического анализа и синтеза, но также рассмотреть статику и кинематику механизма.

В основу автоматического составления уравнений движения механических систем положено общее вариационное уравнение динамики (принцип д’Аламбера – Лагранжа), которое для голономной системы с s степенями свободы в обобщенных координатах выглядит так

$$Q_k^u + Q_k^a = 0, \qquad k = 1, 2, ..., s,$$

где активные обобщенные силы Q_k^a и обобщенные силы инерции Q_k^u системы определяются по формулам

$$Q_j^a = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j};$$

$$Q_j^u = -\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Для построения дифференциальных уравнений колебаний дискретных упругих систем среди всех действующих сил выделяются линейные упругие и силы вязкого трения. После этого система представляется в виде совокупности инерционных, упругих, диссипативных и силовых элементов. Каждый элемент имеет имя, координату, характеристику (значение в виде числа или формулы) и структуру (функциональная зависимость его координаты от обобщенных координат).

В НТУ «ХПИ» создан программный комплекс КИДИМ, в основе которого лежит СКА, позволяющая вводить исходные данные в формульном виде, вычислять их, дифференцировать, строить на этой основе уравнения. Система позволяет также выводить результаты в виде уравнений, записанных в обычной дифференциальной форме, анализировать их решения, строить таблицы и графики, сформировать отчет. Комплекс создавался с 1980-х гг. на кафедре теоретической механики ХПИ под руководством профессора Л. И. Штейнвольфа и предназначался для исследований динамики систем с ДВС [5; 141; 161; 163]. Он позволяет рассматривать модели дискретных механических систем произвольной структуры с неголономными и нестационарными связями, в том числе и совершающих пространственные движения, провести их кинематические исследования, построить дифференциальные уравнения динамики и численно проинтегрировать их [7–9]. Особенностью комплекса является то, что для всех видов расчетов строится единая модель, позволяющая оперативно менять не только ее параметры, но и структуру системы. Встроенные в комплекс сервисные программы позволяют частично автоматизировать процесс подготовки исходных данных.

ГЛАВА 7

Крутильные колебания – одна из важнейших задач о колебаниях дискретных систем

7.1. Крутильные колебания корабельных валов

В развитии теории колебаний дискретных систем задача о крутильных колебаниях валопроводов силовых установок сыграла заметную роль. Именно для решения этой задачи были впервые разработаны многие методы, применявшиеся в теории колебаний. Это обусловлено, во-первых, важностью задачи, а, во-вторых, ее сравнительной простотой.

Не умея вычислить напряжений, обусловленных динамическими причинами, инженеры в сомнительных случаях зачастую просто увеличивали диаметр вала, что, однако, не всегда вело к уменьшению напряжений. В статье «К вопросу о явлении резонанса в валах», опубликованной в 1905 г. в известиях Санкт-Петербургского политехнического института, С. П. Тимошенко дал анализ первых работ, посвященных этому вопросу [228, с. 13–54]. Среди них он отметил статьи Г. Лоренца, Г. Фрама и Г. Мельвиля. Хотя при исследовании крутильных колебаний валопроводов зачастую необходимо учитывать и нелинейности, на первых порах рассматривались только линейные системы. Особенно полное исследование провел Г. Фрам, описавший в статье «Новые исследования динамических процессов в валопроводах судовых машин с учетом резонансных колебаний» (Frahm H. Neue Untersuchungen über die dynamischen Vorgänge in den Wellenleitungen von Schiffsmaschinen mit besonderer Berücksichtigung der Resonanzschwingungen, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingeniure, 1902, Bd. 46, № 22, S. 797–803; № 24, S. 880–888.) целый ряд опытов и обосновавший необходимость проверки конструкции валопровода на возможность резонанса [228, с. 24]. Вот, что пишет об этом С. П. Тимошенко: «Вспоминаю… какой интерес вызвала работа Г. Фрама, посвященная вопросу крутильных колебаний в пароходных валах. В работе было показано, что обычный статический расчет далеко не всегда достаточен, что нужно основываться на динамической постановке вопроса, т.е. рассматривать крутильные колебания и выбирать размеры вала так, чтобы устранить возможность явления «резонанса», при котором амплитуда крутильных колебаний и соответствующие напряжения могут достигнуть опасных пределов. Работа Г. Фрама показала, что вопрос об упругих колебаниях имеет огромное значение при проектировании быстроходных машин» [228, с. 679–680].

Появление ДВС на первом этапе их развития новых проблем, связанных с колебаниями, не добавило. Наиболее мощные из них – стационарные и судовые дизели из-за тихоходности по своим динамическим характеристикам были близки к паровым машинам. Поэтому вопросы их вибраций не беспокоили инженеров, за исключением, пожалуй, проблемы крутильных колебаний. Как уже отмечалось, на рубеже XX века возникла задача о крутильных колебаниях пароходных валов.

Для исследования крутильных колебаний валопроводов поршневых машин применяются дискретные механические модели. При этом строится система цепной структуры, приведенная, как правило, к валу двигателя, т.е. рассматривается дискретная модель, состоящая из s абсолютно твердых дисков с осевыми моментами инерции I_j, соединенных невесомыми упругими участками с крутильными жесткостями c_j. Способы ее построения достаточно хорошо изучены [150; 220].

Моменты возбуждения от сил давления пара, сил инерции и сил тяжести, действующие на приведенные цилиндровые массы, определяются по известным формулам в предположении, что коленчатый вал вращается с постоянной угловой скоростью [141, с. 68–69].

Для многоцилиндрового двигателя, в случае замены коленчатого вала одной приведенной массой, моменты складываются с учетом угла поворота данного кривошипа относительно первого. В отличие от ДВС, у которых сумма моментов сил инерции на коленчатом валу равна нулю, в паровых машинах эти моменты присутствуют, так как их цилиндры имеют разный диаметр и, соответственно, разные массы движущихся частей.

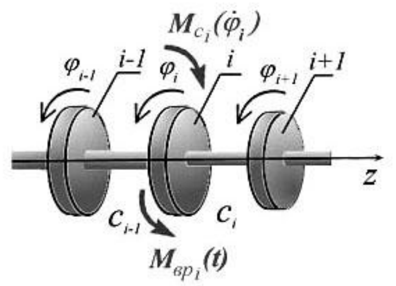

Рис. 7.1. Фрагмент дискретной механической модели валопровода

Применение спектральной теории приводит задачу о свободных колебаниях валопровода к решению векового уравнения (3.6), а задачу о вынужденных колебаниях – к решению системы (3.14). Для цепной системы задача облегчается, так как уравнения легко записываются в прямой форме. При этом для составления дифференциальных уравнений колебаний не обязательно использовать аппарат аналитической механики. Запишем, например, уравнение движения для i-го инерционного элемента – диска с моментом инерции I_i и обобщенной координатой φ_i фрагмента крутильной системы (рис. 7.1). На диск действуют возмущающие силы с моментом $M_{вр_i}(t)$, силы сопротивления с моментом пропорциональным угловой скорости $M_{ci}(\dot{\varphi}_i) = -\beta_i\dot{\varphi}_i$, а также упругие силы от соседних с диском участков вала с соответствующими моментами

$$I_i\ddot{\varphi}_i = c_{i-1}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) - c_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) - \beta_i\dot{\varphi}_i + M_{вр_i}(t) \; .$$

Здесь c_i – жесткости соответствующих участков валопровода.

При рассмотрении системы цепной структуры в определителе (3.6) собственная частота присутствует только в диагональных элементах. Например, в случае, если обобщенными координатами являются углы поворота приведенных масс системы φ_j, определитель (3.6), построенный для свободных крутильных колебаний валопровода имеет вид

$$\begin{vmatrix} c_{11}-I_1k^2 & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22}-I_2k^2 & \cdots & c_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{s1} & c_{s2} & \cdots & c_{ss}-I_sk^2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (7.1)$$

где c_{ji} – упругие коэффициенты, зависящие от крутильных жесткостей системы и ее структуры, а I_i – моменты инерции тел.

Поскольку вся крутильная система может свободно вращаться, один из корней векового уравнения (7.1) будет иметь нулевой корень, которому соответствует частное решение $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_s = C_1 + C_2 t$, т.е. физический смысл нулевой частоты это вращение всей системы как единого целого. При нумерации частот нулевую частоту учитывать не принято.

Появление двигателей Дизеля первоначально существенных изменений в проблемы динамики не внесло. Для стационарных двигателей, имевших небольшие обороты и солидную массу характерна только первая форма колебаний с узлом вблизи маховика [253, с. 172]. Для судовых паровых машин и дизельных установок также характерны небольшие обороты (до 600 об/мин у дизелей и еще меньше у паровых машин) и длинный гребной вал (см. рис. 7.2). При низкочастотном возбуждении существенное значение имеют только две первые формы крутильных колебаний – первая имеет узел посредине гребного вала, а вторая – на коленчатом валу вблизи маховика и для их получения достаточно рассматривать систему с тремя маховыми массами (см. рис. 7.3). Таким образом, рассматривается система, состоящая из приведенной массы коленчатого вала двигателя, маховика и гребного винта. Следует отметить, что хотя массы валов соизмеримы с массами остальных тел, их моменты инерции на два порядка меньше, и инерционными свойствами валов можно пренебречь [81, с. 158–159; 253, с. 173]. Позже мы покажем, как их учитывать, если в этом есть необходимость.

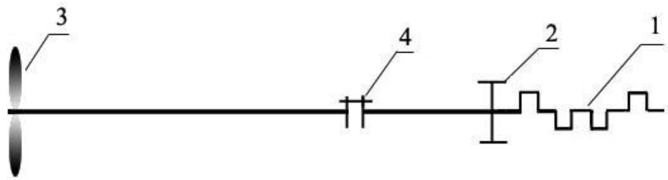

Рис. 7.2. Схема валопровода теплохода (парохода)

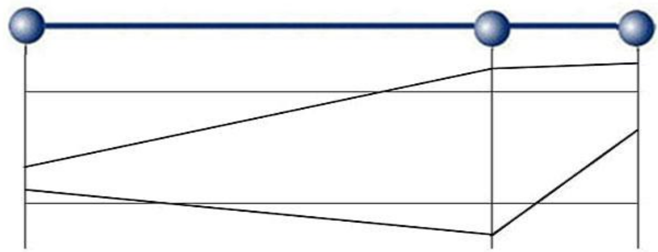

Рис. 7.3. Модель и формы колебаний валопровода теплохода

Однако зачастую можно рассматривать еще более простую модель, объединив вал машины с маховиком. В своей статье Фрам рассматривает крутильные колебания именно такой системы (рис. 7.4), состоящей из приведенного момента инерции паровой машины вместе с маховиком 1, гребного винта 2 и соединяющего их вала [228, с. 13–54]. Данная система имеет две собственные частоты $k_1 = 0$ и

$$k_2 = \sqrt{c\,\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}}\,.$$

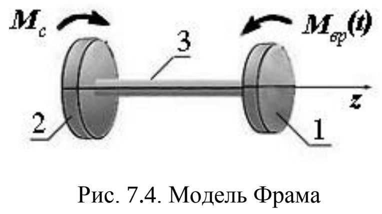

Рис. 7.4. Модель Фрама

Соответствующую второй собственной частоте форму колебаний построим, приняв $A_1 = 1$ и подставив это значение в любое из двух уравнений системы, описывающей свободные колебания, откуда найдем $A_2 = -\dfrac{I_1}{I_2} A_1$.

Выбрав в качестве обобщенной координаты угол закручивания вала $\vartheta = \varphi_2 - \varphi_1$, легко выделить чисто колебательную составляющую решения. Запишем систему дифференциальных уравнений свободных колебаний в виде

$$\ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0;$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$$

и вычтем первое уравнение из второго

$$\ddot{\vartheta} + \left(\frac{c}{I_1} + \frac{c}{I_2}\right)\vartheta = 0\,. \tag{7.2}$$

Решение уравнения (7.2) ищется в виде $\vartheta = A\sin(kt + \alpha)$, а единственная собственная частота

$$k = \sqrt{\frac{c}{I_1} + \frac{c}{I_2}} = \sqrt{c\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}} \tag{7.3}$$

будет такая же, как вторая частота k_2 в предыдущем случае.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания под действием вращающего момента сил давления пара на поршни машины и сил инерции, а также момента сил сопротивления вращению гребного винта, которым соответствует система дифференциальных уравнений

$$\ddot{\varphi}_1 - \frac{c}{I_1}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{M_{вр}}{I_1};$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{c}{I_2}(\varphi_2 - \varphi_1) = -\frac{M_c}{I_2}.$$

Так как нас интересует вопрос только о колебаниях вала, т.е. зависимость его угла закручивания от времени, разделим первое уравнение на I_1, а второе на I_2 и вычтем второе уравнение из первого

$$\ddot{\vartheta} + c\vartheta\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} = \frac{M_{вр}}{I_1} + \frac{M_c}{I_2}\,. \tag{7.4}$$

Если вращающий момент $M_{вр}$ и момент сопротивления M_c являются величинами постоянными, то уравнению (7.4) удовлетворяет решение $\vartheta = const$. Это выполняется, если вал приводится в движение электромотором или турбиной. В таком случае его расчет следует вести по формулам, относящимся к статически приложенным силам. Для поршневых же машин вращающий момент считать постоянным нельзя.

Предположим, что правая часть дифференциального уравнения (7.4) нам известна как функция времени $\frac{M_{вр}}{I_1}+\frac{M_c}{I_2}=f(t)$. Для решения уравнения (7.4) тогда используется разложение этой функции в ряд Фурье и принцип суперпозиции. Сейчас разложение периодической функции в ряд Фурье давно уже не представляет никакой проблемы, но на рубеже XX века это была сложная задача. Тогда пользовались способом Фишер – Хиннена, предложенного им в 1894 г.[*] или гармоническим анализатором, дававшим за один обход пять и более гармоник ряда Фурье [228, с. 16]. В монографии [181, с. 80–87] описан гармонический анализатор Mader – Ott, позволяющий определять до 25 гармоник разложения в ряд Фурье. Когда разложение тем или иным способом выполнено, мы можем переписать уравнение (7.4) в виде (3.13) и, используя принцип суперпозиции решений легко получить решение уравнения

$$\vartheta=\vartheta_0+\vartheta_1^s\sin\omega t+\vartheta_1^c\cos\omega t+\vartheta_2^s\sin 2\omega t+\vartheta_2^c\cos 2\omega t+\dots,$$

где $\vartheta_i^s=\dfrac{f_i^s}{k^2-(2\omega)^2}$; $\vartheta_i^c=\dfrac{f_i^c}{k^2-(2\omega)^2}$.

Основной задачей Фрама было отыскание причин поломки пароходных валов, которые проектировались так, чтобы максимальные касательные напряжения не превосходили значения 200–230 кГ/см^2 (20–23 МПа). Однако характер излома вала показывал, что разрушение происходит именно от скручивания (см. рис. 7.5). Задача исследования крутильных колебаний, несмотря на примитивность модели, не такая простая, как может показаться на первый взгляд. Это связано с тем,

---

[*] Способ описан в работе «Решение практических вопросов о машинах постоянного тока графическим путем» (Fisher-Hinnen J. Lösung einiger praktischer Fragen űber Gleichström-maschinen auf graphischem Wege. Elektrotechnische Zeitschrift, 1894, Jahrgang XV, Heft 29, 19 Juli, SS. 397–402. Eine neue Methode zur Vermeidung der Funkenbildung von Gleichströmmaschinen).

что мы не знаем зависимостей моментов возмущающих сил от времени. Для их определения Фрам провел экспериментальные исследования. Он измерял угол закручивания и скорости точек вала в двух сечениях – у машины и как можно ближе к гребному винту. На рис. 7.6 приведены законы изменения максимального касательного напряжения $\tau_{\max}$ за один оборот вала на режиме 83 об/мин, записанные этим талантливым инженером на пароходе «Безоцкий» [228, с. 21]. Фрам вычислил $\tau_{\max}$ при различных углах поворота вала и пришел к выводу, что его среднее значение совпадает с данными статического расчета – 218 кГ/см^2. Однако максимальное и минимальное значения изменяются от 600 кГ/см^2 до -166 кГ/см^2 (от 30 до -5,5 МПа). А на режиме 85,8 об/мин максимальное касательное напряжение превосходило даже значение 800 кГ/см^2 (80 МПа). Если к тому же учесть, что эти высокие напряжения повторялись три раза за один оборот вала, то понятна причина поломок. Даже если $\tau_{\max}$ не превышает предела прочности, разрушение произойдет от усталости.

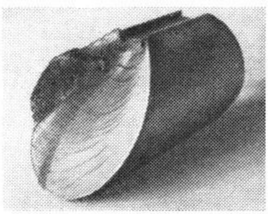

Рис. 7.5. Вид излома вала при разрушении от скручивания

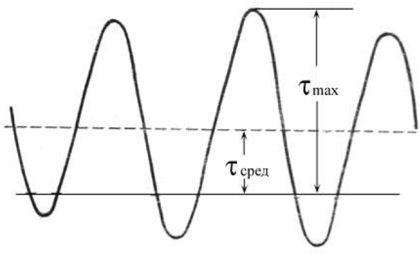

Рис. 7.6. Характер изменения касательных напряжений вала парохода

Далее Фрам провел теоретическое исследование вынужденных крутильных колебаний пароходного вала. При этом вращающий момент $M_{вр}$ от сил давления пара, сил тяжести и инерции он определил аналитически. Момент сил сопротивления воды вращению винта Фрам нашел из уравнения

$$M_c = M_{упр} - I_2\ddot{\varphi}_2 .$$

Здесь $M_{упр}$ – момент внутренних упругих сил. Из ряда опытов он установил, что момент сопротивления может быть представлен в виде

$$M_c = c\omega^{\mu},$$

где c – постоянный множитель, ω – угловая скорость вращения винта, μ – число, принимающее значение от 3,6 до 4. Вычисленные Фрамом аналитически амплитуды колебаний вала очень близко совпали с данными эксперимента.

В результате экспериментов, проведенных на пароходе «Радамес», Фрам получил диаграмму, дающую представление о том, насколько сильно амплитуды колебаний зависят от близости угловой скорости вала к резонансной частоте, имеющей в данном случае значение 83 об/мин. На рис. 7.7 показана запись колебаний угла закручивания вала при различном числе оборотов машины [228, с. 23]. Из опытов видно, что отклонение от этого режима на 6 – 7 оборотов в любую сторону позволяет получить довольно спокойный ход машины.

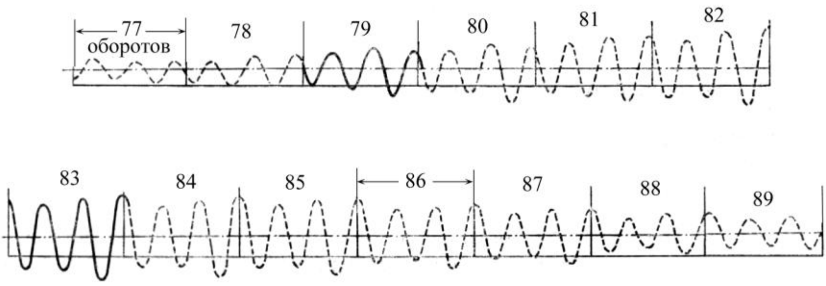

Рис. 7.7. Запись колебаний угла закручивания вала парохода при различном числе оборотов машины

В заключение своей работы Фрам приходит к выводу о том, что общепринятого статического расчета для пароходного вала недостаточно, а необходимо исследование на возможность резонанса. После выбора путем статического расчета диаметра вала необходимо определить собственную частоту системы по формуле (7.3). Если число колебаний вала в минуту $n = \frac{30}{\pi}k$ окажется кратным числу оборотов машины, то этот диаметр должен быть изменен, т.е. должен быть подобран такой полярный момент инерции сечения вала J_p, чтобы номинальное число оборотов было достаточно далеко от собственной частоты. С этой точки зрения может оказаться более благоприятным даже уменьшение диаметра вала. При решении задачи Фрам не учитывал массу вала, поскольку его момент инерции мал по сравнению с моментом инерции гребного винта и приведенным моментом инерции машины.

В статье [228, с. 13–54] С. П. Тимошенко не только анализирует опубликованные работы, но рассматривает и более общие случаи, когда момент инерции вала соизмерим с моментами инерции крайних масс и даже превосходит их. Для ответа на вопрос, какую часть массы вала следует учитывать при составлении дискретной модели, он пользуется приемом, основанным на применении метода Рэлея, изложенном в «Теории звука» [215, с. 132]. Сущность этого приема заключается в том, что на первом этапе рассматривается более простая модель, не учитывающая массу вала, для которой определяются частоты и формы колебаний. Затем записываются кинетическая и потенциальная энергии в виде квадратичных форм (3.1). Считая, что масса вала не очень сильно влияет на форму колебаний и тем самым на перемещения сечений вала, выражение для потенциальной энергии можно не изменять, а вот кинетическую энергию следует рассмотреть заново с учетом инерции участков вала. Этим способом С. П. Тимошенко получает правило для вычисления приведенных моментов инерции модели, показанной на рис. 7.4. При неравных моментах инерции I_1 и I_2 одну треть момента инерции вала $I_в$ следует разделить на части, в отношении обратном I_1 и I_2 и полученные значения добавить к моментам инерции приведенных масс 1 и 2:

$$I_{1пр} = I_1 + \frac{I_в}{3}\frac{I_2}{I_1 + I_2};$$

$$I_{2пр} = I_2 + \frac{I_в}{3}\frac{I_1}{I_1 + I_2}.$$

Г. Лоренц в статье «Динамика кривошипно-шатунного механизма с учетом особенностей корабельных машин» (Lorenz H. «Dynamik der Kurbelgetriebe mit besonderer Berücksichtigung der Schiffmaschinen. Leipzig, B.G. Teubner, 1901, S. 156») при учете массы вала просто распределил его момент инерции поровну между крайними массами.

С. П. Тимошенко сравнивает решение, полученное по методу Рэлея, с результатом, приведенном в статье Г. Лоренца и точным решением, полученным аналитическим путем. Собственная частота системы получилась:

– без учета массы вала $k = 319{,}2$ кол/мин;
– в статье Г. Лоренца $k = 309{,}3$ кол/мин;
– по методу Рэлея $k = 314{,}1$ кол/мин;
– точное решение $k = 314{,}9$ кол/мин.

Далее Тимошенко рассматривает точное определение периода свободных колебаний вала, на концах которого имеются шкивы, а также рассматривает случай вала с тремя шкивами – случай паровой машины, приводящей в движение динамомашину (генератор) с маховым колесом между ними [228, с. 45–54].

Примитивные двух- и трехмассовые модели могли рассматриваться для паровых машин и тихоходных дизелей. Для таких моделей решение векового уравнения или системы линейных алгебраических уравнений не составляет особого труда и основным вопросом при исследовании крутильных колебаний является вопрос определения параметров дискретной системы. Это не только подсчет крутильных жесткостей и приведенных моментов инерции самой машины, но определение сопротивления и даже учет увлекаемой винтом массы воды.

