Г. Е. Горелик

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА

Историко-методологический анализ

МГУ

Издательство
Московского
университета
1983

УДК 530.12:531.18

Горелик Г. Е. Размерность пространства: историко-методологический анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1983. — 216 с.

Рассказывается о формировании современных представлений о размерности пространства. Особое внимание уделяется взаимодействию физики и математики. В связи с проблемой размерности анализируется творчество Пуанкаре, Эйнштейна, Эренфеста. Рассматривается эволюция взаимоотношений физики с геометрией и квантовые пределы применимости обычного геометрического описания пространства-времени. Развивается подход к понятию размерности, основанный на идее метрической зависимости и связывающий понятие размерности с законами сохранения.

В приложении впервые на русском языке публикуется статья Эренфеста 1917 г. о трехмерности пространства.

Для специалистов, интересующихся историей становления и современным состоянием пространственно-временного описания в физике.

Библиогр. 214 назв. Ил. 12.

Рецензенты:
проф. А. Т. Григорьян,
проф. Г. М. Идлис

Печатается по постановлению Редакционно-издательского совета Московского университета

Геннадий Ефимович Горелик

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА
(историко-методологический анализ)

Редактор *С. И. Зеленский*. Мл. редактор *О. Е. Силантьева*. Художественный редактор *Л. В. Мухина*. Переплет художника *Б. С. Казакова*. Технический редактор *К. С. Чистякова*. Корректоры *М. И. Эльмус, Л. А. Кузнецова*.

Тематический план 1983 г. № 82
ИБ № 1472.

Сдано в набор 17.06.83. Подписано к печати 14.11.83. Л-96322. Формат $60\times90^{1}/_{16}$ Бумага для глуб. печ. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 13,5. Уч.-изд. л. 15,45. Зак. 139. Тираж 2760 экз. Цена 2 р. 80 к. Изд. № 2335.

Ордена «Знак Почета» издательство Московского университета. 103009, Москва, ул. Герцена, 5/7. Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ. Москва, Ленинские горы.

$Г\frac{1704010000-171}{077(02)-83}82-83$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. ПРЕДЫСТОРИЯ: ПОНЯТИЕ ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ НА ПРОТЯЖЕНИИ ДВУХ С ПОЛОВИНОЙ ТЫСЯЧЕЛЕТИЙ . 9

Глава 2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ И ФИЗИКА 17

2.1. Творчество Пуанкаре и история понятия размерности . . 17
2.2. Определение понятия размерности 19
2.3. Размерность физического пространства и Пуанкаре . . . 23
2.4. Гипотеза квантов и понятие размерности пространства-времени в 1912 г. 26
2.5. Топологическая теория размерности 27
Краткие итоги главы 2 29

Глава 3. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА И РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ 31

3.1. Топология и метрика пространства-времени в теории относительности 31
3.2. Координаты и теория относительности 37
3.3. Сингулярности пространства-времени и координаты . . . 40
3.4. Эйнштейн и четырехмерность пространства-времени . . . 46
3.5. Дискретность в квантовой физике и непрерывность четырехмерного пространства-времени в ОТО 50
Краткие итоги главы 3 55

Глава 4. ФИЗИЧЕСКИЙ СТАТУС ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА, ВЫЯВЛЕННЫЙ ЭРЕНФЕСТОМ 57

4.1. Трехмерность пространства и фундаментальные законы физики 57
4.2. Какой должна быть n-мерная физика? 59
4.3. Предпосылки работы Эренфеста 62
4.4. Работа Эренфеста о трехмерности пространства и Эйнштейн . 67
4.5. Значение работы Эренфеста 69
Краткие итоги главы 4 71

Глава 5. КВАНТОВЫЕ ГРАНИЦЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ОТО 73

5.1. Рождение планковских величин 75
5.2. Гравитация и кванты 79
5.3. Рождение квантовой гравитации и М. П. Бронштейн . . . 82
1. Краткая биография 83
2. Теория гравитации в работах Бронштейна 87
5.4. «...принципиальное различие между квантовой электродинамикой и квантовой теорией гравитационного поля» 93
5.5. Планковские величины и квантовая гравитация 102
5.6. История теоретической физики и константы $c, G, \hbar$ 107
Краткие итоги главы 5 112