В монографии профессора В. К. Житомирского [81, с. 158–160] описан случай поломки вала танкера грузовместимостью 7 000 т. Танкер имел два четырехцилиндровых двухтактных дизеля, с максимальным режимом 110 об/мин. В одном из рейсов теплоход потерял гребной винт вместе с хвостовиком вала. Характер излома под углом 45° показывал, что авария произошла по причине скручивания. Для данных установок на заводе производился расчет свободных крутильных колебаний на упрощенной трехмассовой модели (см. рис. 7.3) и дал значение первой собственной частоты k_1 = 524 кол/мин, что обеспечивало смещение от наиболее опасного резонанса 4-й гармоники (440 кол/мин) не менее чем на 19 %.

Проверка расчета показала, что момент инерции винта был подсчитан без учета массы увлекаемой винтом воды. Уточненный расчет дал значение $k_1 = 456$ кол/мин. Торсиографирование вала показало, что действительно собственная частота равна 455 кол/мин, т.е. «запас» составлял всего 3,5 %. При этом на других танкерах этой серии аварии не наблюдались. Оказалось, что за три месяца до поломки для повышения эффективности судна двигатели этого танкера были отрегулированы на 115 об/мин, т.е. частота главной гармоники оказалась 460 кол/мин. Это означало, что длительное время установка эксплуатировалась на резонансных оборотах. Небольшим увеличением диаметра вала между маховиком и муфтой, не требующим замены подшипников, удалось отстроить резонансную частоту на 6 %, чего оказалось вполне достаточно для безаварийной работы [81, с. 160].

7.2. Крутильные колебания силовых установок с двигателями внутреннего сгорания

Развитие двигателестроения, появление легких быстроходных ДВС привело к тому, что при крутильных колебаниях стали деформироваться не только элементы силовой передачи, но и коленчатые валы. Это обстоятельство вынудило рассматривать системы с бóльшим числом степеней свободы. Однако для систем, имеющих пять и более степеней свободы, решение векового уравнения уже представляло серьезные затруднения. Методы, применявшиеся астрономами, не годились для проведения инженерных расчетов из-за их громоздкости, поэтому инженерами разрабатывались различные графические и численные методы расчетов.

Из множества методов решения задачи о свободных колебаниях валов, представляющих собой цепные неразветвленные системы наибольшее распространение, в том числе и в СССР, получили методы, предложенные Гюмбелем, Хольцером и Толле. Эти методы схожи по существу, но различаются по форме. Графические методы Гюмбеля и Хольцера проще в реализации, но неудобны при расчете длинных валов [55, с. 63].

Метод остатков, предложенный в 1921 г. немецким ученым Максом Толле в работе «Регулирование двигателей», заключался в последовательном вычислении значений левой части векового уравнения (7.1) для пробных собственных значений. Эти вычисления проводятся по определенной схеме (таблицы Толле). Номер полученной в результате собственной частоты определяется по числу перемен знака формы колебаний, которое должно быть на единицу меньше номера частоты. По существу метод таблиц Толле является упрощенным вариантом более общего ***метода начальных параметров***, предложенного позднее академиком А. Н. Крыловым [18, с. 223]. Основным же недостатком метода Толле является невозможность его применения к более сложным разветвленным системам без их предварительного преобразования [241, с. 441]. Кроме того, при его использовании невозможно заранее сказать, какое количество выкладок потребуется произвести для того, чтобы «нащупать» с достаточной точностью те зоны возможных значений частот, возле которых лежат собственные частоты крутильных колебаний.

Применению метода Толле для расчета крутильных колебаний валопроводов дизельных установок посвящена работа заведующего дизельным бюро Коломенского паровозостроительного завода Н. М. Урванцева [234]. Автор подробно излагает метод Толле, используя вместо жесткости податливости, что позволяет вместо операций умножения и деления, применяемых в методе Толле, выполнять при составлении таблиц только умножения. При этом приводятся практические рекомендации для определения параметров крутильной системы [234, с. 27–29].

В 1930 г. инженер Коломенского завода В. П. Терских предложил метод расчета крутильных колебаний, основанный на записи уравнения частот в виде непрерывной (цепной) дроби. Метод заключается в том, что s корней данного уравнения, т.е. собственные частоты, определяются последовательными пробами. При этом номер частоты определяется по количеству узлов в полученной форме колебаний. В отличие от метода Толле, метод цепных дробей пригоден и для разветвленных систем. Он был опубликован в двух статьях в журнале «Вестник инженеров и техников» [217; 218], но широкую известность приобрел после Первой Всесоюзной дизельной конференции, которая проводилась в 1933 г. [219]. В 1940-е гг., метод цепных дробей получил широкое распространение [221]. Дальнейшим развитием метода цепных дробей стал ***метод динамических жесткостей*** [261].

В работе [168] А. Н. Крылов критически проанализировал методы Лапласа, Лагранжа, Леверрье и Якóби, нашел их «сложными и неудобными» и предложил свой метод, не требующий развертывания определителя векового уравнения. В результате преобразований определитель принимает такой вид, при котором k^2 присутствует только в его первом столбце. Метод Крылова требует значительно меньшего числа операций [242, с. 33–34]. Однако, по мнению инженеров, этот метод, также сложен для практического использования [243, с. 32].

П. Ф. Папкович предлагает метод, который он считает более практичным, и в котором обходятся затруднения, возникающие в классических методах развертывания определителя и связанные с необходимостью вычисления малых разностей близких величин. В сообщении Ленинградскому Механическому обществу он сопоставил упомянутые выше классические методы, с теми, которыми пользовалась техника, а именно с методом последовательных приближений, методом Рэлея – Ритца и их видоизменениями [189].

Профессор из Таганрога А. П. Черевков подверг критике все имеющиеся численные и графические методы и предложил свой аналитический метод определения собственных частот крутильной системы [250]. Однако, по нашему мнению его метод, содержащий тройные интегралы, еще менее доступен для практического использования.

Поскольку часто при расчетах надо знать только первые две собственные частоты колебаний крутильной системы валопровода, многие исследователи шли по пути упрощения системы, т.е. сведения ее до трех – четырех степеней свободы. Для таких систем собственные частоты и формы могут быть вычислены путем решения векового уравнения аналитически.

С. П. Тимошенко рассматривает пример из книги Хольцера «Расчет крутильных колебаний» (H. Holzer Die Berechung der Drehschwingungen, Berlin, 1921) [229, с. 147]. На рис. 7.8 приведены схема и параметры модели – моменты инерции масс в кГ·м·с^2 и приведенные длины валов в м. По тогдашним правилам приведения системы, валы приводились к одному диаметру и имели разную приведенную длину, соответствующую их податливости при принятой жесткости вала на кручение, которая в данном случае равна $GJ = 10^{10}$ кГ/см^2.

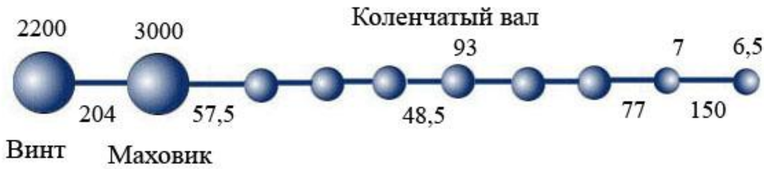

Рис. 7.8. Пример валопровода из книги Хольцера

Поскольку данная система имеет две большие массы и множество мелких, ее упрощение идет по пути объединения малых масс. Тимошенко приводит систему к трем массам, сохранив при этом две тяжелые массы и объединив все остальные в одну, расположенную посредине коленчатого вала, с моментом инерции равным сумме моментов инерции всех масс. Далее в своей книге [229, с. 147] он приводит результаты расчета модели, упрощенной на основе теоремы Рэлея (см. табл. 7.1).

А. П. Черевков в работе [251] излагает алгоритм приведения данной системы к четырехмассовой, где все мелкие массы заменяются не одной, а двумя массами, расположенными по такому правилу – масса № 3 с моментом инерции равным 2/3 суммарного момента инерции располагается на расстоянии четверти общей длины валов, а остальная масса – на расстоянии 3/4 длины валов от третьей массы. Данная модель приведена на рис. 7.9.

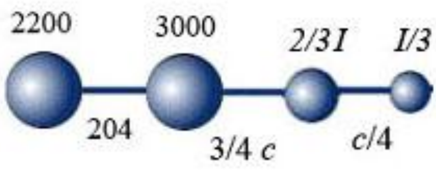

Рис. 7.9. Упрощенная модель А. П. Черевкова

Трехмассовая модель, предложенная С. П. Тимошенко, позволяет точно определить только первую собственную частоту, метод Рэлея, также реализованный Степаном Прокофьевичем, дает неплохой результат и для второй частоты, однако завышенный на 4,5 %. Лучше результат для первых двух частот, полученный в четырехмассовой модели А. П. Черевкова, хотя, конечно, третья частота тут не имеет никакого смысла. Результаты применения различных методов приведены в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Автор	Номер частоты			
	1	2	3	4
Точное решение	223,2	375,5	1 017,4	1 629,1
С. П. Тимошенко	221,4	350,7	–	–
Упрощение по методу Рэлея	223,6	392,4	–	–
А. П. Черевков	223,7	375,7	683,5	–

Таким образом, проявляющиеся в валопроводах паровых машин и тихоходных дизелей крутильные колебания, были достаточно хорошо изучены уже к 30-м гг. XX века. Однако, несмотря на это, расчеты судовых валов и в 1940 г. по-прежнему проводились в статической постановке. Например, для определения минимального диаметра коленчатого вала Английским Ллойдом и Регистром СССР была принята эмпирическая формула, в которой не учитываются крутильные колебания валов [13, с. 213].

Появление быстроходных ДВС со сложными силовыми передачами потребовало учета в их дискретных моделях уже многих масс. У новых машин был более плотный спектр собственных частот крутильных колебаний, что сделало невозможной отстройку системы от резонанса. В связи с этим важным видом расчета стал расчет вынужденных колебаний, причем не только установившихся, но и переходных режимов. Сложные силовые передачи включали в себя различные виды упругих соединений, таких как, муфты с нелинейными характеристиками, зубчатые передачи, в которых требовалось учитывать технологический зазор, карданные валы и др. Это обстоятельство потребовало разработки методов расчета нелинейных колебаний. Именно задачи о крутильных колебаниях силовых установок с ДВС стали первыми задачами, где использовались многие новые методы и изучались новые колебательные явления.

При изучении динамики паровых машин и на ранних этапах развития ДВС крутильные колебаний возникали не в коленчатых валах, которые были достаточно жесткими, а в длинных валопроводах. Равномерность вращения этих тихоходных машин вполне обеспечивалась центробежным регулятором Уатта и массивным маховиком. Однако с появлением быстроходных ДВС облегченной конструкции резонансные колебания стали возникать и в самих коленчатых валах двигателей, что вынудило инженеров заняться этим вопросом. На I Всесоюзной дизельной конференции инженер из Всесоюзного теплотехнического института (ВТИ) В. К. Житомирский сформулировал требования, предъявляемые к динамическим характеристикам ДВС [230, с. 175–184]:

1. Двигатель должен работать спокойно, без рывков и сотрясений;

2. Должна быть соблюдена определенная степень неравномерности;

3. При внезапном сбросе нагрузки заброс (мгновенное повышение) числа оборотов не должен превышать определенной величины.

Житомирский отметил, что лет тридцать назад (на рубеже XX века) считали, что все эти требования обеспечиваются установкой тяжелых маховиков. Однако теория колебаний разрушила эти воззрения. Маховик обеспечивает выполнение только третьего требования, зато его установка может изменить вибрационные характеристики системы и привести к резонансу. Определение частот и форм свободных колебаний существенно усложнилось, когда узлы колебаний стали возникать не только в присоединенных к двигателю частях валопровода, но и на самом коленчатом валу. Это потребовало разбивать последний на отдельные цилиндровые массы и увеличило порядок рассматриваемой системы.

7.3. Крутильные колебания в линейных системах

Как уже отмечалось, задача определения собственных частот линейной системы сводится к решению векового уравнения (3.6) или к определению собственных значений и собственных векторов квадратных матриц (3.7). Поэтому для расчетов свободных колебаний применимы как методы линейной алгебры, так и методы, разработанные в теории колебаний. Благодаря прямой форме записи уравнений, при рассмотрении крутильных колебаний, определитель (7.1) содержит квадрат собственной частоты только в диагональных элементах. Это обстоятельство существенно упрощало определение собственных частот крутильных систем. Хотя расчетами свободных колебаний таких систем занимались многие видные специалисты прикладной теории колебаний, среди которых можно выделить А. Н. Крылова, Г. Фрама, С. П. Тимошенко, М. Толле и В. П. Терских, проблема расчета крутильных колебаний оставалась насущной в двигателестроении 1930-х гг. Поскольку собственные частоты и форм крутильных приведенных систем нужны для оценки возможности попадания этих частот в рабочий диапазон или при энергетических методах расчета амплитуд резонансных колебаний, то часто исследователи ограничивались определением лишь нескольких низших частот.

Результаты расчетов свободных колебаний эффективно применяли для расчетов различных переходных процессов, но в этом случае необходимо иметь весь спектр частот и форм.

Расчетами крутильных колебаний занимались и представители харьковской научной школы механики. Среди них один из основоположников этой школы, создатель одного из первых курсов теории колебаний профессор И. М. Бабаков [21, с. 40]. Иван Михайлович использовал для приближенных вычислений собственных частот крутильных систем метод приближения не частотами, как у Толле, а формами колебаний. Он предложил записывать дифференциальные уравнения крутильных колебаний в обратной форме [17, с. 55, 24]

$$\varphi_i = -\sum_{j=1}^{s} \delta_{ij} \ddot{\varphi}_j \ , \quad i = 1, 2, ..., s \, , \tag{7.5}$$

где δ_{ij} – статические коэффициенты влияния, представляющие собой изменение координат φ_i от единичной обобщенной силы, соответствующей обобщенной координате φ_j. Согласно принципу взаимности перемещений $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

Подстановка решения

$$\varphi_i = \alpha_i \sin\left(kt + \varepsilon\right), \quad \left(i = 1, 2, \ldots, s\right) \tag{7.6}$$

в (7.5) приводит задачу к системе алгебраических уравнений

$$\alpha_i = k^2 \sum_{j=1}^{s} \delta_{ij} \alpha_j \ , \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, s\right). \tag{7.7}$$

Для использования метода приближения формами колебаний нужно задаться системой s положительных чисел $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, ..., \alpha_s^{(0)}$ (исходная форма), чтобы вычислить первое приближение

$$\alpha_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{s} \delta_{ij} \alpha_j^{(0)} \, , \quad \left(i = 1, 2, \ldots, s\right). \tag{7.8}$$

Затем процесс приближений $\alpha_1^{(m)}, \alpha_2^{(m)}, ..., \alpha_s^{(m)}$ продолжается по формуле (7.8), для чего каждый раз записывается неравенство

$$\min \alpha_i^{(m-1)} \Big/ \alpha_i^{(m)} < k_1^2 < \max \alpha_i^{(m-1)} \Big/ \alpha_i^{(m)} \, , \ \left(i = 1, 2, \ldots, s\right). \tag{7.9}$$

В работе [16, с. 58–59] приводятся доказательства двух теорем о сходимости решения, описываемого неравенством (7.9) к точному значению первой собственной частоты.

Третья теорема [16, с. 63] устанавливает более точную верхнюю границу первой собственной частоты с учетом формулы Рэлея (3.9)

$$k_1^2 < \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{(0)} \alpha_i^{(m-1)} \Bigg/ \sum_{i=1}^{s} \alpha_i^{(0)} \alpha_i^{(m)} \, . \tag{7.10}$$

Метод последовательных приближений формами колебаний можно применить к определению и высших частот. Для этого И. М. Бабаков предложил исключить с помощью условия ортогональности собственных форм одну искомую амплитуду, сведя тем самым задачу к системе с (s-1) степенью свободы, основная частота которой будет второй частотой исходной системы [15, с. 111].

Однако самую высшую собственную частоту методом последовательных приближений можно определить и сразу. Для этого в качестве обобщенных координат используются углы закручивания отдельных участков валопровода. Переходя к обратным величинам $p^2 = 1/k^2$, строим аналогичный алгоритм, причем все теоремы о границах собственных частот распространяются и на этот случай [14, с. 77]. Полученное решение позволяет определить наивысшую собственную частоту $k_s^2 = 1/p_1^2$. В своих исследованиях И. М. Бабаков показал, что удовлетворительные для практических задач результаты получаются уже при втором приближении формами колебаний. При этом, по крайней мере для систем размерностью до 12 степеней свободы, требуемое количество операций меньше, чем в методе Толле [15, с. 122]. Впоследствии И. М. Бабаков обобщил свой метод на другие виды систем и привел его в учебнике «Теория колебаний» [18, с. 157–169].

Харьковский ученый А. М. Данилевский в 1937 г. предложил метод, основанный на приведении определителя (4.4) к так называемой форме Фробениуса [242, с. 34–35].

$$\begin{vmatrix} h_{11}-k^2 & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1s-1} & h_{1s} \\ 1 & -k^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -k^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -k^2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (7.11)$$

Из определителя (7.11) легко получаем степенное вековое уравнение

$$k^{2s} - h_{11}k^{2(s-1)} + h_{12}k^{2(s-2)} - ... - h_{1s-1}k^2 + h_{1s} = 0\,. \qquad (7.12)$$

Приведение к форме Фробениуса может быть выполнено самыми простыми средствами с достаточной для практики точностью и требует в полтора раза меньше операций, чем метод А. Н. Крылова. Молодой, подающий большие надежды ученый, – Александр Михайлович Данилевский погиб при оккупации Харькова в годы Великой Отечественной войны.

К сожалению, методы Бабакова и Данилевского, несмотря на их эффективность, не нашли широкого применения в расчетной практике заводских КБ. Самыми распространенными там были методы остатка Толле и цепных дробей, предложенный В. П. Терских, которые широко применялись и после внедрения в расчетную практику вычислительной техники.

В 1960-е гг. в практику расчетов стало входить применение ЭВМ. Однако возможности машин были еще очень ограничены, поэтому длительное время определение собственных частот и форм колебаний проводилось с помощью различных приближенных методов. В частности, метод Терских применялся для проведения расчетов и с помощью ЭВМ, однако в ходе расчета могло потребоваться вмешательство оператора, так как уравнение в форме цепной дроби представляет собой разрывную функцию частоты [258, с. 107]. Большой вклад в компьютерную реализацию этого метода внес академик А. П. Филиппов. В монографии [242, с. 435–437] он описывает применение программы расчета собственных частот по методу Терских для разветвленной системы с 96 степенями свободы. Такая высокая для того времени размерность рассматриваемой системы делала метод цепных дробей конкурентоспособным и после распространения методов матричной алгебры. Однако программу А. П. Филиппова нельзя считать автоматической, так как она требует в процессе счета вмешательства оператора, что на заре компьютерной техники было очень существенным недостатком.

Профессор Л. И. Штейнвольф в статье [258, с. 106–107] и в докторской диссертации [256, с. 53–63] дал анализ различных методов расчета свободных крутильных колебаний на ЭВМ.

Среди них метод У. Кер-Вильсона [256, с. 55], который заключается в развертывании векового уравнения в алгебраический полином с последующим определением его корней последовательными пробами. Определение частоты связано с изменением знака полинома при проходе значения какого-либо корня с последующим дроблением шага для уточнения значения корня. Однако этот алгоритм требует развертывания громоздкого векового уравнения.

Этого недостатка лишен метод, основанный на подсчете числовых определителей. Записав определитель (7.11), можно вычислить его для различных пробных значений k^2 и по изменению знака определять собственные частоты. Однако для системы большой размерности и тут велико число операций, а увеличение шага пробных значений может привести к пропуску собственной частоты.

Другой алгоритм, исключающий пропуск собственных частот основан на применении теоремы Якоби – Сильвестра. Здесь для каждого пробного значения k^2 нужно определять знаки последовательных главных миноров $\left(\mathbf{C}-\mathbf{I}k^2\right)$ и по числу перемен знаков судить, вблизи какой из частот находится пробное значение k^2. Этот алгоритм обеспечивает автоматичность счета, однако у него также велико число операций.

Для определения нескольких первых собственных частот можно применять степенной метод в сочетании с понижением. Однако указанный итерационный процесс определяет собственные векторы и собственные значения с некоторой погрешностью, зависящей от точности предыдущего значения. Таким образом, при определении достаточно большого количества собственных частот может накапливаться значительная ошибка.

Дальнейшее развитие вычислительной техники позволило решить полную проблему собственных значений и собственных векторов с помощью итерационных методов, что, хотя и не сразу, позволило отказаться от всех вышеизложенных методов расчета. Так в 1952 г. был вновь открыт метод вращений Якоби. В работах [263; 268] разработан вычислительно ориентированный метод Якоби. Однако достаточно высокая трудоемкость данного метода заставила математиков искать новые алгоритмы. В статье [258, с. 108] Л. И. Штейнвольф обосновал применение для расчета собственных частот и форм крутильных колебаний QR-алгоритма, предложенного в 1961 г. независимо друг от друга В. Н. Кублановской [117] и Дж. Френсисом [262]. Этот алгоритм основан на преобразовании матрицы к треугольной форме и оказался эффективнее метода вращений Якоби. Однако для ЭВМ 1970-х годов ограничения по быстродействию и по объему памяти все еще оставались существенны, например, машина М-222 позволяла рассматривать только системы не выше 26-го порядка [70, с. 16]. В связи с этим при решении задач синтеза или оптимизации колебательных систем, где задача анализа решается многократно, исследователю приходилось уменьшать порядок системы, выделяя в ней только часть спектра собственных частот [76].

Решение полной проблемы собственных значений существенно упростило задачи о свободных колебаниях линейных дискретных систем, особенно для цепных систем, для которых дифференциальные уравнения этих колебаний очень легко строятся в прямой форме. Наибольшей трудоемкости при этом требует заполнение вручную матриц инерции, жесткости и демпфирования системы уравнений (3.11). Поэтому с начала 1970-х гг. под руководством Л. И. Штейнвольфа разрабатываются методы автоматического построения систем уравнений. В статье [163] рассматривается построение дифференциальных уравнений колебаний в прямой форме для цепных линейных систем с помощью структурных матриц. Записав обратные структурные матрицы, легко можно составить уравнения колебаний и в обратной форме [163, с. 7]. Применение аппарата структурных матриц для консервативных систем позволило уточнить ряд теорем теории колебаний, касающихся спектральных свойств дискретных систем [162, с. 18]. Дальнейшее развитие аппарата структурных матриц привело к созданию программного комплекса КИДИМ [5; 7], позволяющего автоматически строить математические модели, описывающие движение дискретных механических систем сложной структуры с произвольными связями. Таким образом, современное состояние теории колебаний и применяемых для их расчетов средств не требует выделения расчетов крутильных колебаний в отдельный класс задач.

Поскольку сам факт попадания собственной частоты в рабочую зону еще не означает, что проявится явление резонанса, особенно не для основных гармоник колебаний, важнейшим вопросом становится расчет вынужденных колебаний, а точнее определение напряжений кручения в валах при работе двигателя. В случае замены коленчатого вала двигателя диском с суммарным приведенным моментом инерции на него действует суммарный момент возбуждения, который зависит только от сил давления газов, так как приведенные к валу моменты сил инерции различных цилиндров при сложении взаимно уничтожаются. Тогда в разложении момента на коленчатом валу в ряд Фурье будут присутствовать только гармоники порядка N, $2N$, $3N$ и т.д. для двухтактного двигателя и $N/2$, N, $3/2\,N$ и т.д. для четырехтактного. Здесь N – число цилиндров двигателя. Половинные гармоники возникают оттого, что в двигателестроении для четырехтактных двигателей разложение в ряд Фурье принято относить не к периоду колебаний, который составляет у них два оборота, а к одному обороту.

Для расчета напряжений кручения В. П. Терских предлагает метод набегающих моментов, по сути, являющийся квазистатическим расчетом, т.е. расчетом усилий от моментов сил давления газов и сил инерции, без учета колебаний вала [222, с. 23]. Этот подход дает вполне приемлемые результаты для нерезонансных режимов колебаний, но при этом значения напряжений занижены. При резонансе Терских предлагает ввести динамические поправки, т.е. разности числовых величин упругого момента на данном участке, подсчитанные при динамическом и статическом способах учета внешних моментов [222, с. 27–37].

В практике расчета резонансных амплитуд широкое распространение получили энергетические методы, основанные на двух предположениях:

1) при установившихся колебаниях энергия, сообщенная системе возмущающими силами, равна энергии, рассеянной демпфирующими сопротивлениями;

2) форма установившихся резонансных колебаний совпадает с формой свободных колебаний системы на собственной частоте, соответствующей данной резонансной частоте и без учета сопротивления.

В таких расчетах задача сводится к определению резонансной амплитуды одной из масс, так как форма колебаний считается известной. Точность результатов здесь определяется точностью составления энергетического уравнения, и поэтому большое внимание уделяется экспериментальному определению демпфирующих сопротивлений и получению формул, достаточно хорошо отражающих количественные значения работы демпфирующих сил.

Для расчета резонансных вынужденных колебаний чаще всего применялись методы, предложенные Видлером и Льюисом. В их статьях приведены примеры вычисления амплитуд вынужденных колебаний в валопроводах дизелей. Там же приведены и данные о величине сопротивления гребного винта, генератора, цилиндров двигателя и внутреннего трения [229, с. 139].

Метод энергетического баланса, предложенный Видлером в книге «Крутильные колебания в поршневых машинах» («Drehschwingungen in Kolbenmaschinenlagen»), изданной в Берлине в 1922 г., строится на том факте, что при установившихся колебаниях энергия, сообщенная системе возмущающими моментами, равна энергии, рассеянной демпфирующими силами. Метод основан на построении таблиц, подобных таблицам метода остатка Толле [229, с. 152–153]. При этом предполагается, что форма вынужденных колебаний совпадает с формой свободных колебаний системы без учета сопротивления [75, с. 54]. Таким образом, независимо от характера распределения по системе гармонических возмущающих сил резонирующей частоты и без учета возмущающих сил, имеющих другие частоты, мы предполагаем, что вся система совершает колебания в одной фазе или противофазе, а отношения амплитуд соответствуют форме главных колебаний. Тем самым неизвестной становится только одна, например, первая амплитуда, и задача сводится к задаче с одной степенью свободы. Единственную амплитуду колебаний первой массы определяем, приравнивая по абсолютной величине работу сил трения за период работе возмущающих сил за тот же промежуток времени.

$$\delta A_{возм} = \delta A_{тр} \tag{7.13}$$

При этом Видлер предлагает все, без исключения демпфирующие сопротивления двигателя принимать пропорциональными первой степени скорости. Метод энергетического баланса получил в свое время широкое распространение в расчетной практике благодаря своей простоте и универсальности. Этот подход в наши дни сохранился в методе нелинейных нормальных форм. Однако он пригоден только для случая гармонического возбуждения и дает большие ошибки, если, вопреки предположению, действительная форма вынужденных колебаний существенно отличается от собственной формы.

Способ Льюиса основан на том предположении, что наибольшая часть рассеиваемой энергии приходится на упругий гистерезис. При этом величина рассеиваемой энергии определяется по способу Робетта. Этот метод дает хорошие результаты при расчетах коленчатых валов тяжелых тихоходных дизелей, изготовленных из мягкой стали, на опытах с которой и была получена формула Ровегта. Для быстроходных двигателей, коленчатые валы которых выполнены из легированных сталей и имеют меньший декремент колебаний, способ Льюиса подходит мало.

В целом можно отметить, что указанные методы достаточно приблизительны и позволяют получить только качественные результаты. С внедрением в расчетную практику ЭВМ стало возможным решать полную систему линейных алгебраических уравнений (3.14). Однако расчеты вынужденных колебаний все равно содержат в себе определенные трудности. Поскольку в рабочий диапазон двигателя попадает несколько резонансных режимов, при расчете вынужденных колебаний большое значение имеет демпфирование. Однако его точное задание невозможно, и оно заменяется эквивалентным вязким трением. Такая замена вполне адекватна, поскольку для рассматриваемых систем трение достаточно мало и важными оказываются только его интегральные характеристики за цикл колебаний, а не характер зависимости от движения [42]. При этом специфика ДВС такова, что коэффициенты трения непостоянны и имеют большие различия не только для различных образцов двигателя одного типа, но даже для данного двигателя в разные периоды его эксплуатации. В связи с этим проведение расчетов вынужденных колебаний требует сопоставления их результатов с экспериментами.

7.4. Крутильные колебания в нелинейных системах

До сих пор мы рассматривали крутильные колебания, описываемые с помощью линейных моделей. Однако валопроводы ДВС содержат нелинейности, как в упругих, так и в диссипативных характеристиках. Упругие нелинейные характеристики вызваны, как правило, зазорами в шлицевых и зубчатых соединениях, иногда это связано с нелинейными характеристиками материалов. Кроме этого нелинейные характеристики могут иметь муфты, соединяющие различные части передачи. Нелинейные характеристики трения обусловлены не только наличием упругого гистерезиса, но и, что более существенно, нелинейностями специальных гасителей колебаний – демпферов и антивибраторов. Принципиально различаются две основные группы нелинейных колебаний:

1) псевдогармонические, когда упругость системы зависит от перемещения. Большинство механических систем являются именно такими.

2) квазигармонические, где коэффициент упругости зависит от времени. Это могут быть колебания вращающегося ротора с неодинаковой жесткостью на изгиб или колебания в спарниках ведущей системы электровозов [229, с. 95–110].

В общем случае вынужденные колебания нелинейной системы с одной степенью свободы описываются дифференциальным уравнением

$$m\ddot{q}+F_{сопр}\left(q,\dot{q}\right)+F_{упр}\left(q\right)=F_{возм}\left(t\right). \qquad (7.14)$$

Здесь упругая сила $F_{упр}\left(q\right)$ является нелинейной зависимостью обобщенной координаты q, а сила сопротивления $F_{сопр}\left(q,\dot{q}\right)$ в общем случае может зависеть и от обобщенной координаты q, и от обобщенной скорости $\dot{q}$. Однако при расчете крутильных колебаний систем с ДВС, как правило, трение принимается вязким с линейной зависимостью момента от угловой скорости.

Типичным видом нелинейности упругой характеристики в валопроводах ДВС является нелинейность типа «зазор» (см. рис. 7.10). На рис. 7.11 показана амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) первой гармоники вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы и нелинейностью данного типа. Пунктиром на нем показана зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды первой гармоники. При этом в частотном диапазоне вблизи резонанса есть зона, где решение неоднозначно. Одно из трех решений, а именно то, амплитуда которого имеет среднее значение, является неустойчивым (на графике оно не показано). При проходе резонансной зоны в сторону повышения частоты амплитуда растет, пока не происходит срыв на малую амплитуду. При обратном проходе амплитуда первой гармоники скачком переходит на верхнюю устойчивую ветвь. Поскольку вынужденные колебания облегают кривую свободных колебаний, последняя называется ***скелетной кривой***

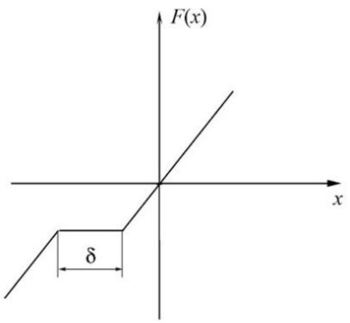

Рис. 7.10. Нелинейность типа «зазор»

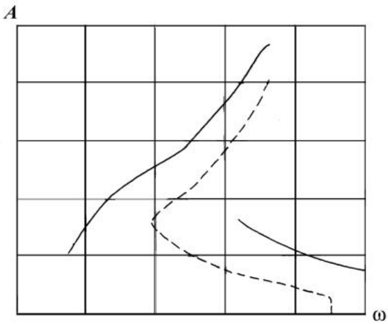

Рис. 7.11. Скелетная кривая и АЧХ первой гармоники вынужденных колебаний

Поскольку точное решение может быть получено только для самых простых случаев нелинейных систем, в конце XIX века наряду с методами малого параметра распространение поручили графические методы решения дифференциальных уравнений, описывающих их колебания.

Мартинссен в 1910 г. опытами над электрическими системами показал, что в случае нелинейной системы одна и та же вынуждающая сила может вызвать колебания двух различных амплитуд. Позже, в

1918 г., Г. Дуффинг провел подобные эксперименты с маятником. Аналитически же доказать неустойчивость средней ветви удалось К. Клоттеру только в 1953 г. [229, с. 79–84, 90].

Эффективным оказалось применение для расчетов нелинейных колебаний метода Ритца (Дуффинг в 1918 г.) и Бубнова – Галеркина (Лурье и Чекмарев в 1938 г. [149]). Для многих случаев нелинейных систем возможно также применение асимптотических методов Крылова – Боголюбова.

Большой вклад в развитие исследований крутильных колебаний, в том числе и нелинейных систем, внес сотрудник Украинского научно-исследовательского авиадизельного института Ю. А. Гопп, в работе которого [54] предложено графическое решение задач о линейных и нелинейных крутильных колебаниях, которые, по сути, являются геометрической интерпретацией известных аналитических решений тех же задач. Достоверность своего метода Гопп проверил на линейной модели, сравнивая результаты расчетов с аналитическим решением. Достоинство предлагаемого подхода в большей наглядности, а, следовательно, и в большей доступности предлагаемых методов для заводских инженеров. Рассматривая задачу о нелинейных колебаниях системы с одной степенью свободы, Гопп делает следующие выводы:

1. Частота колебаний зависит от начальной амплитуды.

2. Невозможно состояние резонанса, т.е. отсутствует частота возмущающего момента, при которой наблюдаются бесконечно большие амплитуды.

3. Под действием возмущающего гармонического момента возможно появление трех различных амплитуд колебаний, однако устойчивость некоторых из них сомнительна.

Анализ приведенных выводов показывает, что знания о поведении решения нелинейных систем находились в зачаточном состоянии. Если первый вывод является просто очевидным фактом, то второй вызывает недоумение, так как при многих видах нелинейностей «бесконечно большие амплитуды» превращают задачу в линейную. Что касается третьего вывода, то здесь речь идет о неустойчивости средней по величине амплитуды вынужденных колебаний в зоне неоднозначности решения. Разработанная методика была применена

Ю. А. Гоппом для изучения возможностей использования нелинейных муфт в силовых передачах авиамоторов [57].

Таким образом, в работах 1930–40-х гг., посвященных расчетам нелинейных колебаний, рассматриваются в основном системы с одной степенью свободы, которые позволяют получить только качественные результаты. Следует отметить, что системы с одной степенью свободы и кусочно-линейной характеристикой имеют точное решение. Оно может быть получено с помощью поэтапного интегрирования (припасовывания). Способ основан на последовательном решении линейной задачи на каждом отдельном участке. Постоянные интегрирования при этом получаются из начальных условий и условий перехода от одного участка к другому. Позже Ю. А. Гопп распространил метод припасовывания на случай нелинейных характеристик общего вида, применив для них кусочно-линейную аппроксимацию [56].

Поскольку для быстроходных двигателей система с одной степенью свободы неприемлема, в 1940 г. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым был разработан новый эффективный способ построения резонансных кривых для нелинейных крутильных колебаний, использующий асимптотический подход.

Широко в теории колебаний, например, систем с ДВС применяется способ прямой линеаризации, предложенный Я. Г. Пановко в 1952 г. [187, с. 123]. В основе этого более простого способа лежит замена нелинейной характеристики $F(q)$ линейным выражением

$$F^*(q)=c^*q \tag{7.15}$$

со специально подбираемым коэффициентом c^*. Уклонение заменяющей характеристики $F^*(q)$ от заменяемой $F(q)$ зависит от обобщенной координаты q (см. рис. 7.12)

$$r(q)=F(q)-F^*(q). \tag{7.16}$$

Оно может быть подчинено требованию минимума интеграла

$$J=\int_{-A}^{A} r^2 dq, \tag{7.17}$$

выражающего интегральное квадратическое уклонение $r(q)$ во всем интервале изменения координаты q.

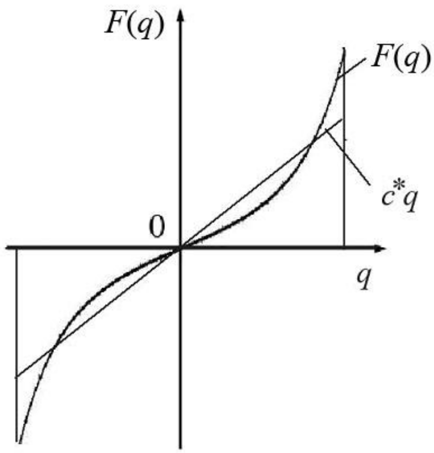

Рис. 7.12. Метод гармонической линеаризации

С помощью метода гармонической линеаризации при исследовании колебаний нелинейных систем строятся скелетные кривые и в настоящее время.

Таким образом, до внедрения в расчетную практику ЭВМ исследования нелинейных колебаний могли проводиться лишь на примитивном уровне. И только с появлением достаточно мощных ЭВМ широкое распространение получили методы расчета нелинейных колебаний особенно итерационные, применение которых невозможно без автоматизации счета.

В частности, в ХПИ под руководством профессора Л. И. Штейнвольфа В. М. Шатохиным была разработана программа расчета нелинейных крутильных колебаний на основе итерационного метода Ньютона – Канторовича (МНК), представляющего собой развитие метода Ньютона на операторные уравнения [98]. Для ее создания уравнения движения записывались в интегральной форме с помощью импульсно-частотных характеристик (ИЧХ). Рассмотрим нелинейную крутильную систему с N нелинейными элементами. Представим нелинейные характеристики в виде

$$f_j\left(\varphi_j,\dot{\varphi}_j\right)=c_j\varphi_j+\beta_j\dot{\varphi}_j+\bar{f}_j\left(\varphi_j,\dot{\varphi}_j\right),\quad j=1,2,\ldots,N \qquad (7.18)$$

Теперь систему можно рассматривать как линейную с коэффициентами линеаризации c_j и β_j, а для полного соответствия с исходной в линеаризованных элементах необходимо приложить внешние периодические моменты

$$\tilde{M}_j\left(\varphi_j,\dot{\varphi}_j\right)=-\bar{f}_j\left(\varphi_j,\dot{\varphi}_j\right),\quad j=1,2,\ldots,N\,. \qquad (7.19)$$

С учетом этих моментов для углов поворота линеаризованных участков запишем систему нелинейных уравнений типа Гаммерштейна. При исследовании периодических движений эти уравнения являются уравнениями Фредгольма II рода.

$$\varphi_j(t)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^T\Phi_{ji}(t-\tau)\tilde{M}_j\left(\varphi_j,\dot{\varphi}_j\right)d\tau+\sum_{k=1}^{P}\int_0^T\Psi_{jk}(t-\tau)M_k(\tau)d\tau\,, \qquad (7.20)$$

$$j=1,2,\ldots,N.$$

Здесь Φ_{ji} – ИЧХ, т.е. периодическое изменение угла поворота j-го участка от единичных периодических импульсов, приложенных в i–м соединении, Ψ_{ji} – ИЧХ от k-й массы к j-му участку.

В матричном виде система (7.20) выглядит так

$$\vec{\varphi}(t)=\int_0^T\mathbf{\Phi}(t-\tau)\vec{\tilde{M}}\left(\vec{\varphi},\dot{\vec{\varphi}}\right)d\tau+\int_0^T\mathbf{\Psi}(t-\tau)\vec{M}(\tau)d\tau\,.$$

Для применения МНК операторное уравнение запишется в виде

$$L\vec{\varphi}=0\,,$$

где оператор $L\vec{\varphi} = \int\limits_0^T \mathbf{\Phi}(t-\tau)\vec{\tilde{M}}\left(\vec{\varphi},\dot{\vec{\varphi}}\right)d\tau + \int\limits_0^T \mathbf{\Psi}(t-\tau)\vec{M}(\tau)d\tau - \vec{\varphi}(t)$.

Итерационный процесс по МНК строится так [98]

$$\vec{\varphi}_{n+1}(t) = \vec{\varphi}_n(t) - \vec{z}_n(t).$$

Здесь добавка определяется по формуле $\vec{z}_n(t) = \left[L'_\varphi\right]^{-1} L\vec{\varphi}_n(t)$, где L'_φ – производная по Фреше, а $\left[L'_\varphi\right]^{-1}$ – обратный оператор, который определится из системы интегральных уравнений

$$\vec{z}_n(t) - \int\limits_0^T \mathbf{\Phi}(t-\tau)\left[\vec{\tilde{M}}'_\varphi\left(\vec{\varphi}_n,\dot{\vec{\varphi}}_n\right)\vec{z}_n(\tau) + \vec{\tilde{M}}'_{\dot{\varphi}}\left(\vec{\varphi}_n,\dot{\vec{\varphi}}_n\right)\dot{\vec{z}}_n(\tau)\right]d\tau =$$
$$= -\int\limits_0^T \mathbf{\Phi}(t-\tau)\vec{\tilde{M}}\left(\vec{\varphi}_n,\dot{\vec{\varphi}}_n\right)d\tau + \int\limits_0^T \mathbf{\Psi}(t-\tau)\vec{M}(\tau)d\tau - \vec{\varphi}_n(t).$$

Применение данного метода позволило рассматривать в 1970-е гг. с помощью ЭВМ М-222 нелинейные модели достаточно высокого порядка (свыше 20 степеней свободы), включающие 2 – 3 нелинейных упругих характеристики, поскольку интегральная форма записи сокращает объем необходимой оперативной памяти [255, с. 109–134].

Этот метод стал основным в исследованиях танковых трансмиссий, проведенных, доктором технических наук, профессором В. М. Шатохиным [255], он также применялся в различных задачах анализа и синтеза крутильных нелинейных систем [19; 151; 254] и при разработке систем диагностики ДВС [6]. Интегральная форма записи была также использована и для исследования переходных режимов (уравнения Вольтерра II рода) [77, с. 41–54].

7.5. Применение корректирующих устройств для борьбы с крутильными колебаниями

Как уже было показано, развитие ДВС привело к тому, что в быстроходных авиационных и транспортных двигателях избавиться от резонансных колебаний стало невозможно. Борьба с крутильными колебаниями валопроводов ДВС стала важнейшим вопросом доводки двигателя. Существует три основных способа борьбы с вибрациями. Первый их них – устранение возмущающих сил, для поршневого двигателя осуществлен быть не может. Второй – изменение динамических свойств системы, т.е. частот свободных колебаний, за счет варьирования ее параметрами может применяться только в очень ограниченных рамках, так как не все в системе валопровода допускается изменять. Кроме того, возможности такого варьирования ограничены из-за необходимости удовлетворения условиям прочности. К тому же на стадии доводки двигателя варьировать можно только параметрами элементов, расположенных вне мотора.

Остается третий способ – включение в систему дополнительных устройств, способных существенно изменить ее динамические свойства. Эти устройства бывают двух принципиально различающихся типов – без поглощения колебательной энергии, так называемые антивибраторы и с поглощением энергии – демпферы. В последних предусмотрено наличие специальных трущихся поверхностей, перемещающихся при колебаниях, антивибраторы же таких поверхностей не имеют. По способу подсоединения к системе эти устройства разделяются на параллельные, когда они выполняют только свою основную функцию и последовательные, когда им приходится еще участвовать также и в передаче энергии. Кроме антивибраторов и демпферов к таким устройствам относятся маховики и муфты.

Первыми из корректирующих устройств применялись маховики, которые были обязательной составной частью паровых машин. Изначально они предназначались для обеспечения равномерного вращения вала. Уже к началу 1920-х гг., с появлением быстроходных ДВС, маховик перестал справляться с этой функцией. Если при внезапном сбросе нагрузки он еще обеспечивал стабильность вращения, то для борьбы с крутильными колебаниями валопроводов оказался бесполезным.

Однако роль маховика проявилась в другом. Он служит своего рода разделителем между двигателем и трансмиссией, поскольку при работе двигателя маховик, момент инерции которого больше, чем у всей остальной системы, практически не колеблется. Это позволяет отделить двигатель от возмущений, возникающих в трансмиссии и, наоборот, избавить трансмиссию от возмущающих моментов двигателя. Указанное обстоятельство позволяет применять уже отлаженный двигатель не только с различными типами трансмиссий, но и устанавливать его в машины другого типа и даже назначения.

Еще один способ это изменение чередования вспышек в цилиндрах двигателя. Этим можно добиться уменьшения работы возмущающих моментов на резонирующей форме колебаний. Однако порядок вспышек в цилиндрах должен соответствовать условиям уравновешенности двигателя, и далеко не все варианты тут возможны.

В связи с вышесказанным, большое распространение получили демпферы и антивибраторы. Разнообразие их принципов действия и конструкций породило большое число различных приемов расчета. Некоторые из них применимы только для устройств какого-либо одного типа, другие имеют достаточно широкое применение.

Антивибраторы предназначены для выведения системы из резонансной зоны, и поэтому расчет вынужденных колебаний с учетом антивибратора проще, так как наиболее неопределенные параметры системы – коэффициенты демпфирования на их результаты не влияют. Демпферы, предназначенные для уменьшения резонансных амплитуд, требуют достаточно точного учета трения. Поэтому их окончательная доводка производится экспериментально.

Впрочем, экспериментальная проверка или доводка была обязательным этапом исследования любых устройств, предназначенных для гашения опасных колебаний. Это обуславливалось упрощением модели, а также тем, что при расчетах использовались примитивные методы, имеющие большие погрешности, влияние которых трудно оценить.