Глава 6. ПРОБЛЕМА РАЗМЕРНОСТИ И МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ 115
6.1. Локальная структура пространства-времени и идея фундаментальной длины 115
6.2. Физическое пространство-время и топология. Соотношение метрических и топологических структур 118
6.3. Метрика, мера, размерность и проблема расходимостей . . 122
6.4. Определение размерности, основанное на метрике 128
Краткие итоги главы 6 133

Глава 7. РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ОПИСАНИЯ 135
7.1. Десять симметрий пространства-времени в СТО и четырехмерность 136
7.2. Принцип соответствия и пространственно-временные симметрии 142
7.3. Подход к симметриям в римановой геометрии, основанный на метрическом понятии размерности (неформальное описание) . 147
7.4. Размерность риманова пространства R^n и квазигруппа Пуанкаре $q\mathcal{P}R^n$ 155
1. Понятие размерности, выраженное на метрическом языке, и метрические координаты 155
2. Квазигруппа Пуанкаре 157
3. Случай геометрии Минковского 158
4. О пространственно-временных законах сохранения в ОТО . 160
Краткие итоги главы 7 161

Глава 8. ПОНЯТИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА 163
8.1. Об эволюции взаимоотношений геометрии и физики . . . 163
8.2. О выделенности значения размерности, равного 3+1 . . . 171
8.3. Экстремальные состояния вещества и космология ранней Вселенной 179
1. Происхождение реликтового излучения и квантово-гравитационная космология 181
2. Единицы для квантово-гравитационной космологии . . . 183
8.4. Космология ранней Вселенной и размерность пространства . 185
1. Проблема горизонта и размерность пространства в ранней Вселенной 185
2. Возмущения плотности в n-мерной Вселенной 188
3. Меняющаяся размерность пространства в космологии ранней Вселенной 190

Заключение 194

Приложение

П. Эренфест. «Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?» 197

Литература 206

Указатель 215

ПРЕДИСЛОВИЕ

Понятие размерности, или числа измерений, имеет важное значение в двух существенно различных смыслах.

В математике широко используются весьма различающиеся формализации понятия размерности. Все они происходят от простых геометрических образов одномерности, двумерности и трехмерности, но в 20 в. различные «жизненные» пути очень сильно отдалили их друг от друга. Имеется несколько неэквивалентных топологических понятий размерности, понятие размерности линейного пространства, хаусдорфова метрическая размерность (которая может принимать и нецелые значения) и т. д. Между этими понятиями существуют разнообразные и вовсе не жесткие связи. Даже если к какому-то математическому объекту приложимы несколько понятий размерности, они могут не совпадать по значению. Внутри самой математики невозможно указать основания, выделяющие какое-то одно значение размерности (каким бы понятием размерности не пользоваться); точнее говоря, для каждого значения размерности можно подобрать математическое свойство, выделяющее именно это значение. Можно сказать, что в математике различные значения размерности равноправны.

В физике ситуация совсем иная. Трехмерность реального пространства является фундаментальным физическим фактом, определяющим, как показал впервые Эренфест, качественные особенности физических явлений. Трехмерность, пожалуй, можно назвать наиболее фундаментальным физическим законом, имеющим количественное выражение. Возникает естественный вопрос: абсолютен ли закон трехмерности? Ведь этот закон, осознанный наукой на первых же ее шагах, сохранял свою силу на протяжении двух с половиной тысячелетий; за то же время в механике, например, сменилось (обнаружив ограниченную применимость) три поколения законов движения.

Но прежде чем рассматривать размерность реального пространства, физика должна указать математический язык, на котором следует выражать свойство размерности, и способы эмпирического установления, «измерения» значения размерности при расширении области явлений, изучаемых физикой. А поскольку размерность — свойство геометрического, пространственно-временного описания, физический анализ понятия размерности должен быть сопряжен с анализом эволюции и пределов применимости геометрического описания в физике вообще.