Наибольшее распространение для расчетов систем с антивибратором или демпфером получили следующие методы.

1. Метод редуцирования, сущность которого заключается в том, что непосредственный расчет и подбор параметров антивибраторов или демпферов производится не для исходной системы, а для упрощенной – редуцированной системы, имеющей одну или две массы. Редуцирование производится на определенной частоте.

2. Энергетический метод, рассмотренный нами раньше, и основанный на уравнении энергетического баланса, применялся также и для расчета демпферов.

3. Метод эквивалентных параметров. Заключается в замене момента инерции массы, к которой присоединен антивибратор или демпфер эквивалентным моментом инерции. Для демпферов, кроме того, вводится эквивалентный коэффициент демпфирования. Особенно этот метод удобен для антивибраторов.

4. Метод цепных дробей, нашедший широкое распространение для расчетов крутильных колебаний, также пригоден и для данных систем. В работе В. П. Терских [220], вышедшей в свет в 1970 г., есть примеры расчета большинства известных в то время конструкций антивибраторов и демпферов.

5. Метод инвариантных точек, примененный впервые учеником С. П. Тимошенко Я. П. Ден-Гартогом [69]. Метод основан на свойстве линейной системы с присоединенным демпфером иметь частоты, для которых амплитуды колебаний какой-либо массы или соединения практически не зависят от величины трения в демпфере, если трение в самой системе достаточно мало. Эти точки называются инвариантными, а частоты, им соответствующие, инвариантными частотами.

Заключительным этапом расчета антивибратора, а в особенности демпфера является проверочный расчет, выполняемый, по возможности с наибольшей точностью.

Рассмотрим действие простейшего линейного антивибратора, который для крутильной системы представляет собой маховичок с моментом инерции I, присоединенный с помощью упругой связи с крутильной жесткостью c к основной системе. При колебаниях, возбуждаемых моментами, имеющими частоту, равную собственной частоте антивибратора – $k=\sqrt{c/I}$ в месте его присоединения образуется узел колебаний, а сам антивибратор совершает интенсивные колебания. При этом в спектре частот вместо одной резонансной частоты образуются две, одна из которых, согласно теореме Рэлея, ниже, а вторая выше исходной. Поскольку новые частоты достаточно близки к отстраиваемой частоте, применять линейный антивибратор можно только для машин с фиксированным режимом работы.

Более широкие возможности предоставляет маятниковый антивибратор*, настраиваемый не на определенную частоту, а на гармонику колебаний. Его предшественником было устройство, предложенное в 1911 г. Куцбахом. Оно представляло собой два U-образных канала, помещенных в маховике и наполненных жидкостью, которая возвращалась в среднее положение центробежными силами инерции. Но поскольку в антивибраторах в то время еще не было необходимости, это устройство не получило распространения [97, с. 10].

Идея маятникового антивибратора заключается в том, что к валу шарнирно присоединяется маятник, колеблющийся в поле центробежных сил инерции. Принцип его работы изложен в монографии [137, с. 262–264].

Все существующие в настоящее время модификации маятниковых антивибраторов можно объединить в схеме сложного маятника (рис. 7.13). Подвеска сложного маятника к вращающейся массе осуществляется при помощи ролика, перекатывающегося по отверстию в диске и отверстию в маятнике. Колебания маятника происходят за счет перекатывания, без скольжения ролика. Такая подвеска имеет два варианта:

1) более сложный в теоретическом отношении, когда отверстия в диске и маятнике имеют разные диаметры

2) менее сложный, когда отверстия одинаковые.

Применение маятникового антивибратора для гашения колебаний валопроводов ДВС требовало решения двух вопросов:

1. Конструкция маятникового антивибратора должна соответствовать принципу математического маятника.

2. Конструкция должна позволять осуществлять гашение при малых значениях приведенной длины маятника, так как его применение ограничено габаритами двигателя.

---

* В работах 1930–1940-х гг. маятниковые антивибраторы называются маятниковыми демпферами

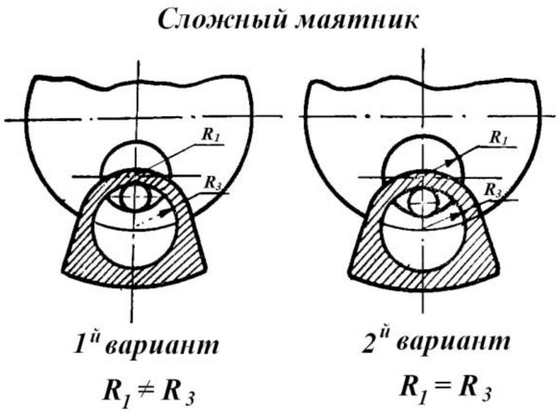

Рис. 7.13. Сложный маятник

Эти вопросы были разрешены в конструкциях Сарацина, Чильтона и Соломона. В 1930 г. Р. Сарацин взял во Франции патент на новый способ устранения крутильных колебаний с помощью маятниковообразных масс. В патенте приведена формула, по которой нужно выбирать длину рычагов и расположение масс, чтобы антивибратор снимал гармонику v-го порядка. Именно ему принадлежит приоритет в создании нового эффективного способа борьбы с крутильными колебаниями [55, с. 261–262].

Чуть позднее были зарегистрированы антивибраторы Чильтона в США и Соломона во Франции, являющиеся развитием конструкции Сарацина. Эти устройства были применены на авиадвигателях фирм «Райт», «Зульцер», «Кадиллак», «Алисон» и др. [257, с. 9].

Маятник Соломона является промежуточным звеном между неприемлемым физическим маятником и идеальным математическим маятником. В обоих вариантах осуществления маятника Соломона центр тяжести его осуществляет круговое движение, а сам маятник представляет собой тело правильных геометрических размеров, радиус инерции которого может быть легко выражен через его геометрические параметры.

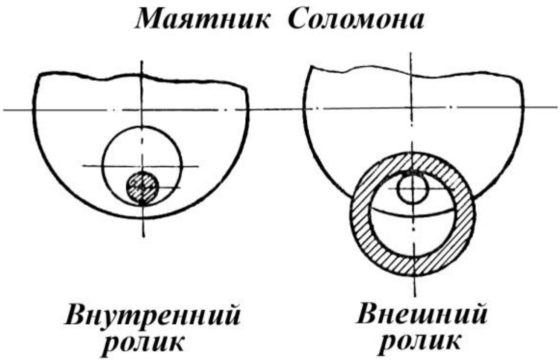

Рис. 7.14. Маятник Соломона

Наиболее удачной конструкцией маятникового антивибратора, при некоторых допущениях полностью эквивалентный математическому маятнику, является конструкция Чильтона (рис. 7.15). Его подвеска осуществляется в виде бифилярного подвеса по схеме сложного маятника и также может быть осуществлена в двух вариантах.

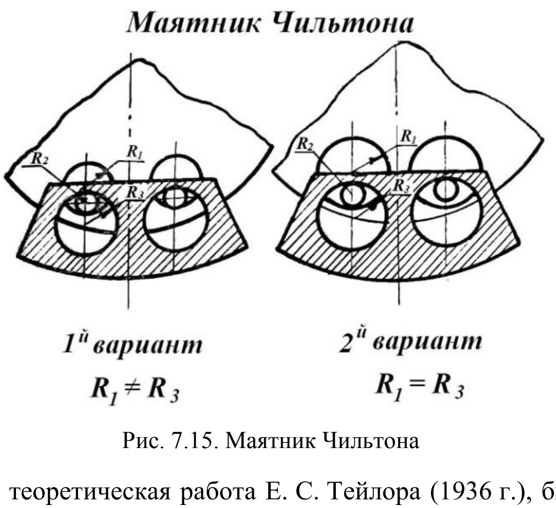

Рис. 7.15. Маятник Чильтона

Первая теоретическая работа Е. С. Тейлора (1936 г.), была посвящена приближенному исследованию колебаний математического маятника в поле центробежных сил с целью обоснования применения маятникового антивибратора конструкции Чильтона для успокоения крутильных колебаний девятицилиндрового звездообразного двигателя «Райт Циклон».

В 1938 г. Ю. А. Гопп в работе [55] развил теорию, данную Тейлором. Монография молодого харьковского ученого была первой книгой на русском языке, посвященной демпфированию колебаний и подытожившей результаты многочисленных исследований [97, с. 4]. В ней автор составил более точные дифференциальные уравнения колебаний маятникового антивибратора, дал описание конструкции Чильтона на двигателе «Райт Циклон» и ее теоретическое обоснование, показав, что движение антивибратора уподобляется математическому маятнику. Обе упомянутые работы были посвящены применению маятникового антивибратора для однорядного звездообразного мотора. Рассматривалась двухмассовая крутильная система двигатель – винт, причем только на одну массу (двигатель) действует возбуждение [257, с. 17]. Кроме того, в монографии Юрия Аркадьевича дается обзор конструкций и патентов демпферов, получивших применение в двигателестроении [55, с. 247–269].

Эффективность применения маятниковых антивибраторов и простота их конструкции требовала разработки их теории применительно к рядным многоцилиндровым двигателям. И такая теория была разработана в трудах А. Штейглица (Steiglitz A. Beenfüssung der Drehschwinger durch pendelnde Massen Jachbuch der Deutschen Luftfahrtforshung, 1938) и И. Ш. Неймана [180]. Работа последнего была более глубокой и дала новое направление в области теоретических исследований маятниковых антивибраторов. Профессор Нейман рассматривал воздействие на многомассовую систему маятникового антивибратора, присоединенного к i-й массе, и выявил ряд его свойств:

1. Частота собственных колебаний системы (ω_c), к которой присоединен маятниковый антивибратор является функцией средней угловой скорости вращения коленчатого вала (ω).

2. В отношении крутильных колебаний, система из n масс с маятниковым антивибратором эквивалентна системе, в которой i-й момент инерции заменяется моментом инерции $I_{iэ}$, определяемым по специально выведенным равенствам.

3. Если маятниковый антивибратор настроен на ν-й порядок внешнего гармонического воздействия, эквивалентный момент инерции на данной гармонике $I_{iэ} \to \infty$, т.е. в месте его присоединения располагается связь в виде жесткой заделки.

4. Систему, находящуюся под воздействием возбуждающих гармонических моментов ν-го порядка, можно совершенно освободить от крутильных колебаний этого порядка, если к массам, на которые действуют моменты присоединить маятниковые антивибраторы, настроенные на ν-й порядок [257, с. 19].

Наиболее полно, в самом общем виде теория маятникового антивибратора изложена в статье А. И. Чекмарева [248]. В ней автор рассматривает сложный маятник, являющийся системой с тремя степенями свободы, а также частные случаи маятников Тейлора и роликов Соломона.

В ХПИ исследования маятниковых антивибраторов после Ю. А. Гоппа продолжил Л. И. Штейнвольф [136]. В своей работе он подробно рассмотрел их применение для гашения крутильных колебаний валопроводов ДВС и предложил метод расчета нерезонансных вынужденных колебаний системы с присоединенным маятниковым антивибратором и с учетом сопротивления системы. Для уточнения общих вопросов теории, методов расчета нерезонансных колебаний и эффективности воздействия маятниковых антивибраторов впервые была использована экспериментальная установка. Эта установка оказалась универсальным средством, позволяющим исследовать целый ряд вопросов крутильных колебаний [257, с. 211].

В тех случаях, когда с помощью антивибратора не удается устранить опасные колебания, применяются демпферы колебаний. Эффект от их использования обычно больше [97, с. 6]. Существует множество разнообразных типов демпферов, но все они по принципу работы могут быть разделены на демпферы сухого и жидкостного (вязкого) трения. Главной деталью демпфера является маховик, который связан со ступицей либо поверхностями трения, либо полостью, заполненной маслом, что и определяет тип демпфера.

Одним из первых был демпфер сухого трения, получивший наименование поглотителя Ланчестера (см. рис. 7.16). Кольца 2 и 6 связаны с маховиком 1 через колодки 7. Усилие их прижатия, регулируется болтом 3 с шайбой 4 и пружиной 5 таким образом, чтобы силы сухого трения заставляли маховик вращаться вместе с валом при его равномерном вращении, но были недостаточны при возникновении крутильных колебаний. В этом случае маховик проскальзывает относительно диска, что приводит к совершению работы силами трения и, соответственно, рассеянию энергии. Существует оптимальная сила затяжки демпфера. При недостаточной затяжке силы трения очень малы. При излишне большой затяжке маховик колеблется вместе с валом, и силы рассеивания энергии колебаний в демпфере пропадают.

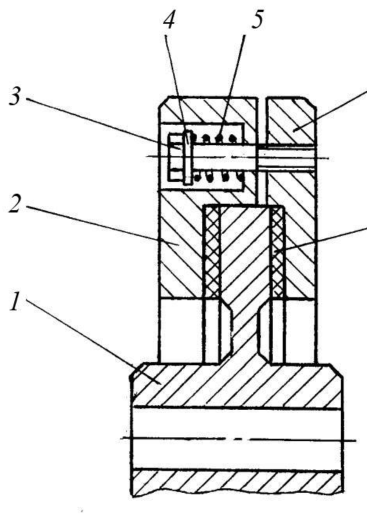

Рис. 7.16. Демпфер сухого трения

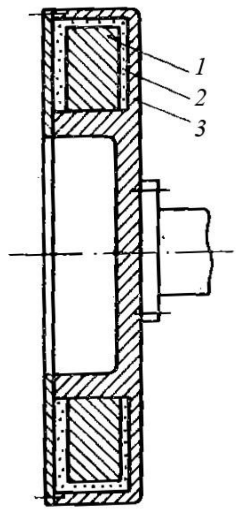

Рис. 7.17. Демпфер вязкого трения

Теория демпфера сухого трения была развита в работе Ден-Гартога (J. P. Den Hartog, J. Ormondroyd, Trans. ASME, t. 52, p. APM – 133 – 1930) [227, с. 254]. Однако демпферы сухого трения не получили широкого распространения из-за износа трущихся поверхностей и нарушения, в связи с этим настройки, а также возможности перекосов и заеданий.

Более широкое распространение нашли демпферы вязкого трения с упругой связью и без нее, резиновые различных типов и т.д. В этих демпферах обычно используют силы сопротивления жидкости при протекании ее через узкие щели или отверстия. В демпфере вязкого трения (см. рис. 7.17) маховик 1 свободно размещен в корпусе 3, а пространство между ними заполнено маслом 2. При равномерном вращении вала маховик вращается синхронно с ним, но при возникновении крутильных колебаний вала маховик, вследствие инерции отстает или опережает втулку. При этом масло, заполняющее пространство между маховиком и втулкой, перетекает из одной его части в другую, что создает сопротивление вращению маховика относительно втулки. При увеличении амплитуды колебаний увеличивается работа сил сопротивления, чем и достигается эффект их гашения.

Наибольшее распространение получили демпферы вязкого трения, в которых используется силиконовое масло. Эффективность и надежность силиконовых демпферов объясняется высокими свойствами силиконовых масел, таких как возможность широкого варьирования вязкости, химическая инертность, стабильность свойств. Одним из положительных свойств силиконовых масел является существенно нелинейная зависимость их кинематической вязкости от градиента скорости скольжения, что приводит к изменению коэффициента затухания в демпфере по нелинейному закону. Выражение для коэффициента затухания является существенно нелинейной гиперболической функцией относительной скорости скольжения. Но при малых ее значениях коэффициент затухания можно считать постоянным, а трение вязким [22].

Зависимость максимального упругого момента в любом месте системы от вязкости силиконового масла всегда имеет изолированный минимум. Это же относится к таким параметрам, как зазор между маховиком и ступицей демпфера, жесткость упругого крепления демпфера. Изменение вязкости силиконового масла приводит к сильному изменению той частоты, на которой достигается максимум упругого момента. Оптимальное значение параметра находят из решения минимаксной задачи. При поиске минимума целевой функции приходится многократно решать линейную задачу.

Трение в маятниковом антивибраторе слабо влияет на его свойства. После теоретического труда Мура (Moor The control of Torsional Vibration in Radial Aircraft Engines by Tuned Pendulums, J. Of the Aeronautical Sciences, vol. 9, № 7, 1942) трение при разработке теории маятникового антивибратора не учитывается. Однако специально введенное в его конструкцию трение может резко изменить характер работы гасителя. Разработка этой идеи привела к созданию нового высокоэффективного средства борьбы с опасными крутильными колебаниями – маятникового демпфера. Теоретическое обоснование целесообразности такого устройства для гашения крутильных колебаний в двухмассовой системе было впервые предложено в 1954 г. Л. И. Штейнвольфом в докладе на научно-технической конференции ХПИ [97, с. 17]. Подробное теоретическое и экспериментальное исследование этого нового средства борьбы с опасными вибрациями провел ученик Льва Израилевича В. Н. Карабан [97].

Еще одним средством защиты коленчатого вала и передачи от добавочных динамических нагрузок при резком изменении режима работы стала ***упругая муфта*** (в 1930-е гг. она называлась эластичной). Первоначально она применялась в мощных авиационных двигателях а позже стала обязательной принадлежностью каждого двигателя [55, с. 51]. Особенно большие преимущества дает муфта с нелинейной характеристикой.

Наиболее широкое распространение получили муфты типа Фальк-Биби. В них ведущий диск соединяется с ведомым пластинами, заложенными в гнезда, имеющие криволинейные очертания. Благодаря этому жесткость муфты может меняться в широких пределах. Типичная характеристика такой муфты, т.е. зависимость упругого момента M от угла закручивания нелинейного участка φ представлена на рис. 7.18. Меняя толщину пластин и кривизну гнезд можно создавать муфты с различными нелинейными характеристиками. Данная конструкция муфты позволяет ей надежно работать при значительных перекосах и смещениях осей, т.е. она служит своего рода шарниром. О высокой надежности муфт типа Фальк-Биби говорит их широкое распространение в различных отраслях машиностроения [55, с. 33].

Включение такой муфты в крутильную систему валопровода делает последнюю существенно нелинейной, а это означает, что в ней могут проявляться различные нелинейные эффекты. Первоначально муфта рассматривалась только как средство уменьшения динамической нагрузки на зубчатые колеса редуктора. Однако она оказалась эффективным средством и для смещения резонансных зон. Практика применения нелинейных муфт также показала, что их можно использовать и как своего рода динамические виброгасители. Для этого муфту необходимо располагать вблизи узлов соответствующих форм колебаний [38, с. 227].

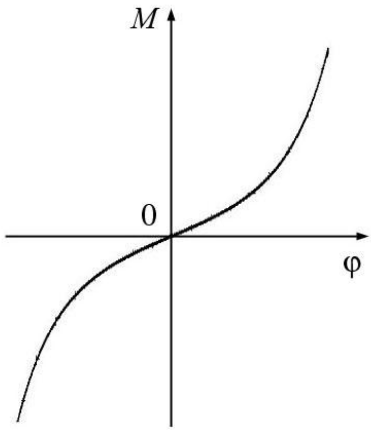

Рис. 7.18. Упругая характеристика муфты типа Фальк-Биби

Ю. А. Гопп провел расчетные и экспериментальные исследования муфты типа Фальк-Биби. Этому вопросу посвящена его статья [57], опубликованная в 1937 г. В ней подчеркивается, что проблема проектирования подобных муфт для устранения резонансных колебаний коленчатых валов авиационных моторов становится актуальной. Для исследования поведения нелинейной муфты была создана специальная экспериментальная установка. Кроме того, Гопп провел ряд расчетов, пользуясь разработанным им графическим методом. Достоверность своего метода он проверил на линейной модели, сравнивая результаты расчетов с аналитическим решением.

Проанализировав результаты экспериментов и расчетов, Юрий Аркадьевич пришел к выводу о целесообразности применения нелинейных муфт для гашения опасных резонансных колебаний в валопроводах быстроходных ДВС. По его мнению, опасные резонансные колебания в них не будут возникать, ибо угловое ускорение вала таково, что неизбежно будет происходить срыв колебаний на нижнюю ветвь [55, с. 51].

Кроме рассмотренного варианта муфты, еще с 40-х гг. XX века в быстроходных двигателях применяются пружинные упругие муфты, конструктивно выполненные вместе с редуктором [38, с. 226]. Главной частью такой муфты являются пружины, вставляемые в специальные ячейки. Благодаря их предварительному сжатию муфта имеет явно выраженную нелинейную характеристику типа «натяг». А для предохранения пружин от разрушения в муфте имеются ограничители.

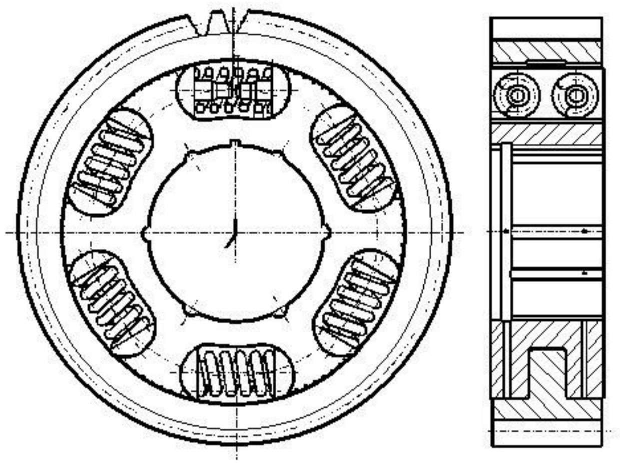

Рис. 7.19. Нелинейная упругая муфта

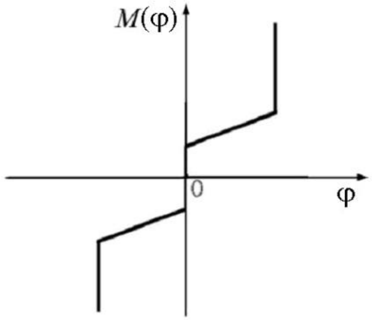

Рис. 7.20. Упругая характеристика муфты с натягом

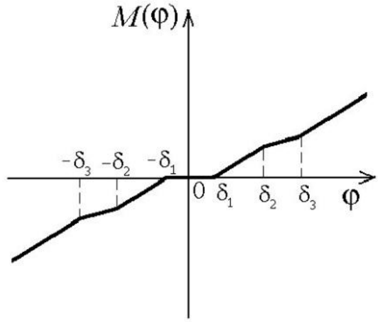

Рис. 7.21. Упругая характеристика муфты с учетом зазора и податливостей валов

ГЛАВА 8

Расчет поперечных колебаний судовых корпусов – первая задача теории колебаний континуальных систем

8.1. Возникновение задачи о колебаниях судовых корпусов

Задача о вибрации судовых корпусов возникла в конце XIX века, когда с переходом в судостроении на железо, а затем и на сталь, размеры судов стали быстро расти. Это была первая масштабная задача о колебаниях континуальных систем. Новые материалы предъявили и новые требования к проектированию и постройке судов. Особые сложности возникли, когда длина судна совпала с длиной океанской волны (свыше 130 м). Тогда корабль оказывается между гребнями двух волн или повисает на гребне одной волны посередине. Проблема усугубляется тем, что коррозионное воздействие морской воды может существенно снизить предел выносливости при циклических нагрузках [24, с. 83]. Ситуация, когда судно ломается в средней части, не выдержав нагрузки, довольно распространенный вид аварии. Первыми с этой проблемой столкнулись английские кораблестроители, и суда, у которых длина корпуса соизмерима с длиной волны, называются судами Рида по фамилии главного кораблестроителя Британского флота.

Кроме того, увеличение водоизмещения кораблей, отношения длины к ширине при одновременном облегчении конструкции корпуса привели к снижению собственных частот колебаний. Повышение мощности и скорости паровых машин также способствовало возникновению резонансных колебаний. Впервые на колебания судовых корпусов, возбуждаемых неуравновешенными движущимися частями паровых машин, обратили внимание в 80-е гг. XIX в. Чаще всего они наблюдались у миноносцев, имеющих быстроходные машины и у речных пароходов с облегченными корпусами. Со временем вибрации стали проявляться и на других кораблях. Поэтому кораблестроители вынуждены были заняться вопросами измерений и устранений вибраций корпусов.

Упругие колебания, свойственные судну в целом, похожи на колебания, которые может совершать стержень, поэтому его рассматривают как балку переменного поперечного сечения. Важнейшим вопросом при этом является учет влияния забортной воды. Исследования показали, что архимедова сила, существенная при исследовании качки, на колебания корпуса не влияет, изменяя частоту не более чем на 1–2 %. Это объясняется тем, что жесткость воды как упругого основания ничтожно мала по сравнению с жесткостью корпуса, поэтому последний рассматривается как совершенно свободный упругий стержень. Из возможных типов колебаний у судов чаще всего наблюдаются поперечные вертикальные. При этом, хотя теоретически различные типы колебаний взаимосвязаны, на практике они всегда разделяются.

При рассмотрении изгибных колебаний свободного стержня две низшие собственные частоты оказываются нулевыми и соответствуют поступательному движению в вертикальном направлении и вращательному движению вокруг центра масс. Для этих двух частот необходимо учитывать архимедову силу, и тогда полученные движения будут соответствовать режимам вертикальной и килевой качки, при которых корпус, хотя и деформируется, но при вычислении частоты может считаться абсолютно жестким. Поэтому расчет корпуса корабля на прочность при волнении моря производится в квазистатической постановке. Что касается колебаний корпуса как упругой балки, то первая форма колебаний (см. рис. 8.1), при которой учитывается податливость корпуса и не учитывается влияние жесткости забортной воды, имеет два узла, вторая – три и т.д.

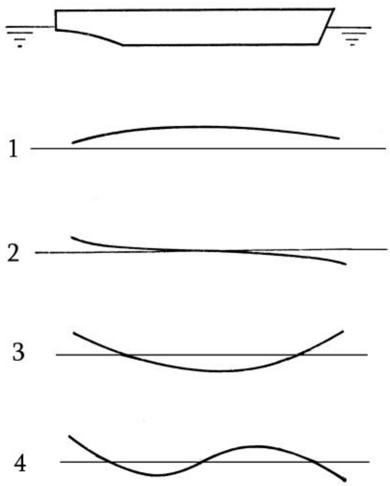

Рис. 8.1. Формы поперечных колебаний корпуса судна

Подробный анализ первых работ, посвященных вибрациям корабельных корпусов, приведен в очерке П. Ф. Папковича «Развитие и современное состояние вопроса о вибрации судов», напечатанного в журнале «Прикладная математика и механика» в 1932 г. [190, с. 227–261], а также в других его работах, посвященных этому вопросу [190, с. 262–325].

Первым исследовал колебания судовых корпусов Отто фон Шлик. В 1884 г. он сделал доклад «О вибрации паровых судов» («On the Vibration of the Steam Vessels» Transactions of the Institution of Naval Architects (T. I. N. A.), 1884, p. 24.). Здесь впервые вопрос колебаний корпуса корабля был выделен в самостоятельную проблему. Автор сравнивает его со свободным упругим стержнем и подчеркивает, что колебания не являются следствием слабости судового корпуса. Они возрастают при совпадении частоты вращения машины с собственной частотой корабля, как единого целого. В этом докладе Шлик отмечает, что самыми действенными способами погашения вибраций служат изменение числа оборотов машины и уравновешивание сил инерции одних движущихся частей машины другими. Здесь же он приводит описание самого примитивного устройства для записи колебаний в виде гибкой рейки с грузом и карандашом на свободном конце.

Позже, в 1893 г. Шлик создал прибор для записи вибраций корабля – паллограф, который устанавливался на палубе судна в том месте, где надо измерять вибрации, а к самописцу подносился вращающийся барабан (рис. 8.2). Достаточно тяжелый груз и податливая пружина обеспечивали низкую собственную частоту стержня *OP* и сравнительную неподвижность самописца при высокочастотных

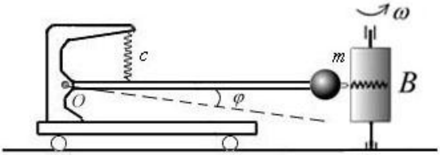

Рис. 8.2. Паллограф Шлика

колебаниях палубы. Паллограф описан в работе «Об аппарате для измерения и регистрации вибрации пароходов» («On an Apparatus for Measuring and Registration the Vibration of Steamers». T. I. N. A.) [229, с. 20].

С помощью паллографа Шлик произвел множество наблюдений на различных судах для сравнения их вибраций и для экспериментального определения собственных частот и на основании их вывел эмпирическую формулу для определения периодов главных свободных вертикальных колебаний корабля.

$$n_1 = \frac{60}{T} = C\sqrt{\frac{J}{Pl^3}},$$

где n_1 – число колебаний в минуту на первой (основной) частоте, T – период колебаний судна в с; J – момент инерции площади поперечного сечения миделя* в м^4; P – вес судна в тоннах; l – длина судна в м; C – коэффициент, который по Шлику равен для судов:

– с очень острыми обводами (миноносцы) – 3 450 000;
– пассажирских – 3 150 000;
– грузовых с полными очертаниями – 2 800 000.

Позже Хорн установил, что коэффициент грузовых судов 2 800 000 соответствует полной загрузке, но если судно загружено только балластом, то он имеет значение от 2 200 000 до 2 400 000.

Что касается второй собственной частоты, то ее определяли совсем приблизительно. Так по Шлику она выше первой в 1,85–2 раза. По некоторым другим источникам она может быть еще выше [190, с. 291].

Одним из методов борьбы с вибрациями является устранение их причин – возмущающих сил. В 1893 г. О. Шлик предложил свой

* мидель – место, в котором судно имеет самое широкое поперечное сечение

способ уравновешивания поступательно движущихся частей судовой паровой машины. Способ предназначен для машины тройного расширения с четырьмя цилиндрами, так как цилиндр низкого давления разделялся на два. Расстояния между цилиндрами машины выбирались соответственно условиям уравновешивания, а углы заклинивания кривошипов были приняты отличными от 90º, так как цилиндры имели разный диаметр и, соответственно, разные массы движущихся частей. Его статья «О способе устранения вибраций пароходов» («Über die Mittel zur Beseitigung der Vibrationen von Dampfern», Hamburg, 1894) вызвала большой интерес среди инженеров, а предложенный способ вызвал множество других работ по данному вопросу. В 1897 г. завод «Вулкан» (город Штеттин) изготовил для парохода «Император Вильгельм Великий» две паровые машины, мощностью 14 000 л.с. каждая, уравновешенные по методу Шлика. В 1887–1900 гг. этот пароход удерживал «Голубую ленту Атлантики». Подобные машины устанавливались также на броненосцах кайзеровского флота до перехода на паровые турбины [202, с. 212]. В 1911 г. на юбилейной сессии Английского общества корабельных инженеров и 1912 г. в Германском обществе корабельных инженеров Отто фон Шлик подвел итог своих многолетних трудов. Это были его последние работы [190, с. 229].

Подробные исследования Муллена, опубликованные в работе «Некоторые вибрационные проблемы кораблестроения» (Moullin «Some Vibration Problems in Naval Architecture.» P. III. I.C.M. 1930. Stockholm, p 28.), показали, что главная погрешность формулы Шлика заключается в том, что не учитывается распределение массы корабля по его длине [190, с. 260]. Важно также учесть распределение момента инерции поперечного сечения корабля *J* вдоль длины, особенно в средней части.

В Англии начало исследований поперечных колебаний корпусов кораблей связано с серьезной проблемой, возникшей при создании истребителей миноносцев. В 1892 г. в противовес новым французским миноносцам, имевшим скорость порядка 26 узлов, было принято решение о строительстве серии из 42 контрминоносцев со скоростью хода не менее 27 узлов. Новые корабли строились на 15 различных заводах, хотя первоначальная идея исходила от фирмы Ярроу. Для достижения намеченной скорости и размещения мощного вооружения конструкция корпуса была облегчена, а отношение длины к ширине было принято равным 10, тогда как на всех предыдущих кораблях оно составляло 7 – 8. Первый в серии истребитель фирмы Ярроу «Хорнет» водоизмещением 223 т при мощности двух машин 4 000 л. с. показал на испытаниях скорость 28,2 узла. Но при этом на скорости свыше 23 узлов наблюдались интенсивные вибрации корпуса [252, с. 46–48]. Это же повторилось и на других кораблях. Для установления причин возникновения вибраций на фирме Ярроу в 1892 г. были проведены первые эксперименты. На одном из миноносцев машину запустили при снятом гребном винте, что подтвердило факт возбуждения колебаний корпуса неуравновешенностью паровой машины, а не работой гребного винта. Эксперименты описаны в статье основателя фирмы А. Ф. Ярроу (1842–1932) «О балансировке машин и вибрации кораблей». (Jarrow. On the Balancing of Engines and the Vibration of Ships. T. I. N. A. 1892, p. 213).

Поскольку теоретических расчетов таких колебаний еще не существовало, Мэллок в работе «О вибрации кораблей и машин» (Mallock «On the Vibration of ships and Engines». T. I. N. A. 1895, p. 296) предложил определять частоты свободных колебаний на малых моделях, которые он рекомендовал делать в форме длинных стержней, площади и моменты инерций сечений которых воспроизводили бы в известном масштабе рассматриваемое судно [190, с. 230]. А теоретических работ по определению собственных частот и форм колебаний до конца XIX века не было.

8.2. Первые расчетные исследования

Первой работой, посвященной расчетному определению собственных частот и форм колебаний судового корпуса была работа Людвига Гюмбеля «Одномерные поперечные колебания корпуса, имеющего форму свободного стержня с переменным поперечным сечением» (Gümbel «Ebene Transversalschwingungen freier stab förmiger Körper mit variablen Querschnitt», Jahrbuch der Schifttbautechnischen

Gesellenhaft, 1901). Для интегрирования дифференциального уравнения свободных колебаний

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[EJ(z)\frac{d^2y}{dz^2}\right]=-\mu(z)\frac{d^2y}{dt^2} \tag{8.1}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} EJ(z)\frac{d^2y(z)}{dz^2}&=0;\\ \frac{d}{dz}\left[EJ(z)\frac{d^2y(z)}{dz^2}\right]&=0 \end{aligned}\right\}\quad \text{при } z=0 \text{ и } z=l,$$

где E – модуль упругости, $J(z)$ – момент инерции сечения, в зависимости от длины корпуса z, $\mu(z)$ – погонная масса корпуса, y – вертикальное смещение упругой линии корабля Гюмбель применил наиболее простой и естественный прием, положив искомое y в рассматриваемом главном колебании

$$y=y_k(z)\sin\lambda_k t\ .$$

Этой подстановкой задача сводится к интегрированию уравнения для определения функции $y_k(z)$

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2y_k(z)}{dz^2}\right]=\lambda_k^2\,\mu(z)\,y_k(z) \tag{8.2}$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} EJ(z)\frac{d^2y_k(z)}{dz^2}&=0;\\ \frac{d}{dz}\left[EJ(z)\frac{d^2y_k(z)}{dz^2}\right]&=0 \end{aligned}\right\}\quad \text{при } z=0 \text{ и } z=l. \tag{8.3}$$

Данное уравнение совпадает с уравнением, описывающим статический изгиб балки переменного поперечного сечения под действием распределенной нагрузки $\lambda_k^2\,\mu(z)\,y_k(z)$. Его точное решение в общем случае представляет затруднения, и поэтому для него были предложены различные приближенные способы.

Гюмбель, в частности, применил метод приближенного нахождения отдельных частных решений задачи по заданным при z=0 граничным условиям. Отклонение на границе $y_k(0)$ выбиралось произвольно, а $y_k'(0)$ – так, чтобы удовлетворить одному из условий на втором конце (*z*=*l*). Для удовлетворения второго условия следует задаться соответствующим образом в уравнении (8.2) частотой λ_k. Задачу определения частных решений уравнения (8.2) Гюмбель решал графически с помощью веревочных многоугольников для различных комбинаций величин λ_k и $\left(y_k'(0)/\,y_k(0)\right)$.

Метод, предложенный Гюмбелем, вскоре был усовершенствован А. Н. Крыловым. Российские кораблестроители впервые столкнулись с новыми проблемами прочности судов при строительстве серии броненосных крейсеров, предназначенных для Тихого океана. По сравнению с крейсерами предыдущих типов новые корабли должны были иметь значительно бóльшую скорость и дальность плавания. В связи с этим выросли их водоизмещение и длина корпуса. Первый корабль из серии – «Рюрик» вступил в строй в 1892 г. Длина его корпуса составляла 132,6 м, а водоизмещение 11 650 т. Две паровых машины общей мощностью 13 250 л.с. позволяли крейсеру развивать скорость около 19 узлов, а для большей автономности плавания он сохранял еще полное парусное вооружение.

При строительстве второго крейсера серии – «Россия» были внесены существенные изменения, в частности ликвидировано архаичное парусное вооружение, а для экономического хода кроме двух основных машин была поставлена малая машина мощностью 2 500 л.с., работающая на средний вал. На максимальном ходу эта машина отключалась. Две основные машины общей мощностью 14 500 л.с. должны были при 80 об/мин обеспечить скорость 19 узлов. Водоизмещение «России» составило 12 195 т, а длина корпуса 148 м. На испытаниях крейсер развил скорость 19,74 узла при мощности

15 680 л.с. и режимах 83,1 и 83,6 об/мин у основных машин. При движении под одной средней машиной на режиме выше 86 об/мин были замечены вибрации корпуса, особенно интенсивные в корме. На это тогда не обратили внимания, к тому же само применение машины экономического хода оказалось нецелесообразным, и в дальнейшем от нее отказались. После ввода в 1896 г. в строй крейсера «Россия», по его типу был заложен третий корабль серии – «Громобой», который отличался от прототипа облегченной конструкцией корпуса и уменьшенной толщиной и площадью броневого пояса по ватерлинии. За счет этого было усилено бронирование артиллерийских казематов, причем основная доля увеличения бронирования пошла на установку поперечных переборок – траверсов. Водоизмещение корабля выросло до 12 455 т. Указанные обстоятельства – уменьшение продольной жесткости и увеличение массы привели к тому, что собственные частоты колебаний корпуса понизились. Кроме того, на крейсер были установлены три паровые машины нового типа общей мощностью 15 500 л.с., максимальная частота вращения которых составляла 125 об/мин [165, с. 85–98].

На ходовых испытаниях, проходивших в сентябре 1900 г., на частоте вращения машин равной 105 об/мин были отмечены очень большие колебания в середине корпуса и на оконечностях корабля. Колебания концевых мачт, передававшиеся от корпуса, были настолько интенсивны, что невозможно было пользоваться прожекторами и вести стрельбу из орудий, расположенных на марсах. Строители крейсера столкнулись с новым для себя явлением – резонансом. В то время Российское Морское министерство не располагало еще приборами для измерения вибраций, и на испытаниях для этого применялся очень простой способ: на палубу в нужном месте ставился табурет, а на него стакан, доверху заполненный водой, подкрашенной для контрастности обыкновенной чайной заваркой. При колебаниях вода расплескивалась, и по оставшемуся ее уровню судили об амплитуде колебаний. Однако на «Громобое» этот метод оказался неприменим, так как, например, в кормовой адмиральской каюте, при работе машин с частотой 105 об/мин из стакана расплескивался практически весь чай [111, с. 106–110].

Чтобы погасить вибрации мачт, было предложено раскрепить их дополнительными контрштагами. Не готовый к решению новой проблемы, председатель Морского технического комитета Н. Е. Кутейников на это предложение согласился. Однако вибрации не прекратились, так как их источник не был устранен. Тогда для консультации был приглашен профессор Морской академии, заведующий Опытовым бассейном Морского ведомства А. Н. Крылов. Он вместе со своим неизменным помощником и другом, сотрудником бассейна Н. А. Смирновым, имея в своем распоряжении всего около 36 часов, из подручных материалов смастерил переносной прибор для измерения вибраций – виброграф.

Принцип работы вибрографа заключается в том, что к неподвижному самописцу приставляется колеблющийся вместе с палубой корабля вращающийся хронограф. Схема прибора представлена на рис. 8.3. В результате на бумаге, намотанной на барабан хронографа, остается след – запись колебаний. Для получения неподвижного самописца на колеблющемся с большой амплитудой судне тяжелый груз подвешивался на достаточно податливой упругой связи к бимсу* верхней палубы. Жесткость пружины c и масса груза m подбираются таким образом, чтобы амплитуда вынужденных колебаний груза от кинематического возбуждения подвеса не превышала заданной величин, т.е. собственная частота колебаний самописца не превышала определенного значения. При этом необходимо, чтобы низкая собственная частота вибрографа не оказалась близка к частоте качки корабля, чтобы не наступил резонанс прибора.

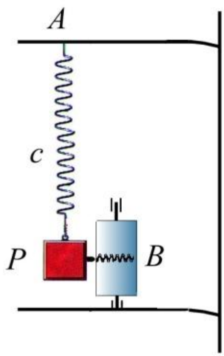

Рис. 8.3.
Схема вибрографа
А. Н. Крылова

Проведенные с помощью вибрографа испытания показали, что амплитуда колебаний в оконечностях и посредине корабля на режиме

* бимс – горизонтальный брус в наборе судна

105 об/мин достигает 30 мм. Крылов пишет по этому поводу: «При такой вибрации наводить орудия было невозможно; мина[‡], вложенная в кормовой аппарат, на моих глазах каким-то образом сбила стопора, сама ушла из аппарата и была потеряна» [110, с. 10]. На рис. 8.4 представлены образцы записей колебаний, полученные описанным прибором при работе двух бортовых машин на режиме 102 об/мин и застопоренной средней. На записях видно характерное биение, происходящее из-за небольшой разницы в угловых скоростях машин.

Рис. 8.4. Запись вибраций крейсера «Громобой»

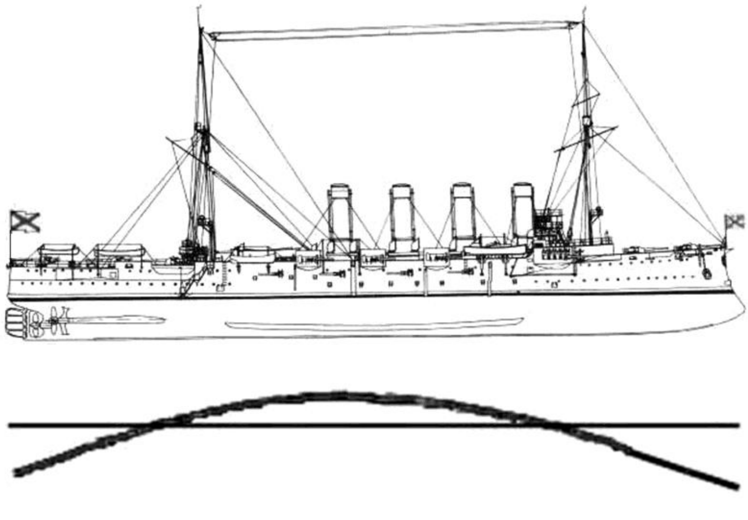

Рис. 8.5. Крейсер «Громобой» и форма колебаний его корпуса

[‡] В то время торпеды называли самодвижущимися минами

Следует отметить, что картина колебаний как раз соответствует первой собственной форме колебаний свободного стержня (см. рис. 8.5. На основании анализа полученных экспериментальных данных А. Н. Крылов решил задачу о колебаниях корпуса корабля, рассматривая его как стержень переменного поперечного сечения. Подробнее решение этой задачи приводится в разделе «Поперечные колебания балок» книги «Вибрация судов» [110, с. 298–358].

Что же касается «Громобоя», то проблема его вибраций тогда решена не была, так как на устранение неполадок уже не было времени (назревал конфликт с Японией), и крейсер ушел на Дальний Восток без исправлений. Проблему резонанса решили таким способом: для достижения 18-узловой скорости, которой соответствовал режим 105 об/мин средняя машина работала с частотой вращения 120 об/мин, а две бортовые – с пониженной частотой (менее 98 об/мин). Благодаря этому вибрации были уменьшены, хотя работа механизмов была весьма невыгодной [110, с. 10–11].

Опыт, полученный при испытаниях «Громобоя», не прошел даром. Он положил начало научному подходу к изучению вибраций. В 1902 г. А. Н. Крылов провел испытания на строившемся в Тулоне (Франция) по заказу России броненосном крейсере «Баян», на котором также были обнаружены повышенные вибрации [155, с. 243]. А. Н. Крылов на основании проведенных исследований пришел к весьма важным для практики выводам: для уменьшения вибраций корабля надо увеличивать жесткость корпуса в районе машинного отделения. Этого можно достигнуть устройством фундамента под машину, дополнительными связями между палубами и др. С этого момента запись вибраций стала обязательной при испытании кораблей. Для Опытового бассейна был изготовлен более совершенный прибор – паллограф Шлика (рис. 8.2).

На строившихся во Франции в Кане в 1925–1927 гг. огромных танкерах, грузовместимостью свыше 10 000 т «Нефтесиндикат СССР» и «Советская нефть» по проекту А. Н. Крылова в машинном отделении была выполнена солидная арочная связь. Позже такой способ отстройки от резонанса вошел в практику судостроения не только в Советском Союзе, но и за рубежом. С. П. Тимошенко, который считал

А. Н. Крылова своим учителем, пишет: «Крылов первый ввел в практику проектирования математический расчет прочности судов и показал, что при правильном его применении можно достигнуть значительной экономии в весе судов. Некоторые расчеты оказались новинкой и ими впоследствии стали пользоваться кораблестроители других стран» [225, с. 267–268].