Нужды современных физических теорий в описании размерностной структуры пространства-времени вполне удовлетворяются математическим понятием многообразия. Обычно считается, что если физике и понадобится какое-то обобщение геометрического языка, то это обобщение будет находиться в пределах применимости топологических представлений о размерности. Топология, как известно, занимается структурами, связанными с понятием непрерывности. Сама же физика — квантово-релятивистская физика — привела к гипотезам фундаментальной длины, квантованного (дискретного) пространства-времени; и хотя обсуждаемая величина фундаментальной длины за несколько десятилетий уменьшилась с 10^{-13} см до квантово-гравитационной длины $l=(\hbar G/c^3)^{1/2}=10^{-33}$ см, для дальнейшего ее уменьшения или обращения в ноль оснований не видно. В то же время идея фундаментальной длины, как мы увидим, не укладывается в рамки топологического подхода.

Проблема размерности пространства, которой посвящена эта книга, имеет два основных аспекта:

1) математическое описание размерностной структуры и физическая адекватность языка такого описания,

2) физический статус факта 3-мерности пространства, или, с учетом теории относительности, $3+1$-мерности пространства-времени.

Оба эти вопроса имеют продолжительные истории, и оба заслуживают специального анализа в связи с тем положением, которое занимает понятие размерности пространства-времени в физической картине мира.

Дополнительные основания для внимательного отношения к понятию размерности и к факту $3+1$-мерности пространства-времени дает современная ситуация в теоретической физике. Здесь рассматриваются и явно модельные 1-, 2-, $2+\varepsilon$-мерные варианты теории поля (модели искомой теории), и претендующие на описание реальности многомерные (11-мерные, например) теории поля с компактификацией «лишних» измерений; в супергеометрии радикально меняется и смысл «отдельного измерения», которое уже соответствует не числовой действительной оси, а грассмановой алгебре с одной образующей; важную роль играет метод размерной регуляризации в неабелевых калибровочных теориях; и т. д. И в целом роль понятия размерности в физике ощущается все более явно.

Вкратце о содержании книги.

Историко-научный анализ в этой книге тесно увязан с методологическим. Автор исходит из того, что глубокое понимание научной проблемы в данный момент и перспектив ее развития возможно только в историко-научном контексте. В особенности это относится к фундаментальным проблемам, к числу которых принадлежит и проблема размерности пространства.

Историко-научный материал дает возможность естественным путем подойти к современному состоянию проблемы размерности (в онтогенезе повторить филогенез). Рассмотрение творчества Пуанкаре, Эйнштейна, Эренфеста в связи с вопросом размерности (гл. 2—4) прежде всего должно убедить в существовании самой проблемы. Убедить в том, что вопрос о размерности пространства-времени только на первый взгляд может показаться тривиальным, бесструктурным.

Кроме того, анализ конкретных фактов истории науки позволит нам подготовить и наметить направления, в которых будет развит (в гл. 6—8) подход к размерности как к физической величине, обладающей определенным эмпирическим статусом и связанной с фундаментальными физическими структурами: с метрической структурой пространства-времени, с законами сохранения, с проблемой расходимостей и др.

Особое значение для книги имеет пятая глава, посвященная конфликту между квантовыми представлениями и геометрией ОТО. Квантово-гравитационные ограничения на геометрическое описание, теоретически выявленные впервые М. П. Бронштейном еще в 1935 г., наиболее убедительно в настоящее время свидетельствуют о неизбежности обобщения используемой модели пространства-времени. Это обстоятельство оправдывает и внимание к размерности — наиболее общему количественному свойству пространственно-временного описания.

Анализ соотношения метрических и топологических структур с учетом характера квантово-релятивистских ограничений приводит к новому, метрическому, подходу к понятию размерности (гл. 6). С помощью такого понятия, как оказывается, можно придать вполне определенный смысл утверждению о зависимости числа измерений от масштабов явления (топологические понятия размерности для этого принципиально непригодны).

Метрический подход к размерности оказывается плодотворным и в применении к риманову пространству-времени ОТО (гл. 7). Для геометрии Минковского 4-мерность пространства-времени прямо связана с 10-параметричностью группы Пуанкаре, описывающей 10 независимых симметрий пространства-времени и порождающей в силу теоремы Нетер 10 пространственно-временных законов сохранения энергии-импульса-момента. Связь размерности и симметрий пространственно-временного описания удается обобщить и на случай общей римановой геометрии, если исходить из метрического понятия размерности. Размерностную однородность 3+1-мерного пространства-времени ОТО можно описать, как оказывается, 10-параметрической квазигрупповой симметрией, которая переходит в группу Пуанкаре в случае плоской геометрии. Тем самым осуществляется связь в духе принципа соответствия между псевдоримановой геометрией и геометрией Минковского.

Последняя глава книги посвящена тому положению, которое занимает понятие размерности пространства-времени в современной физике и космологии, и возможной роли этого понятия в будущем.

Для удобства читателей в конце глав (кроме первой и последней) приводятся краткие резюме. Библиографические ссылки даются в квадратных скобках, в которых указывается порядковый номер по списку литературы, приведенному в конце книги, или фамилия автора и год публикации.

Проблемы, затронутые в этой книге, прояснялись для автора в результате многочисленных обсуждений с коллегами. Их доброжелательное внимание, трудные вопросы и стимулирующие замечания оказали неоценимую помощь. Особенно автор благодарен В. П. Визгину и Д. А. Киржницу. Автор благодарен участникам семинаров под руководством В. Л. Гинзбурга, А. Т. Григорьяна, А. Л. Зельманова, Г. М. Идлиса и Б. И. Спасского, а также С. И. Зеленскому, А. А. Локшину, В. Я. Френкелю, Б. Е. Явелову.

При работе над книгой и особенно ее седьмой главой очень существенное значение для автора имели советы и замечания А. А. Логунова и В. И. Денисова.

Глава 1

ПРЕДЫСТОРИЯ: ПОНЯТИЕ ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ НА ПРОТЯЖЕНИИ ДВУХ С ПОЛОВИНОЙ ТЫСЯЧЕЛЕТИЙ

Идеи и образы, связанные с понятием размерности, появились, когда наука делала свои первые шаги. Тогда же было обнаружено фундаментальное свойство мироздания — свойство, которое сейчас называется трехмерностью. За два с половиной тысячелетия наука прошла по пути от теоремы Пифагора к теоремам о неполноте математики и от закона рычага к законам квантово-релятивистской физики. Изменились за это время и понятие размерности и отношение к факту трехмерности физического пространства.

В этой главе мы проследим эволюцию проблемы размерности, извлекая из реального исторического процесса и очень кратко описывая лишь некоторые, правда, наиболее существенные, эпизоды. При этом, конечно, нужно отдавать себе отчет, что подлинное понимание слов, сказанных столетия и тысячелетия назад, может быть достигнуто только при учете реального историко-научного, историко-культурного контекста.

Образы, связанные со свойствами размерности, были важным компонентом картины мира, которую создавали **пифагорейцы** (VI—IV вв. до н. э.)*. Этой картине присущи были космогоническое видение мира и переплетение числовых, геометрических и материальных объектов, доходящее до их отождествления. Приписываемая самому Пифагору формулировка исследовательской программы «Все есть число» делала вполне естественным такое отождествление. В пифагорейской картине мира единица отождествлялась с точкой, двойка — с линией, тройка — с плоскостью и четверка — с телом. В те времена казалось совершенно естественным отождествлять двойку с фигурой, определяемой двумя точками, — отрезком прямой; тройку — с фигурой, определяемой тремя точками, — треугольником; и, аналогично, четверку — с тетраэдром. На языке топологии 20 в. можно сказать, что пифагорейцы занумеровали «в естественном порядке» четыре первых симплекса: нульмерный — 1, ..., трехмерный — 4. Отсюда становится вполне понятным, что факт трехмерности материального мира проявлялся в пифагорейской науке как утверждение о том, что 4 — «последнее» число.

* Глубокий анализ античной науки см. в кн. [Рожанский, 1979; Гайденко, 1980]. Автор благодарен И. Д. Рожанскому за обсуждение вопросов, затронутых в этой главе.

Платон (428—347), впервые осмысливший понятийный характер теоретического мышления, отчетливо разделил три вида научной реальности — числовые, геометрические и материальные объекты. В результате появилось и понятие пространства. Стало возможным говорить не только о свойствах отдельных объектов, но и о свойствах самого пространства.

В платоновско-пифагорейской математике существенное место занимало взаимоотношение объектов разного числа измерений: «Из движения точки возникает линия, из движения линии — поверхность, а из движения поверхности — тело» [Секст Эмпирик, т. 2, с. 148].