Почему же резонансные колебания корпуса не возникали раньше на коммерческих трансатлантических пароходах, длина которых достигала уже к концу XIX века 160 м? Дело в том, что корпус коммерческого парохода гораздо крепче, а значит и жестче, чем у военных. Это обусловлено, во-первых, более длительным сроком эксплуатации коммерческих пароходов (военные быстрее устаревают), а во-вторых, на военных кораблях их груз – броня и вооружение находятся на постоянных местах, тогда как на транспортах груз может быть размещен в разных местах, что также предъявляет более высокие требования к прочности корпуса.

Крылов предложил искать общий интеграл уравнения (8.1) в виде

$$y_k(z) = C_1 F_1(z) + C_2 F_2(z),$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования, а $F_1(z)$ и $F_2(z)$ – независимые частные решения уравнения (8.1), удовлетворяющие граничным условиям при z=0 и вычисляемые для всякого частного решения λ_k^2 методом приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для этого интегрирования Крылов сначала предложил метод, основанный на разбиении корабля на участки, которые рассматривал как призматические стержни. В 1917 г. он же предложил для численного разыскания функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ пользоваться методом Штермера – Адамса. Соответствующая вычислительная схема была развита Крыловым в ряде работ. Однако этот метод требует большого количества выкладок и к тому же, как и всякий экстраполяционный метод очень чувствителен к погрешностям вычислений [110, с. 364–392].

Морроу в 1905 г. и Вехмейер (1907) для определения собственных частот колебаний непризматических стержней применили метод последовательных приближений, ранее использовавшийся для определения критических нагрузок сжатых стоек переменного сечения. Теоретическое обоснование этого метода дал Б. Л. Сушенков в 1916 г. Он показал, что вычислительный процесс приводит к нахождению первой частоты и формы колебаний. В своем докладе, сделанном в Петрограде в Обществе морских инженеров Сушенков дал указания, как пользоваться методом последовательных приближений для определения высших частот и форм.

Исходным при применении метода последовательных приближений для определения частот и форм изгибных колебаний являются уравнения (8.2) при граничных условиях (8.3). Далее задаются каким-либо выражением искомой упругой линии $\varphi_0(z)$, например,

$$\varphi_0(z) = \alpha + \beta \frac{z}{l} + \sin\frac{\pi z}{l},$$

где α и β – постоянные, определяемые из условий общей уравновешенности сил инерции

$$\begin{aligned} &\int_0^l q(z)\varphi_0(z)\,dz = 0; \\ &\int_0^l\int_0^z q(z)\varphi_0(z)\,dz^2 = 0 \end{aligned} \tag{8.4}$$

и подставляют его вместо $y_k(z)$ в правую часть уравнения (8.2). После четырехкратного интегрирования находят из левой части этого уравнения новое приближение для $y_k(z)$ – $\varphi_1(z)$, где

$$\varphi_1(z) = \lambda^2\left[\int_0^z\int_0^z \frac{1}{EJ}\int_0^z\int_0^z q(z)\varphi_0(z)\,dz^4 + A_1\int_0^z \frac{1}{EJ}dz + B_1\int_0^z \frac{z}{EJ}dz + C_1 + D_1 z\right].$$

Постоянные интегрирования определяются частью из условий (8.3), частью же из условия уравновешенности сил инерции (8.4). Процесс продолжается до тех пор, пока не окажется, что при всяком z с достаточной точностью

$$\varphi_n(z) = \varphi_{n-1}(z) \tag{8.5}$$

Постоянная λ^2 определяется из условия (8.5) и является квадратом собственной частоты. В [190, с. 232–235] приводится доказательство сходимости данного процесса.

Для определения второй собственной частоты и соответствующей ей формы колебаний следует добиться только того, чтобы в течение всего процесса вычислений $A_1 = 0$. Этого можно достичь с помощью условия ортогональности форм главных свободных колебаний

$$\int_0^l q(z)\, y_k(z)\, y_n(z)\, dz = 0$$

при любых k и n не равных друг другу.

8.3. Применение вариационных методов

Приближенное значение первой собственной частоты можно определить также с помощью формулы Рэлея (3.9), взяв в качестве формы колебаний статический прогиб судна под действием сил тяжести. Метод дает завышенное значение собственной частоты, однако, вполне приемлемое для практики.

Швейцарский физик и математик Вальтер Ритц (1878–1909), обобщив метод Рэлея, реализовал идею вычисления частот, в том числе и высших, непосредственно из энергетического условия без решения дифференциальных уравнений. Метод описан в работе «О новом методе решения так называемой вариационной задачи» (Ritz W. Über neue Methode zur Lösung gewisser Variationsproblemen. Z. für reine und angew. Math., 1909, s. 135). По существу Метод Ритца является развитием метода Рэлея и иногда его называют методом Рэлея – Ритца. Теоретическое обоснование этого метода дал в 1918 г. Н. М. Крылов.

Ритц показал, что многие задачи математической физики вместо решения соответствующих дифференциальных уравнений могут быть сведены к вычислению минимумов некоторых определенных интегралов. Он предложил для этого пользоваться не строгими методами вариационного исчисления, а представлять искомые функции в виде рядов, коэффициенты которых подбираются из условия минимума рассматриваемого интеграла.

Особенный интерес к методу Ритца проявили представители прикладных наук, которым он давал в руки удобное средство для решения задач, до того совершенно недоступных. Появилось много работ, в которых метод Ритца применялся для приближенного решения различных задач математической физики. В задачах динамики упомянутый интеграл может быть получен из принципа Гамильтона – Остроградского

$$\int_0^t \left(T - \Pi\right) dt = 0\,, \tag{8.6}$$

либо непосредственно из условия равенства нулю работы сил инерции и упругих сил при малых отклонениях системы от положения равновесия.

Для поперечных колебаний неоднородного стержня функционал (8.6) имеет вид

$$S = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_0^l \left[\mu(z)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - EJ\left(z\right)\left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2\right]dzdt\,, \tag{8.7}$$

Для определения собственных частот и форм главных колебаний подставим в функционал (8.7) решение в виде

$$y\left(z,t\right) = \varphi\left(z\right)\sin\left(\lambda t + \alpha\right),$$

чем ограничим класс привлекаемых движений колебаниями одного и того же периода с различными, но близкими формами колебаний.
После интегрирования по t на интервале одного периода $T = 2\pi/\lambda$ получим

$$S = \frac{\pi}{2\lambda}\int_0^l \left\{\mu\left(z\right)\lambda^2\varphi^2\left(z\right) - EJ\left[\varphi''\left(z\right)\right]^2\right\}dz\,. \tag{8.8}$$

Сущность метода Ритца заключается в приведении вариационной задачи к задаче на разыскание экстремума функции многих независимых переменных. Значения функционала (8.8) рассматриваются на совокупности выражений вида

$$\psi(z) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi_i(z), \tag{8.9}$$

где α_i – варьируемые параметры, а $\psi_i(z)$ – базисные или координатные функции, специально задаваемые и удовлетворяющие, по крайней мере, геометрическим краевым условиям. На совокупности функций (8.9) функционал (8.8) обращается в функцию n независимых переменных α_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Для получения по методу Рэлея – Ритца первой собственной частоты в ряде (8.9) достаточно удерживать только один первый член. Для высших частот их уже нужно несколько, что увеличивает объем вычислительной работы. Кроме того выкладки часто сопровождаются вычислением малых разностей близких величин, что негативно влияет на точность вычислений. Метод Рэлея – Ритца получил широкое распространение не только в теории колебаний, но и в решении задач теории упругости, нелинейной механики и различных задач физики. С. П. Тимошенко пишет: «Вероятно, никакой другой математический прием не позволил развернуть научные исследования по сопротивлению материалов и теории упругости в столь широкой степени, как этот метод» [226, с. 404].

Для определения собственных частот корабля первым метод Ритца применил Е. В. Красноперов в работе «Применение метода Ритца к исследованию свободных колебаний балок», напечатанной в Известиях Санкт-Петербургского политехнического института в 1916, том 25, с. 377. Он искал форму свободных колебаний в виде

$$y_1(z) = a_0 + a_1 \psi_1(z),$$

где $\psi_1(z)$ – форма соответствующих свободных колебаний призматического стержня, а постоянные a_0 и a_1 подбираются из условия

$$\delta\int\limits_0^l EJ\left[y_1''(z)^2-\lambda^2 q(z)\,y_1(z)\right]dz=0\,.$$

Для вычисления этих интегралов кривые $EJ(z)$ и $\mu(z)$ заменяются ломаными линиями, имеющими постоянное значение на протяжении каждого из 16 равных участков длины корабля.

Уравнение частот по методу Ритца похоже на уравнение частот дискретной линейной системы.

$$\begin{matrix} T_{11}\lambda^2-U_{11} & T_{12}\lambda^2-U_{12} & \dots & T_{1n}\lambda^2-U_{1n} \\ T_{21}\lambda^2-U_{21} & T_{22}\lambda^2-U_{22} & \dots & T_{2n}\lambda^2-U_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1}\lambda^2-U_{n1} & T_{n2}\lambda^2-U_{n2} & \dots & T_{nn}\lambda^2-U_{nn} \end{matrix}\,, \tag{8.10}$$

где

$$T_{ij}=\int\limits_0^l \mu(z)\varphi_i\varphi_j\,dz\,;\qquad U_{ij}=\int\limits_0^l EJ(z)\varphi_i''\varphi_j''\,dz\,. \tag{8.11}$$

Следующим шагом в развитии методов решения дифференциальных уравнений был метод Бубнова – Галеркина.

Во втором томе курса строительной механики корабля, изданного в Санкт-Петербурге в 1914 г., Иван Григорьевич Бубнов (1872–1919) изложил новый метод решения дифференциальных уравнений – метод ортогонализации, который он применил к задаче устойчивости жестко опертой по контуру прямоугольной пластины, находящейся под действием линейно распределенной по контуру нагрузки. Принятое в форме двойного тригонометрического ряда решение удовлетворяет контурным условиям, но не удовлетворяет дифференциальному уравнению задачи. Но примененная при решении процедура ортогонализации позволила приближенно удовлетворить и условию устойчивости [88, с. 350]. А первое описание этого метода И. Г. Бубнов дал раньше в 1913 г. в отзыве на работу С. П. Тимошенко «Об устойчивости упругих систем». Русский кораблестроитель не связывает свой метод с вариационной задачей, а формулирует его как метод чистой ортогонализации, в чем виден его широкий взгляд на проблему интегрирования дифференциальных уравнений в целом. В то время как все математики и механики находились под влиянием метода Рэлея – Ритца, Бубнов совершил трудный и решительный шаг, открывший возможности решать несамосопряженные уравнения и исследовать неконсервативные системы.

Исследования по методу Бубнова продолжил Борис Григорьевич Галеркин (1871–1945), который предложил в статье «Стержни и пластинки», опубликованной в Вестнике инженеров и техников № 19 за 1915 г., аналогичный метод для уравнения С. Жермен, т.е. для менее общего случая, чем у Бубнова. При этом на источник метода он не ссылается. И. Г. Бубнов скончался в мае трудного, особенно для ученых, 1919 г., а Б. Г. Галеркин продолжал свои исследования, и метод получил его имя. Новым у него было то, что он свой метод не связывал ни с какой вариационной задачей, так, что его можно было применить к любому дифференциальному (и не только дифференциальному) уравнению, и не требовал ортогональности координатных функций [174, с. 21]. После ряда разъяснений в литературе, например, у И. М. Бабакова [18, с. 294] в Советском Союзе его все-таки стали называть методом Бубнова – Галеркина, хотя на Западе по-прежнему сохранилось название метод Галеркина. Но, по мнению некоторых ученых, правильнее, наоборот, оставить только фамилию Бубнова [88, с. 352].

С. П. Тимошенко [227, с. 160] утверждал, что метод Бубнова впервые также использован Ритцем, однако у Ритца уравнения типа Бубнова используются в частной задаче о колебаниях пластины, получены в результате формальных преобразований и не носят характера самостоятельного аппарата [174, с. 22].

Равенство нулю вариации δS удовлетворяется, если мы потребуем обращения в нуль интеграла

$$\int_0^l \left[\mu\lambda^2\varphi - \left(EJ\varphi''\right)'' \right] \delta\varphi dz = 0 \qquad (8.12)$$

при выполнении всех краевых условий задачи.

Равенство (8.12) называется вариационным уравнением Галеркина. Оно может быть обосновано не только из принципа Гамильтона – Остроградского, но и из общего вариационного уравнения динамики. В этом главнейшее преимущество метода Бубнова – Галеркина перед методом Ритца, так как он может быть применен ко всяким системам, а не только к консервативным.

Что касается формы колебаний (минимизирующая форма), то она строится в виде линейной суммы (5.15) конечного числа функций $\psi_i(z)$, аналогичных базисным функциям в методе Ритца, но удовлетворяющих всем краевым условиям – и геометрическим, и динамическим. Параметры a_i находятся из условия (5.18). Частотное уравнение имеет тот же вид (5.16), что и в методе Ритца, но коэффициенты матрицы отличаются от (5.17)

$$U_{ij} = \int_0^l \left[EJ(z)\varphi_i'' \right]'' \varphi_j dz \; .$$

Все перечисленные вариационные методы дают завышенные значения собственных частот.

Важнейшим вопросом при исследовании вибраций корабля был учет влияния забортной воды. Исследования показали, что архимедова сила, существенная при исследовании качки, на колебания корпуса не влияет, изменяя частоту не более чем на 1–2 %. Это объясняется тем, что жесткость воды как упругого основания ничтожно мала по сравнению с жесткостью корпуса, поэтому последний рассматривается как совершенно свободный упругий стержень. Демпфирующим влиянием воды также принято пренебрегать. Зато обязательно надо учитывать инерционное влияние воды, увлекаемой колебаниями. Опыты, поставленные со стержнями, колеблющимися сначала в воздухе, а затем в воде показали, что масса увлекаемой воды соизмерима с массой самого корабля. Об этом также свидетельствует отличие собственных частот корабля на мелководье и на глубине, где влияние массы воды сказывается сильнее [190, с. 274–278].

Исследования показали, что для почти полного уничтожения вибраций судов достаточно изменить период колебаний на 10–15 %.

Такой метод является наиболее действенным средством к устранению вибраций уже построенного судна и достигается заменой гребного винта. При постройке новых судов номинальное число оборотов рекомендуется на 10–15 % меньше резонансных или на 40–50 % выше их. Последнее делается для того, чтобы вибрация не наступила при кратковременном падении оборотов, что вполне возможно при эксплуатации судовых машин.

8.4. Дальнейшее развитие методов расчетов

Дальнейшее развитие исследования колебаний корпуса корабля получили в работах П. Ф. Папковича [190]. Для определения амплитуд вынужденных изгибных колебаний судовых корпусов вблизи резонанса он предлагает метод главных координат, т.е. координат, обращающих кинетическую и потенциальную энергию в суммы полных квадратов

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} m_k^* \dot{q}_k^2 ; \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s} c_k^* q_k^2 .$$

Здесь m_k^* и c_k^* – соответственно обобщенные массы и жесткости, а собственные частоты определяются по формулам

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{c_k^*}{m_k^*}} .$$

Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний примут очень простой вид

$$m_k^* \ddot{q}_k + c_k^* q_k = Q_k .$$

Амплитуды главных колебаний при отсутствии сопротивления будут иметь вид

$$A_k = \frac{Q_k}{c_k^*} \mu_k ,$$

где $\mu_k = \dfrac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \omega^2}$ – коэффициент динамичности. Метод главных координат позволяет простейшим путем определить амплитуды вынужденных колебаний вблизи резонанса. Определить размахи колебаний в любом месте в случае многочастотного возбуждения можно путем суммирования ряда

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(z) q_k(t),$$

где y – ордината упругой линии корабля.

Если амплитуду колебаний надо определить только для отдельного значения частоты возмущающей силы, это можно сделать проще. Под действием гармонической возмущающей силы упругая линия может быть представлена в виде

$$y = y(z)\sin\omega t,$$

где $y(z)$ – некоторая функция, вид которой зависит от распределения масс, кривой жесткости и частоты возмущающей силы ω. Для отыскания упругой линии чаще использовался метод приближенного численного интегрирования дифференциальных уравнений вынужденных колебаний Крылова – Штермера – Адамса или метод последовательных приближений А. Н. Крылова.

Позже для расчета балок стали применять метод начальных параметров в матричной форме, который оказался достаточно удобным и для ЭВМ [18, с. 203]. При этом корабль рассматривают как ряд однородных последовательно соединенных балок. Для каждой из элементарных частей смещение, угол поворота, изгибающий момент и поперечную силу на одном конце записывают через те же параметры на другом при помощи матрицы, которую получают из общего решения задачи о свободных колебаниях однородной балки. В результате можно получить однородную систему уравнений, из которой итерационным способом определяется собственная частота, после чего строится форма колебаний.

С переводом судовых энергетических установок на паровые и газовые турбины, у которых силы инерции уравновешены, а также дизели, которые хотя и являются поршневыми машинами, но уравновешены гораздо лучше паровых машин, вопрос о возбуждении колебаний неуравновешенными движущимися массами отпал.

Однако, как оказалось, колебания корпуса могут возникать и у судов, оснащенных турбинами или дизелями. Причиной их являются гидродинамические силы, возникающие при прохождении лопасти винта вблизи корпуса. Долгое время на этот вид колебаний не обращали внимания, пока они не проявили себя на знаменитом французском турбоэлектрическом лайнере «Нормандия», водоизмещением 83 423 т и длиной 313,7 м. Лайнер был введен в эксплуатацию в 1935 г. Однако его корпус испытывал сильные изгибные колебания, поскольку частота гидродинамических сил оказалась равна собственной частоте колебаний корпуса судна. Вибрация была обнаружена еще на ходовых испытаниях, но чиновники компании French Line не видели в ней причину для задержки первого плавания. Однако во время рейса пассажиры, живущие в каютах туристического класса, считали их непригодными для жилья из-за вибрации и шума.

Рис. 8.6. Лайнер «Нормандия»

Вот как описывают в книге «Одноэтажная Америка» колебания корпуса в каютах туристического класса знаменитые писатели Илья Ильф и Евгений Петров, плывшие на «Нормандии» в США в 1935 г.:

«Все задрожало на корме, где мы помещались. Дрожали палубы, стены, иллюминаторы, шезлонги, стаканы над умывальником, сам умывальник. Вибрация парохода была столь сильной, что начали издавать звуки даже такие предметы, от которых никак этого нельзя было ожидать. Впервые в жизни мы слышали, как звучит полотенце, мыло, ковер на полу, бумага на столе, занавески, воротничок, брошенный на кровать. Звучало и гремело все, что находилось в каюте. Достаточно было пассажиру на секунду задуматься и ослабить мускулы лица, как у него начинали стучать зубы. Всю ночь казалось, что кто-то ломится в двери, стучит в окна, тяжко хохочет. Мы насчитали сотню различных звуков, которые издавала наша каюта».

Отстроить систему от резонанса удалось только путем замены гребных винтов [33, с. 153]. В начале 1936 г., все четыре трехлопастных винта (массой 23 т каждый) были заменены четырехлопастными (массой 25 т) при одновременном изменении формы выкружек гребных валов. Это позволило полностью решить проблему вибрации корпуса лайнера.

С ростом размеров судов появилась еще одна причина поперечных колебаний их корпусов. В монографии [102, с. 340] указано, что некоторые очень большие и гибкие суда могут резонировать под действием волн в двухузловом режиме колебаний (первая собственная форма, если не считать двух, соответствующих нулевым частотам). Это относительно новая проблема, вызванная уменьшением собственных частот в связи с увеличением размеров судна. В первую очередь это относится к супертанкерам водоизмещением свыше 300 тыс. т и огромным балкерам (суда для перевозки насыпных грузов), эксплуатирующимся на Великих озерах в США и Канаде.

В книге [213, с. 215–224] описывается случай гибели балкера «Эдмунд Фицджеральд». Этот рудовоз длиной 222,5 м был построен в 1958 г. и имел регистровый тоннаж 13 623 т при грузовместимости 25 175 т. В 1969 г. он прошел капитальный ремонт, его корпус усилили дополнительными поперечными связями, после чего грузовместимость выросла до 27 500 т. Когда в ноябре 1973 г. судно попало в сильный шторм, оно при качке, по свидетельству одного из членов экипажа, «извивалось словно змея» [213, с. 216]. Через два года – 11 ноября 1975 г. ситуация повторилась. Но на этот раз рудовоз принял много воды, его корпус не выдержал и разломился на три части. Обломки ушли на дно так быстро, что никто из членов экипажа не смог выбраться из внутренних помещений и спастись. Среди многих возможных причин гибели рудовоза ни американские специалисты, ни автор книги [213], на наш взгляд, не называют главной – резонансных колебаний корпуса, хотя характер разрушений как раз соответствует двухузловой форме колебаний, что указывает на интенсивные изгибные колебания. К понижению собственных частот могла привести упомянутая модернизация без увеличения продольной прочности и перегрузка за счет принятой на борт воды.

Рис. 8.7. Рудовоз «Эдмунд Фицджеральд»

Таким образом, определение напряженно-деформированного состояния судов при динамических нагрузках остается и сейчас важной задачей. В связи с появлением новых конструкций судов ужесточаются требования к точности расчетных методов, так как проектирование по прототипу не представляется возможным. Появление ЭВМ позволило применить для расчетов корпусов кораблей новые расчетные методы, в которых более полно учитываются геометрические формы и условия работы конструкции, а именно, распределение нагрузки, ее изменение во времени, граничные условия, температурные факторы и реологические свойства используемых материалов. Применение конечно-элементных моделей исследования напряженно-деформированного состояния позволило перейти на качественно новые методы оценки прочности судна. МКЭ предназначен для решения задач на ЭВМ, в том числе и для вынужденных колебаний при произвольно распределенных возмущающих силах. Он основан на разбиении исследуемого объекта на множество геометрически простых элементов и получил широкое распространение не только в механике сплошных сред, но и в задачах гидродинамики и теплопроводности [198, с. 7]. Появление этого метода дало возможность проводить более сложные динамические расчеты, например, исследование взаимовлияния вибраций всего корпуса корабля и местных вибраций.

При проведении расчетов в настоящее время учитываются многие особенности судового корпуса – его непризматичность, дискретность отдельных элементов набора, наличие переборок, платформ, вырезов и надстроек. При таком подходе вопросы общей и местной прочности тесно связаны. Наибольшее применение МКЭ нашел для оценки местной прочности судового корпуса, но нередко он используется и для общего расчета. При этом используется два подхода. При старом балочном подходе корпус представляется балкой ступенчато-переменной жесткости, разбиваемой на ряд стержневых конечных элементов. При втором подходе судовой корпус разбивается на множество пластинчатых и стержневых элементов, соединенных между собой в узловых точках [198, с. 8]. С целью сокращения машинного времени и экономии памяти в 70–80-е гг. прошлого века были разработаны модификации МКЭ – метод редуцированных элементов, супер-элементов, модуль-элементов, конечных полос и т.д.

Метод супер-элементов был предложен в 1960-е гг. Он основан на разбиении конструкции на несколько подконструкций, что позволило справиться с расчетом сложных конструкций при ограниченных возможностях ЭВМ того времени.