Существенное развитие проблемы размерности обнаруживается в трудах **Аристотеля** (384—322). Неудачность выражения «поступательный ход истории» хорошо видна на примере взаимоотношения учений Платона и его выдающегося ученика. Аристотель материалистически интерпретировал платоновскую конструкцию, поставив ее «с головы на ноги», но одним из результатов этого преобразования стал отказ от платоновской идеи пространства и замена ее на понятие «место». Поэтому Аристотель мог говорить только о свойствах тел и величин, но не о свойствах пространства. Вместе с тем Аристотелю удалось увидеть существенно новые стороны понятия размерности. С рассмотрения этого понятия начинается его книга «О небе»:

«Наука о природе изучает преимущественно тела и величины, их свойства и виды движения, а кроме того начала такого рода бытия. <...>

Непрерывное есть то, что делимо на части, всякий раз делимые снова. Тело—то, что делимо во всех направлениях. Величина, делимая одним способом — это линия, делимая двояко — поверхность, трояко — тело. Никаких других величин нет, потому что три — это все, и «тремя способами» — то же самое, что «всеми способами». Ибо, как говорят пифагорейцы, «целое» и все определяются через число три: начало, середина и конец составляют число целого, и при этом троицу. Вот почему, переняв у природы, так сказать, ее законы, мы пользуемся этим числом при богослужениях. Сообразно с этим о двух вещах или людях мы говорим «оба» а не «все». Последний термин мы впервые используем, когда речь идет о трех. В этом, как уже сказано, мы принимаем саму природу в качестве нашего руководителя и следуем за ней.

Поскольку слова «все», «целое» и «совершенное» не различаются между собой по значению..., то тело — единственная совершенная величина, ибо одно только оно определяется через число три, а «три» равнозначно «целому». Будучи делимо в трех направлениях, оно тем самым делимо во всех. Другие величины делимы в одном или двух направлениях в соответствии с числами, которые сопоставляются различным величинам по количеству направлений, которым характеризуется их делимость и непрерывность;

одна непрерывна в одном направлении, другая — в двух, третья — во всех. <...>

Ясно, однако же, что переход от тела к другой величине, подобный переходу от длины к поверхности или от поверхности к телу, невозможен. В противном случае тело уже не было бы совершенной величиной, ибо восполнение может происходить только в силу недостатка, но совершенная величина не может иметь недостатка, поскольку она протяжена во всех направлениях» (см. [6]).

В этом тексте Аристотеля можно обнаружить богатое содержание. Связывая размерность с непрерывностью, он пытается определить понятие размерности по существу на топологическом языке. При этом линии, поверхности и телу сопоставляются числа 1, 2 и 3, в отличие от пифагорейской традиции и в полном соответствии с современным пониманием слова «n-мерность». Что касается факта трехмерности, то здесь имеются две противоположные тенденции. С одной стороны, Аристотель вроде бы склонен считать трехмерность фактом, которому «научает» природа и которому можно только следовать. С другой стороны, в этом тексте можно найти целых три обоснования трехмерности: архаичное пифагорейское, лингвистическое (2 — «оба», 3 — «все»)* и логическое (совершенство трехмерности).

Античные представления о размерности зафиксировал **Евклид** (III в. до н. э.) в «Началах»:

Книга I

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия — длина без ширины.
3. Концы линии — точки.
5. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
6. Границы поверхности — линии.

Книга XI

1. Тело есть то, что имеет длину, ширину и глубину.
2. Граница тела — поверхность.

В определениях I:3, 6 и XI:2, рекуррентно связывающих различные значения размерности, можно увидеть прототип топологического индуктивного определения размерности (см. гл. 2). А определения I:1, 2, 5 и XI:1 математике по существу не были нужны (в этих определениях проявилось лишь «физическое» происхождение геометрических понятий).

Стоит подчеркнуть, что самого понятия «число измерений» все еще не было. В этом понятии не было и особой необходимости, поскольку разнообразие рассматривавшихся геометрических фигур было невелико.

---

* Это лингвистическое доказательство выглядит «убедительно» только на тех языках, в которых есть такое же различие между числами 2 и 3, имеющее, по-видимому, глубокие корни в истории цивилизации. Кроме древнегреческого и русского к ним относятся и многие другие, но есть и исключения, например современный французский язык.