В Ленинградском кораблестроительном институте под руководством профессора В. А. Постнова разработан метод модуль-элементов, основанный на аналитическом описании отдельных подструктур [198].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аврамов К. В. Нелинейные нормальные формы колебаний цилиндрических оболочек / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин // Проблемы машиностроения, 2003. – № 4. – С. 60–67
2. Автономова Л. В. Оценка динамической прочности корпуса крупногабаритного ДВС / Л. В. Автономова, В. И. Лавинский, Ю. П. Анацкий // Труды 13-й Международной научно-технической конференции «Физические и компьютерные технологии», 2007. – С. 413 – 415
3. Академик Александр Михайлович Ляпунов: К 150-летию со дня рождения: Монография / [Л. Л. Товажнянский, К. В. Аврамов, Е. Е. Александров и др.]. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2007. – 288 с.
4. АНАЛИТИК – алгоритмический язык для описания процессов с использованием аналитических преобразований / [В. М. Глушков, В. П. Клименко, А. А. Стогний др.] // Кибернетика, 1971. – № 3. – С. 102 –134
5. Андрєєв Ю. М. Система комп’ютерної алгебри для досліджень механіки машин / Ю. М Андрєєв, А. О. Ларін, О. К. Морачковський // Машинознавство, 2005. – № 7 (95). – С. 3 –8
6. Андреев Ю. М. Аналитическая вибрационная диагностика рабочего процесса ДВС при нелинейной диагностической модели / Ю. М. Андреев, А. А. Ларин // Теория механизмов и машин, 1987. – Вып. 42. – С. 106–110
7. Андреев Ю. М. Компьютерное моделирование задач механики голономных систем твердых тел со стационарными и нестационарными связями / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин, 1993. – Вып. 53. – С. 96–102

8. Андреев Ю. М. Компьютерное построение дифференциальных уравнений движения неголономных систем / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин, 1993. – Вып. 54. – С. 93–98

9. Андреев Ю. М. О динамике голономных систем твердых тел. / Ю. М Андреев, О. К. Морачковский // Прикладная механика, 2005. – 41. – № 7. – С. 130–138

10. Андреев Ю. М. Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности / Ю. М. Андреев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин, 1984. – Вып. 40. – С. 50–56

11. Андронов А. А. Теория колебаний. / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. – М.: Гос. Изд-во физ-мат. литературы, 1959. – 916 с.

12. Андрєєв Ю. М. Система комп'ютерної алгебри для досліджень механіки машин / Ю. М Андрєєв, А. О. Ларін, О. К. Морачковський // Машинознавство, 2005. – № 7 (95). – С. 3–8

13. Аничков В. А. Аварийность валов судовых паровых машин / В. А. Аничков // Сборник докладов по динамической прочности деталей машин (труды совещания). – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1946. – С. 210–219

14. Бабаков И. М. К определению наибольшей частоты малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы / И. М. Бабаков // Научные записки ХММИ. – Т. V. – Харьков, 1940. – С. 75–84

15. Бабаков И. М. К расчету высших частот крутильных колебаний / И. М. Бабаков // Журнал Прикладная математика и механика. – Т. V. – Вып. 1 – М.: ИМ АН СССР, 1941. – С. 109–124

16. Бабаков И. М. О границах основной частоты малых колебаний систем с конечным числом степеней свободы / И. М. Бабаков // Научные записки ХММИ, 1940. – Т. V. – С. 55–74

17. Бабаков И. М. Обратный метод в применении к расчету собственных частот крутильных колебаний / И. М. Бабаков // Научные записки ХММИ, 1935. – Т. II. – Книга I. – С. 73–79

18. Бабаков И. М. Теория колебаний / И. М. Бабаков. – М.: Наука, 1968. – 560 с.

19. Беломытцев А. С. Вынужденные колебания нелинейных систем при нелинейном демпфировании / А. С. Беломытцев, А. А. Ларин // Динамика и прочность машин, 1993. – Вып. 53. – С. 79–86

20. Бернштейн С. А. Очерки по истории строительной механики / С. А. Бернштейн. – М.: Госстройиздат, 1957. – 236 с.

21. Бесов Л. М Классик отечественной механики Иван Михайлович Бабаков / Л. М. Бесов, А. А. Ларин, О. К. Морачковский // Історія Української науки на межі тисячоліть. К, 2007. – Вип. 28. – С. 35–42

22. Бетлей Ш. Исследование вязких свойств силиконовых масел / Ш. Бетлей // Динамика и прочность машин, 1965. – Вып. 2. – С. 156–162

23. Биргер И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач / И. А. Биргер. – М.: Оборонгиз, 1956. – 151 с.

24. Бишоп Р. Колебания / Р. Бишоп. – М.: Наука, 1979. – 160 с.

25. Боголюбов А. Н. История механики машин / А. Н. Боголюбов. – К.: Наукова думка, 1964. – 463 с.

26. Боголюбов А. Н. Математики. Механики. Биогр. Справочник / А. Н. Боголюбов. – К.: Наукова думка, 1983. – 640 с.

27. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.

28. Боголюбов Н. Н Метод интегральных многообразий в нелинейной механике. / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. // Труды Межд. симп. по нелинейным колебаниям; т. 1. – К, 1963 – С. 93–154

29. Боголюбов Н. Н. Одночастотные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы / Н. Н. Боголюбов // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР, 1949. – Т. 10. – С. 9–21

30. Болотин В. В. Современные проблемы теории колебаний механических систем. / В. В. Болотин, Г. Ю. Джанелидзе, Я. Г. Пановко // Известия вузов. Машиностроение, 1963. – № 4. – С. 5–13

31. Борин А. А. Из истории решения проблемы флаттера / А. А. Борин // Из истории авиации и космонавтики, 1977. – Вып. 32. – С. 68–78

32. Бреславский Д. В. Иван Алексеевич Вышнеградский – основоположник теории автоматического управления (к 175-летию со дня рождения). / Д. В. Бреславский, С. А. Горелова, А. А. Ларин. // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - Автоматика и приборостроение, 2007. – Вып. 10. – С. 3–12

33. Вайнберг Д. В. Механические колебания и их роль в технике / Д. В. Вайнберг, Г. С. Писаренко. – М.: Физматгиз, 1958. – 232 с.

34. Варвак П. М. Метод конечных элементов. / [П. М. Варвак, И. М. Бузун, А. С. Городицкий и др.]. – К.: Вища школа, 1981. – 176 с.

35. Величенко В. В. Матрично-геометрические методы в механике с приложениями к задачам робототехники. / В. В. Величенко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. – 280 с.

36. Веселовский И. Н. Очерки по истории теоретической механики / И. Н. Веселовский. – М.: Высшая школа, 1974. – 287 с.

37. Вибрации в технике: Справочник в 6 т. / [Ред. совет: В. Н. Челомей (предс.)]. – М.: Машиностроение, 1978–1981

38. Вибрации энергетических машин / [под ред. Н. В. Григорьева]. – Л.: Машиностроение, 1974. – 464 с.

39. Виттенбург Й. Динамика систем твердых тел. / Й. Виттенбург. – М.: Мир, 1980. – 296 с.

40. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

41. Воробьев Ю. С. Академик Анатолий Петрович Филиппов – лидер научной школы в области динамики и прочности машин (к 110-летию со дня рождения) / Ю. С. Воробьев, А. А. Ларин, Г. И. Львов // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - Динамика и прочность машин, 2009. – вып. 42. – С. 3–7

42. Вульфсон И. И. Нелинейные задачи динамики машин. / И. И. Вульфсон, М. З. Коловский. – Л.: Машиностроение, 1968. – 282 с.

43. Вышнеградский И. А. Теория автоматического регулирования (линеаризованные задачи). / И. А. Вышнеградский, Д. К. Максвелл, А. Стодола. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. – 431 с.

44. Ганиев Р. Ф Колебания твердых тел. / Р. Ф. Ганиев, В. О. Кононенко. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

45. Ганиев Р. Ф. Динамика систем твердых и упругих тел. / Р. Ф. Ганиев, П. С. Ковальчук. – М.: Машиностроение, 1980. – 340 с.

46. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики / Я. Л. Геронимус. – М.: Гостехиздат, 1952. – 519 с.

47. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках / С. Г. Гиндикин. – М.: Наука, 1981, 192 с.

48. Глазман И. М. Освобождение резонансно-опасных зон от собственных частот вибрационной системы варьированием ее параметров / И. М. Глазман, Л. И. Штейнвольф // Известия АН СССР. Сер. Механика и машиностроение, 1964. – № 4. – С. 126–128

49. Голин Г. М. Классики физической науки (с древнейших времен до начала XX в.) / Г. М. Голин, С. Р. Филонович. – М.: Высш. шк., 1989. – 576 с.

50. Голоскоков Е. Г. Нестационарные колебания механических систем: дис. … докт. техн. наук / Евгений Григорьевич Голоскоков. – Харьков, 1968. – 564 с.

51. Голоскоков Е. Г. Прохождение через резонанс линейных систем с одной и многими степенями свободы (стержни, пластины): дис. … канд. техн. наук / Евгений Григорьевич Голоскоков. – Харьков, 1958. – 202 с.

52. Голоскоков Е. Г. / Нестационарные колебания деформируемых систем / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. – К.: Наук. думка, 1977. – 336 с.

53. Голоскоков Е. Г. / Нестационарные колебания механических систем / Е. Г. Голоскоков, А. П. Филиппов. – К.: Наук. думка, 1966. – 334 с.

54. Гопп Ю. А. Графическое решение линейных и нелинейных колебаний. / Ю. А. Гопп // Вестник инженеров и техников, 1936. – № 2. – С. 100–106

55. Гопп Ю. А. Демпферы крутильных колебаний коленчатых валов быстроходных двигателей. / Ю. А. Гопп. – Х.: Гостехиздат. – 1938. – 272 с.

56. Гопп Ю. А. Линеаризация позиционной силы методом кусочнолинейной аппроксимации. / Ю. А. Гопп // Инженерный сборник; т. 18, 1954. – С. 149–152

57. Гопп Ю. А. Опыты с нелинейными колебаниями. / Ю. А. Гопп // Вестник инженеров и техников, 1937. – № 1. – С. 49–51

58. Григорьян А. Т. Вклад последних двадцати пяти лет в развитие истории механики. / А. Т. Григорьян, Г. К. Михайлов // Сборник статей. Исследования по истории механики. – М.: Наука, 1983. – С. 6–30

59. Григорьян А. Т. Механика от античности до наших дней / А. Т. Григорьян. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

60. Григорьян А. Т. Учение Гюйгенса о центре качаний / А. Т. Григорьян, У. И. Франкфурт // Сборник статей. «Очерки истории математики и механики». – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – С. 218–227

61. Гринев В. Б. Оптимизация стержней по спектру собственных значений / В. Б. Гринев, А. П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1979. – 212 с.

62. Гринев В. Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам / В. Б. Гринев, А. П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1975. – 295 с.

63. Гробов В. А. Асимптотические методы расчета изгибных колебаний валов турбомашин / В. А. Гробов. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 166 с.

64. Грошева М. В. История использования аналитических вычислений (на компьютере) в задачах механики / М. В. Грошева, Г. Б. Ефимов, В. В. Самсонов. – М.: Изд. ИПМ им. М. В. Келдыша – РАН, 2005. – 87 с.

65. Гюйгенс Х. Три мемуара по механике / Х. Гюйгенс. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 378 с.

66. Дабагян А. В. Некоторые колебательные процессы в роторах турбо- и гидрогенераторных установок при несимметричных и асинхронных режимах работы генератора: дис. … докт. техн. наук / Арег Вагаршакович Дабагян. – Харьков, 1959.– 278 с.

67. Давиденков Н. Н. О рассеянии энергии при вибрациях / Н. Н. Давиденков // Журн. техн. физики, 1938. – VIII. – Вып. 6. – С. 438–499

68. Данилевский А. М. О численном решении векового уравнения. / А. М. Данилевский // Матем. сб., 2 (44), 1937. – С. 169–172

69. Ден-Гартог Дж. П. Механические колебания. / Дж. П. Ден-Гартог. – М.: Госиздат физ-мат л-ры, 1960. – 580 с.

70. Диагностика рабочего процесса транспортного двигателя / Отчет по НИР № 21861 // ХПИ им. В. И. Ленина. – Харьков, 1981 // Центральный государственный научно-технический архив Украины, ф. Р-42, оп. 4., группа-комплекс №3-15, ед. хр. 38. – 183 л.

71. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов. / Ф. М. Диментберг. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.

72. Динамика и прочность коленчатых валов. / [Сб. статей под ред. С. В. Серенсена] – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 422 с.

73. Динамика и прочность коленчатых валов. / [Сб. статей под ред. С. В. Серенсена]. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1950. – 296 с.

74. Динник А. Н. Избранные труды. Т. 2 / А. Н. Динник. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 223 с.

75. Дондошанский В. К. Расчет колебаний упругих систем на электронных вычислительных машинах / В. К. Дондошанский. – М.–Л.: Машиностроение, 1965. – 368 с.

76. Драгун С. В. Оптимизация моделей силовых передач в динамических расчетах / С. В. Драгун, В. Н. Карабан, Л. И. Штейнвольф // Проблемы машиностроения. Вып. 17, 1982. – С. 66–70

77. Драгун С. В. Оптимизация нелинейных силовых передач машин при переходных режимах: дис. … канд. техн. наук: спец. 01.02.06 «Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры» / Сергей Владимирович Драгун. – Харьков, 1984. – 185 с.

78. Ейлер Л. Полное умозрение строения и вождения кораблей / Л. Ейлер. – СПб.: 1778. – 433 с.

79. Ефимов Г. Б. Из истории развития и применения компьютерной алгебры в ИПМ им. М. В. Келдыша / Г. Б. Ефимов, Е. Ю. Зуева, И. Б. Щенков // Математическое моделирование, 2001. – Т. 13 – № 6. – С. 11–18

80. Ефимов Г. Б. Об истории использования отечественных систем символьных преобразований в механических приложениях / Г. Б. Ефимов, М. В. Грошева // Математичні машини і системи, 2008. – № 1. – С. 85–90

81. Житомирский В. К. Механические колебания и практика их устранения. / В. К. Житомирский. – М.: Машиностроение, 1966. – 176 с.

82. Завистовская Е. И. Проблемы прочности в турбостроении и развитие школы механики НТУ «ХПИ» / Е. И. Завистовская, А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - История науки и техники. - 2009. – Вып. 48. – С. 40–49

83. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. / О. Зенкевич – М.: Мир, 1975. – 541 с.

84. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация. / О. Зенкевич, К. Морган – М.: Мир – 1986. – 318 с.

85. Зенкевич О. Метод конечных элементов в теории сооружений и механике сплошных сред. / О. Зенкевич – М.: Недра, 1974. – 541 с.

86. Исследование демпфирования в связи с прочностью пакетов турболопаток / Отчет по теме за 1940 г. – К, 1940 // Архив Института механики НАН Украины, оп. 2. – 45 л.

87. Исследование и выбор параметров динамически нагруженных приводов турбопоршневого двигателя. / Отчет по НИР // Харьковский политехнический институт. – Хоздоговор № 21511/202 ОП. – № ГР 71030993. – Ч. 1. – Харьков, 1975. – 124 с.

88. История механики в России. – К.: Наукова думка, 1987. –392 с.

89. История механики с древнейших времен до конца XVIII века / [под общ. ред. А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского]. – М.: Наука, 1971. – 398 с.

90. История механики с конца XVIII века до середины XX века / [под общ. ред. А. Т. Григорьяна и И. Б. Погребысского]. – М.: Наука, 1972. – 414 с.

91. История отечественной математики. Т. 1. С древнейших времен до конца XVIII в. – К.: Наукова думка, 1968. – 492 с.

92. История отечественной математики. Т. 4, кн. 1: 1917–1967. – К.: Наукова думка, 1970. – 884 с.

93. История отечественной математики. Т. 4, кн. 2: 1917–1967. – К.: Наукова думка, 1970. – 668 с.

94. Ишлинский А. Ю. Механика: идеи, задачи, приложения. / А. Ю. Ишлинский. – М.: Наука, 1985. – 624 с.

95. Калиткин Н. Н. Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978. – 512 с.

96. Капица П. Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения / П. Л. Капица // Журнал технической физики, 1939. – Т. IX, вып. 2. – С. 125 – 147

97. Карабан В. Н. Исследование маятникового антивибратора с трением: дис. … канд. техн. наук / Владимир Николаевич Карабан. – Харьков, 1966. – 193 с.

98. Карабан В. Н. К вопросу применения итерационного метода для расчетов колебаний существенно нелинейных систем / В. Н. Карабан, В. М. Шатохин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин, 1981. – Вып. 33. – С. 54–63

99. Кац А. М. Вынужденные колебания при прохождении через резонанс / А. М. Кац // Инж. сб, 1947. – Т. III, вып. 2. – М.: Изд-во АН СССР. – С. 100–125

100. Кедровская О. С. Жизненный и творческий путь Сергея Ивановича Богомолова (К 90-летию со дня рождения) / О. С. Кедровская, А. А. Ларин, Г. И. Львов // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». - Динаміка і міцність машин, 2012. – Вип. 55. – С. 3–12

101. Кілочицька Т. В. Становлення нелінійної механіки в Україні (30-ті роки XX ст.) / Т. В. Кілочицька //Наука і наукознавство, 2007. – № 3. – С. 102–107

102. Клейтон Б. Механика морских судов. / Б. Клейтон, Р. Бишоп. – Л.: Судостроение, 1986. – 436 с.

103. Клеро К. А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики / К. А. Клеро. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947. – 220 с.

104. Кононенко В. О. Автоколебания в механических системах, обусловленные трением: дис. … докт. техн. наук / Виктор Олимпанович Кононенко. – Киев, 1953. – 278 с.

105. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко. – М.: Наука, 1964. – 254 с.

106. Кононенко В. О. Нелинейные колебания механических систем. Избр. труды / В. О. Кононенко. – К.: Наукова думка, 1980. – 220 с.

107. Коноплев В. А. Агрегативная механика систем твердых тел. / В. А. Коноплев. – СПб.: Наука, 1996. – 166 с.

108. Косько И. К. Динамический анализ и синтез продольных нагрузок ракет: дис. … докт. техн. наук / Игорь Константинович Косько. – Днепропетровск, 1971.– 278 с.

109. Крилов М. М Про деякі формальні розклади нелінійної механіки / М. М. Крилов, М. М. Боголюбов // Вид-во Всеукр. АН – Київ, 1934. – 83 с.

110. Крылов А. Н. Вибрация судов. Собрание трудов. Т. X. / А. Н. Крылов. – М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 402 с.

111. Крылов А. Н. Воспоминания и очерки. / А. Н. Крылов. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 884 с.

112. Крылов А. Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала / А. Н. Крылов. – Л.: Изд-во АН СССР, 1932. – 31 с.

113. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем / А. Н. Крылов // Изв. АН СССР, 1931. – № 4. – С. 491–539

114. Крылов Н. М. Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов. – К.: Изд-во АН УССР, 1937. – 321 с.

115. Кубенко В. Д. Нелинейное взаимодействие форм изгибных колебаний цилиндрических оболочек. / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Т. С. Краснопольская. – К.: Наукова думка, 1984. – 200 с.

116. Кубенко В. Д. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек. / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук, Н. П. Подчасов. – К.: Вища школа, 1989. – 240 с.

117. Кублановская В. Н. О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений / В. Н. Кублановская // Вычислительная математика и математическая физика, т. 1 – 1961. – № 4. – С. 555–570

118. Кузнецов А. П. Нелинейные колебания / А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. – М.: Физматлит, 2002. – 292 с.

119. Курпель Н. С. Проекционно-итерационные методы решения операторных уравнений / Н. С. Курпель. – К.: Наукова думка, 1968. – 243 с.

120. Кушлакова Н. М. Харківське математичне товариство: історія заснування, розвитку та діяльності (1879–1930) / Н. М. Кушлакова, В. С. Савчук. – Дніпропетровськ: ІМА-прес, 2009. – 244 с.

121. Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. I / Ж. Лагранж. – М.–Л.: Гостехиздат, 1950. – 594 с.

122. Лагранж Ж. Аналитическая механика, т. II / Ж. Лагранж. – М.– Л.: Гостехиздат, 1950. – 440 с.

123. Ларин А. А. Асимптотические методы в нелинейной динамике и история их развития в Украине с 1930-го года / А. А. Ларин, К. В. Аврамов // Механіка та машинобудування, 2006. – Вип. 1. – С. 297–304

124. Ларин А. А. Вклад Евгения Григорьевича Голоскокова в развитие теории нестационарных колебаний / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - Динамика и прочность машин, 2008. – Вып. 36. – С. 4–11

125. Ларин А. А. Вклад ученых Харьковского политехнического института в развитие методов расчета крутильных колебаний валопроводов / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - История науки и техники. - 2009. – Вып. 29. – С. 83–91

126. Ларин А. А. Деятельность Института строительной механики АН УССР в области динамической прочности в 1930–1940-е гг. / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - История науки и техники. - 2009. – Вып. 53. – С. 67–79

127. Ларин А. А. Зарождение математической физики и теории колебаний континуальных систем в «споре о струне» / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - История науки и техники. - 2008. – Вып. 8. – С. 89–97

128. Ларин А. А. Исследования колебаний ракет в Украине в 1960-е гг. / А. А. Ларин // Вісник Дніпропетровського університету, 2012. – № 1/2 Серія історія і філософія науки і техніки. – вип. 20. – С. 164–170

129. Ларин А. А. Исследование колебаний с учетом демпфирования в первой трети XX века (история вопроса) » / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - Транспортное машиностроение. - 2009. – Вып. 47. – С. 156–163

130. Ларин А. А. Исследования колебаний с учетом рассеяния энергии в материале. Основание школы Г. С. Писаренко / А. А. Ларин // Вісник Дніпропетровського університету, 2010. – № 1/2. – Серія історія і філософія науки і техніки. – вип. 17. – С. 89–96

131. Ларин А. А. Исследования колебаний тепловозных силовых установок в Харьковском политехническом институте в 1960-е гг. / А. А. Ларин // Механіка та машинобудування, 2009. – вип. 2. – С. 158–167

132. Ларин А. А. Исследования крутильных колебаний авиамоторов основателями нелинейной механики Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским в 1940-е гг. / А. А. Ларин // Вісник Дніпропетровського університету, 2009. – № 1/2. – Серія історія і філософія науки і техніки. – вип. 17. – С. 61–68

133. Ларин А. А. История развития исследований поперечных колебаний корпусов кораблей / А. А. Ларин // Механіка та машинобудування. – Вип. 1, 2008. – С. 253–264

134. Ларин А. А. История развития методов динамических расчетов коленчатых валов / А. А. Ларин, Ю. Л. Тарсис // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - Динамика и прочность машин, 2008. – Вып. 47. – С. 3–13

135. Ларин А. А. История развития теории нестационарных колебаний / А. А. Ларин // Вестник НТУ «ХПИ» История науки и техники. - 2009. – Вып. 48. – С. 73–82

136. Ларин А. А. О творческом наследии Льва Израилевича Штейнвольфа – ученого и педагога » / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». - Динамика и прочность машин. - 2006. – Вып. 21. - С. 3–6

137. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А. А. Ларин. – Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.

138. Ларин А. А. Профессор Арег Вагаршакович Дабагян – ученый и организатор высшей школы (к 90-летию со дня рождения) / А. А. Ларин // Вісник НТУ «ХПІ» Історія науки і техніки, Харків, 2011, вип. 1, с. 83–89

139. Ларин А. А. Развитие методов расчета крутильных колебаний в Харьковском политехническом институте с 1930 по 1970 годы / А. А. Ларин // Вестник Национального технического университета «ХПИ». – Динамика и прочность машин. - 2007. – Вып. 22. - С. 90–98

140. Ларин А. А. Развитие теории колебаний механических систем в кораблестроении/ А. А. Ларин// Дослідження з історії техніки. Зб. наукових праць. – К.: НТУУ «КПІ», 2009. – Вип. 11. – с. 29–36

141. Ларин А. А. Силовой анализ механизмов с применением систем аналитических преобразований на ЭВМ / А. А. Ларин // Сб. науч. трудов «Теория механизмов и машин». – К., 1993. – С. 64–72

142. Ларин А. А. Юрий Сергеевич Воробьев – ученый и педагог: (К 75-летию со дня рождения) / А. А. Ларин // Вісник НТУ «ХПІ» Історія науки і техніки, Харків, 2011, вип. 64, с. 3–11

143. Ларін А. О. Василь Євдокимович Бреславський - видатний вчений - механік (до 90-річчя з дня народження). / А. О. Ларін // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». – Динаміка і міцність машин, 2010. – Вип. 37. – С. 12–19

144. Ларін А. О. Дослідження коливань танкових дизелів сімейства ТД (історія питання). / А. О. Ларін // Вісник Національного університету «Львівська політехніка» № 670 «Держава та армія». – Львів: Вид-во НУ «Львівська політехніка», 2010. – С. 199–205

145. Ларін А. О. З історії створення танкового дизеля В-2. Дослідження крутильних коливань трансмісії. / А. О. Ларін // Питання історії науки і техніки. - 2009. - № 2. - С. 25–32

146. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения / Н. Н. Лебедев. - М.: ГИТТЛ. - 1953. – 624 с.

147. Лежён-Дирихле Г. П. Об устойчивости равновесия. / Г. П. Лежён-Дирихле. – В кн.: Ж. Лагранж Аналитическая механика, т. I. Дополнения. – М. – Л.: Гостехиздат, 1950. – С. 537–540

148. Леонард Эйлер: [Пер. с нем.] Р. Тиле. – К.: Вища школа, 1983. – 192 с.

149. Лурье И. А. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой из двух прямолинейных отрезков / И. А. Лурье, А. И. Чекмарев // Прикладная математика и механика. – Т. 1. – В. 3, 1938. – С. 307–324

150. Лурье И. А. Крутильные колебания в дизельных установках / И. А. Лурье. – М.–Л.: Военмориздат, 1940. – 220 с.

151. Общая задача об устойчивости движения: [Дисс. д-ра наук] / А. М. Ляпунов. – Х. – 1892. – XI. – 250 с.

152. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов // Собр. соч. т. 2. – М.: Изд. АН СССР, 1954. – С. 7–236

153. Мандельштам Л. И. О явлении резонанса n-го рода / Л. И. Мандельштам, Н. Д. Папалекси // Журнал технической физики. Вып. 2, 1932. – С. 775–811

154. Мартынюк А. А. Устойчивость движения сложных систем / А. А. Мартынюк. – К.: Наукова думка, 1975. – 432 с.

155. Мельников Р. М. «Рюрик» был первым / Р. М. Мельников. – Л.: Судостроение, 1989. – 256 с.

156. Меркин Д. Р. Краткая история классической механики Галилея – Ньютона / Д. Р. Меркин. – М.: Физматлит, 1994. – 160 с.

157. Меркулова Н. М. К истории газовой динамики в XIX в. / Н. М. Меркулова // История и методология естественных наук. – Вып. IX. – Механика, математика, 1970. – М.: Изд-во МГУ. – С. 59–89

158. Механика в СССР за пятьдесят лет. Т. 1. Общая и прикладная механика. – М.: Наука, 1968. – 416 с.

159. Механика в СССР за пятьдесят лет. Т. 3. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1972. – 480 с.

160. Механика в СССР за тридцать лет 1917–1947 / [под ред. В. З. Власова, В. В. Голубева и Н. Д. Моисеева]. – М.–Л. : Гостехиздат, 1950. – 416 с.

161. Митин В. Н. Синтез вибрационных систем при вынужденных колебаниях / В. Н. Митин, А. С. Пономарев, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин, 1973. – Вып. 18. – С. 58–62

162. Митин В. Н. Спектральные свойства и синтез цепных вибрационных систем: автореф. дис. … канд. техн. наук. / Владимир Николаевич Митин. – Харьков, 1975. – 19 с.

163. Митин В. Н. Структурные матрицы цепных вибрационных систем / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. – Вып. 17, 1973. – С. 3–7

164. Митин В. Н. Структуры дискретных механических моделей конструкций / В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин. Вып. 35, 1982. – С. 3–6

165. Митропольский Ю. А. Вынужденные колебания в нелинейных системах при прохождении через резонанс / Ю. А. Митропольский // Инж. сб, 1953. – Т. 15. – С. 89–98

166. Митропольский Ю. А. Исследование резонансных явлений в нелинейных системах с переменными частотами дис. … канд. техн. наук // Юрий Алексеевич Митропольский. – К, 1947. – 107 с.

167. Митропольский Ю. А. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы: дис. … докт. техн. наук // Юрий Алексеевич Митропольский. – К, 1950. – 199 с.

168. Митропольский Ю. А. Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы / Ю. А. Митропольский // Прикл. Математика и механика, 1950. – Т. 14. – № 2. – С. 139–170

169. Митропольский Ю. А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю. А. Митропольский. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 284 с.

170. Митропольский Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний / Ю. А. Митропольский. – М.: Наука, 1964. – 431 с.

171. Митропольский Ю. А. Машинный анализ нелинейных резонансных цепей. / Ю. А. Митропольский, А. А. Молчанов. – К.: Наукова думка, 1981. – 147 с.

172. Митропольський Ю. О. Про коливання в гіроскопічних системах при проходженні через резонанс / Ю. О. Митропольський // УМЖ, 1953. – Т. 5. – № 3. – С. 333–349

173. Михаил Васильевич Остроградский 1 января 1862 – 1 января 1962. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности [под ред. И. Б. Погребысского и А. П. Юшкевича]. – М.: Гос. изд-во физ-мат. литературы, 1961. – 399 с.

174. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. / С. Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1957. – 476 с.

175. Моисеев Н. Д. Очерки развития механики / Н. Д. Моисеев. – М.: Изд-во МГУ, 1961. – 478 с.

176. Моисеев Н. Д. Очерки развития теории устойчивости. / Н. Д. Моисеев. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949. – 663 с.

177. Моисеев Н. Н. Математика ставит эксперимент / Н. Н. Моисеев. – М.: Наука, 1979. – 224 с.

178. Мосєєнков Б. І. Поперечні коливання стержня двоякої жорсткості в перехідному режимі обертання / Б. І. Мосєєнков // Прикладна механіка. - 1957. – Т. III. – вип. 2. - С. 155–167

179. Натанзон В. Я. Крутильные колебания коленчатых валов с муфтами, обладающими нелинейными характеристиками. / В. Я. Натанзон // М.: Оборонгиз (труды ЦИАМ), 1943. – № 40. – 80 с.

180. Нейман И. Ш. Динамика, конструкция и расчет на прочность авиационных двигателей. / И. Ш. Нейман – М.–Л.: Оборонгиз, 1940. – 476 с.

181. Нейман И. Ш. Крутильные колебания многомассовой нелинейной системы. / И. Ш. Нейман – М.–Л.: Оборонгиз, 1947. – 132 с.

182. Неймарк И. Ш. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. / И. Ш. Нейман. – М.: Наука, 1972. – 472 с.

183. Николаи Е. Л. Теория гироскопов. / Е. Л. Николаи. – М.: Гостехиздат, 1948 – 171 с.

184. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / И. Ньютон. – М.: Наука, 1989. – 687 с.

185. Панов Д. Ю. О крутильных колебаниях стержня при наличии упругого гистерезиса / Д. Ю. Панов // ПММ. – Т. IV. – Вып. 1, 1940. – С. 65–78

186. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний / Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 272 с.

187. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории упругих колебаний / Я. Г. Пановко. – М.: Машгиз, 1957. – 336 с.

188. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем / Я. Г. Пановко, И. И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

189. Папкович П. Ф. Об одном методе разыскания корней характеристического определителя. / П. Ф Папкович // Журнал Прикладная математика и механика. Т. I. Вып. 2 – Л. – М.: Гостехтеориздат, 1933. – С. 314–318

190. Папкович П. Ф. Труды по вибрации корабля. / П. Ф. Папкович. – Л.: Судпромгиз, 1960. – 784 с.

191. Писаренко Г. С. Вынужденные колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале: дис. … докт. техн. наук / Георгий Степанович Писаренко. – К, 1948. – 284 с.

192. Писаренко Г. С. Жизнь в науке / Г. С. Писаренко. – К.: Наукова думка, 1989. – 192 с.

193. Писаренко Г. С. Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале / Г. С. Писаренко. – К.: Изд. АН УССР, 1955. – 239 с.

194. Писаренко Г. С. Определение параметров петли гистерезиса по логарифмическому декременту затухания колебаний /

Г. С. Писаренко // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР, 1950. – № 15. – С. 121–127

195. Писаренко Г. С. Рассеяние энергии при механических колебаниях. / Г. С. Писаренко. – К.: Изд. АН УССР, 1962. – 436 с.

196. Писаренко Г. С. Сергей Владимирович Серенсен. / Г. С. Писаренко. – К.: Наукова думка – 1993. – 105 с.

197. Планы научной деятельности предприятий Академии наук Украинской ССР на 1960 год по закрытой тематике (21.07.1960) 153 л. Центральный государственный архив общественных объединений Украины, ф. 1, оп. 24, ед. хр. 5202

198. Постнов В. А. Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. / В. А. Постнов, Н. А. Тарануха. – Л.: Судостроение, 1990. – 320 с.

199. Постнов В. А. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. / В. А. Постнов, И. Я. Хархурим. – Л.: Судостроение, 1974. – 342 с.

200. Прочность материалов и конструкций / [Редкол.: В. Т. Трощенко (отв. ред.) и др.]. – К.: Академпериодика, 2006. – 1076 с.

201. Пуанкаре А. Избранные труды. Новые методы небесной механики. Т 1. – М.: Наука, 1971. – 654 с.

202. Радциг А. А. История теплотехники / А. А. Радциг. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1936. – 430 с.

203. Развитие механики в СССР 1917–1967 / [под ред. А. Ю. Ишлинского]. – М.: Наука, 1967. – 365 с.

204. Развитие общей механики в России и Украине в 20–80-е годы XX века. – М.: Наука. – К.: Феникс, 1998. – 404 с.

205. Рассеяние энергии при вибрации / Отчет по теме за 1940 г. // Архив Института механики НАН Украины, оп. 2. – 35 л.

206. Розвиток науки в Західних областях Української РСР за роки Радянської влади. 1939–1989 / В. Н. Панасюк, Я. С. Подстригач, Ф. І. Стеблій та ін. – К.: Наукова думка, 1990. – 304 с.

207. Розвиток науки в Українській РСР за 40 років. – К.: Вид-во АН УРСР, 1957. – 532 с.

208. Романив О. Н. Поперечные колебания вала двоякой жесткости / О. Н. Романив. – Львов: Изд-во ЛПИ. - 1957. – 83 с.

209. Рубаник В. П. Прохождение через резонанс в нелинейных системах со многими степенями свободы при воздействии многочастотных возмущающих сил / В. П. Рубаник // Сб. «Проблемы

прочности в машиностроении», вып. 7. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 3–18

210. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. – К.: Вища школа – 1987. – 200 с.

211. Самойленко А. М. Численно-аналитические методы исследования периодических решений. / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. – К.: Вища школа, 1976. – 180 с.

212. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. / А. М. Самойленко. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

213. Скрягин Л. Н. Как пароход погубил город: очерки о катастрофах на реках, озерах и в портах / Л. Н. Скрягин. – М.: Транспорт, 1989. – 271 с.

214. Сокол Г. И. О достижениях научной школы профессора И. К. Косько / Г. И. Сокол, Е. В. Горбенко // Вісник Дніпропетровського університету, 2009. – № 1/2. – Серія історія і філософія науки і техніки. – вип. 17. – С. 52–61

215. Стретт Дж. В. Теория звука, т. I. / Дж. В. Стретт (Лорд Рэлей). – М.: Гостехиздат, 1955. – 504 с.

216. Тарсис Ю. Л. Расчетный метод определения усилий в коленчатых валах с учетом упругой податливости и несоосности гидродинамических опор скольжения: дис. … канд. техн. наук / Юрий Львович Тарсис. – Харьков, 1985. – 222 с. – (Машиноведение и детали машин 05.02.02)

217. Терских В. П. К расчету крутильных колебаний / В. П. Терских // Вестник инженеров и техников, 1930. – № 12. – С. 429–433

218. Терских В. П. К расчету крутильных колебаний. / В. П. Терских. // Вестник инженеров и техников, 1931. – № 7. – С. 306–312

219. Терских В. П. Крутильные колебания в дизельных установках: труды Первой Всесоюзной дизельной конференции / В. П. Терских. – Наркомтяжпром, 1935. – С. 13–22

220. Терских В. П. Крутильные колебания валопроводов силовых установок. / В. П. Терских. – Л.: Судостроение, 1970. – Т. 3. – 272 с.

221. Терских В. П. Метод цепных дробей. / В. П. Терских. – Л.: Судпромгиз, 1955. – 420 с.

222. Терских В. П. Уточненный расчет коленчатого вала на кручение / В. П. Терских. // Динамика и прочность коленчатых валов. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 5–48

223. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование как метод исследования динамических крутильных нагрузок валов поршневых двигателей / И. М. Тетельбаум. // Динамика и прочность коленчатых валов. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 140–169

224. Тибилов Т. А. Асимптотический метод исследования переходных процессов в нелинейных колебательных системах / Т. А. Тибилов // Докл. АН СССР, 1963. - Т. 153. – № 1. – С. 64–66

225. Тимошенко С. П. Воспоминания. / С. П. Тимошенко – К.: Наукова думка, 1993. – 424 с.

226. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов с краткими сведениями из истории теории упругости и теории сооружений / С. П. Тимошенко. – М.: Гостехтеориздат, 1957. – 536 с.

227. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. / С. П. Тимошенко. – М.: Гос. изд-во физ-мат. литературы, 1959. – 439 с.

228. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

229. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле / С. П. Тимошенко. – М.: ОНТИ, 1934. – 344 с.

230. Труды Первой Всесоюзной дизельной конференции. – М.–Л.: Наркомтяжпром, 1935. – 320 с.

231. Тюлина И. А. История и методология механики / И. А. Тюлина. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 282 с.

232. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

233. Уилкинсон Дж. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. / Дж. Уилкинсон, К. Райнш. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.

234. Урванцев Н. М. Критические числа оборотов в дизельных установках / Н. М. Урванцев. – М.–Л.: Гос. науч-техн изд-во, 1931. – 56 с.

235. Фаддеева В. Н. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. / В. Н. Фаддеева, Н. М. Терентьев. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 268 с.

236. Фердинанд Миндинг 1806–1885. – Л.: Наука, 1970. – 224 с.

237. Фещенко С. Ф. Про асимптотичне представлення інтегралів спеціальної системи лінійних диференціальних рівнянь, що мають малий параметр / С. Ф. Фещенко. – Доп. АН УРСР. – № 2, 1947. – С. 9–17

238. Филиппов А. П. Вынужденные колебания линейной системы при прохождении через резонанс с нелинейно изменяющейся частотой / А. П. Филиппов // Изв АН СССР, ОТН, 1958. – 12. – С. 47–53

239. Филиппов А. П. Вынужденные поперечные колебания стержней при учете затухания / А. П. Филиппов. // Изв. АН СССР, ОТН, 1935. – № 7: 4. – С. 637–649

240. Филиппов А. П. К вопросу о переходе через резонанс с нелинейной скоростью системы с одной степенью свободы / А. П. Филиппов // Труды Лаборатории гидравлических машин АН УССР, 9. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – С. 37–48

241. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. / А. П. Филиппов. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.

242. Филиппов А. П. Колебания механических систем / А. П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1965. – 716 с.

243. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. / А. П. Филиппов. – К.: Изд-во АН УССР, 1956. – 340 с.

244. Филиппов А. П. Развитие исследований в области динамики машин на Украине за годы советской власти / А. П. Филиппов // Динамика и прочность машин, 1968. – Вып. 8. - С. 3–7

245. Филиппов А. П. Расчеты на колебания с использованием электронно-вычислительной техники. / А. П. Филиппов, Ю. С. Воробьев. – М.: Машиностроение, 1971. – 68 с.

246. Филиппов А. П. О некоторых методах решения задач механики в связи с автоматизацией машиностроительных расчетов / А. П. Филиппов, Б. Я. Кантор // Автоматизация умственного труда в машиностроении. – М.: Наука, 1969. – С. 111–135

247. Численные методы в прикладной теории упругости / [А. П. Филиппов, В. Н. Булгаков, Ю. С. Воробьев и др.]. – К.: Наукова думка, 1968. – 252 с.

248. Чекмарев А. И. К вопросу о расчете крутильных колебаний систем с маятниковыми антивибраторами / А. И. Чекмарев // Динамика и прочность коленчатых валов. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 110–139

249. Храмов Ю. О. Ю. О. Митропольський та його наукова школа (до 90 річчя від дня народження вченого) / Ю. О. Храмов, Т. В. Кілочицька // «Наука і наукознавство», 2007. - № 2. - С. 101–115

250. Черевков А. П. О вычислении колебаний кручения на валах. / А. П. Черевков // Вестник инженеров и техников, 1933. – № 7. – С. 299–304

251. Черевков А. П. Упрощенный способ расчета колебаний кручения на валах. / А. П. Черевков // Вестник инженеров и техников, 1933. – № 9. – С. 384–386

252. Шапиро Л. С. Самые быстрые корабли. / Л. С. Шапиро. – Л.: Судостроение, 1989. – 128 с.

253. Шаталов К. Т. Экспериментальные исследования крутильных колебаний валов / К. Т. Шаталов // Динамика и прочность коленчатых валов. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – С. 170–247

254. Шатохин В. М. Исследование нелинейных колебаний в силовых цепях машин с использованием итерационного метода: дис. … канд. техн. наук. / Владимир Михайлович Шатохин. – Харьков, 1979. – 195 с. – Динамика и прочность машин, приборов и аппаратуры (01.02.06)

255. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин / В. М. Шатохин. – Х.: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.

256. Штейнвольф Л. И. Динамика механических передач силовых установок тепловозов : дис. … докт. техн. наук. / Лев Израилевич Штейнвольф. – Харьков, 1966. – 655 с.

257. Штейнвольф Л. И. Исследование маятникового демпфера крутильных колебаний коленчатых валов двигателей. : дис. … канд. техн. наук. / Лев Израилевич Штейнвольф. – Харьков, 1947. – 213 с.

258. Штейнвольф Л. И. Об алгоритмах расчета свободных крутильных колебаний на ЭЦВМ. / Л. И. Штейнвольф // Динамика и прочность машин, 1967. – Вып. 6. – С. 106 – 109

259. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. / Л. Эйлер. // Приложение I. – Об упругих кривых. – Сер. «Классики естествознания». – М.–Л.: Гостехиздат, 1934. – С. 447–572

260. Энциклопедический словарь. Т. XXVI[A] – СПб.: Акц. общ. «Издат. дело, бывшее Брокгауз – Ефрон». – 1899. – С. 481–960

261. Biot M. Coupled Oscillations of Aircraft Engine – propeller Systems, Journal of the aeronautical sciences. / M. Biot. – Vol. 7. – № 9. – P. 376 – 382. – July 1940. (Journ. of Aeron. Sciences)

262. Francis J. G. F. The QR-transformation – a Unitary Analoque to the LR-transformation. / J. G. F. Francis. Parts I, II. – Comput. J. 4, 1961 – P. 265 – 271 – 1962. – P. 332–345

263. Gregory R. T. Computing Eigenvalues and Eigenvectors of a Symmetric matrixon the ILLIAC. / R. T. Gregory. Math. Tab. And other Aids to Comp., 7, 1953 – P. 215–220

264. Larsen, Allan (2000): Aerodynamics of the Tacoma Narrows Bridge – 60 Years Later. In: Structural Engineering International, v. 10, n. 4 (November 2000), pp. 243–248.

265. Lewis F. M. Vibration During Acceleration Through a Critical Speed / F. M. Lewis // Transaction of the ASME, 1932, 54, 23. – P. 253–263

266. Mikhlin Yu. V. International Conference "Nonlinear Phenomena in Polymer Solids and Low-Dimentional Systems". – Moscow. – Russia. – 7–10 July, 2008. – P. 102–107

267. Normal modes and localization in nonlinear systems. /– [Vakakis A., Manevich L. I., Mikhlin Yu. V., Pilipchuk V. N., Zevin A. A.] – New York: Willey Interscience, 1996. – 579 c.

268. Pope D. A., Thompkins C. Maximizing Functions of Rotations-Experiments Concerning Speed of Diagonalisation of Symmetric Matrices Using Jacobi’s Method. / D. A. Pope, C. J. Thompkins. – Assoc. Comput. Machinary, 4. –1957. – P. 459–466

269. Pöschl T. Das Anlaufen eines einfachen Schwinger. / T. Pöschl // Ing. Arch, 1933. – 4. – P. 98–102

270. Rosenberg R. M. On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degree of freedom. / R. M. Rosenberg, C. S. Hsu // Тр. междун. симпозиума по нелинейным колебаниям. – К.: Наукова думка, 1961. − С. 380–416

271. Turner M. J., Clough R.V., Martin H. C., Topp L. J. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aero. Sci, 23, 805–823 (1956)

272. Wilkinson J. H. 1960 Houscholder’s Method for the Solution of the Algebraic Eigenproblem Comp. Jour. 3: 23–27

Наукове видання

Ларін Андрій Олексійович

ІСТОРІЯ ТЕОРІЇ МЕХАНИЧНИХ КОЛИВАНЬ

Монографія

За авторською редакцією

Видання російською мовою