Слово διαστασις, употреблявшееся в греческих текстах и переводимое обычно на английский язык как «dimension», а на русский — «измерение», еще не стало термином и имело смысл, который скорее можно передать словами «протяженность», «протяжение». Слово «измерение» чуждо той эпохе. Метрический взгляд на геометрию, основывающийся на понятии «измеренного» расстояния между точками, возник гораздо позже «Начал» Евклида, подытоживших развитие античной геометрии. Поэтому и слова «измерение», «одномерная», «трехмерная» и т. п. в переводах античных текстов следует считать модернизацией.

Проблема размерности находилась не на самых дальних окраинах греческой науки. Об этом свидетельствует тот факт, что **Птолемей** (90—160), известный более всего астрономическими работами, написал целую книгу «Περι διαστασεως», т. е. «О протяжении», или «О размерности». Эта книга не сохранилась, и о ней известно только из комментария Симпликия (VI в.) к трактату Аристотеля «О небе» [116, с. 411]:

«Одаренный талантами Птолемей показал, что имеется не более трех измерений; потому что направления протяженности должны быть определенными, и определенные измерения протяженны вдоль перпендикулярных прямых линий, и невозможно найти более трех прямых линий под прямыми углами друг к другу; при этом две из них определяют плоскость, а третья измеряет глубину. Таким образом, если бы какое-нибудь измерение было бы добавлено вслед за третьим, оно было бы совершенно неизмеримым и неопределенным».

О самом факте трехмерности здесь не сказано ничего существенно нового по сравнению с Аристотелем, но зато найдена новая и гораздо более конструктивная форма выражения факта трехмерности. Эта форма, казалось бы, близка к современной — не введены ли здесь три «оси координат»? — но до координатного описания, до аналитической геометрии (Декарт, 1596—1650) в действительности было еще очень далеко.

Эта — птолемеевская — форма выражения факта трехмерности дает возможность перешагнуть через много веков — к началу науки нового времени. Один из основателей новой, базирующейся на эксперименте, физики — **Галилей** (1564—1642) не только находился в конфликте с аристотелевской физикой, но и «участвовал» в диалоге с Аристотелем. Одно из основных сочинений Галилея так и называется «Диалог о двух главнейших системах мира». Этот «Диалог» начинается как раз с обсуждения свойства трехмерности, с чего начинается и книга Аристотеля «О небе». Сальвиати, говоряший «от имени» Галилея, предлагает, в отличие от логических (по крайней мере с виду) рассуждений Аристотеля, способ физически, экспериментально выяснить, чему равна размерность пространства. Для этого надо определить максимальное число взаимно-перпендикулярных линий, проходящих через одну точку, но линий уже физических, «сделанных», например, из натянутых нитей. Галилей говорит о линиях, проведенных на полу, о высоте потолка, измеряемой нитью с грузом. Это дает основание считать, что для Галилея трехмерность — уже факт физической геометрии *.

Иначе к тому же свойству отнесся **Лейбниц** (1646—1716) — другой основоположник современного естествознания. Размерности он коснулся к работе, посвященной совсем другому предмету. Обширные интересы Лейбница включали в себя не только физико-математические вопросы, но и вечные вопросы добра и зла. Его книга «Теодиция» была посвящена оправданию бога (благость Всевышнего казалась несовместимой с его всемогуществом и с наличием зла в мире). В этой книге активную роль играет идея бесконечного множества возможных миров (вселенных) и единственного действительно существующего мира, наилучшего из возможных. Лейбниц обсуждает, какие свойства мира бог мог выбирать, а какие — нет (даже всемогущий бог не может создать двуногое существо, имеющее три ноги). И следующим образом он подходит к трехмерности:

«Бейль ** несколько более надлежащего расширяет свободное избрание Божие. Говоря о перипатетике Стратоне..., утверждавшем, что все происходит по необходимости лишенной разума природы, Бейль думает, что этот философ на вопрос: почему дерево не обладает силою образовывать кости и жилы, в свою очередь мог бы спросить: «почему материя имеет именно три измерения, почему недостаточно ей двух, почему она не имеет четырех? И если ему ответили бы, что она должна иметь ни более, ни менее, как только три измерения, то он мог бы спросить о причине этой необходимости». Эти слова дают понять, что Бейль предполагал, что число измерений материи зависит от избрания Божия, как от Него же зависело сделать или не сделать, чтобы деревья производили животных. В самом деле, мы не знаем, нет ли планет или земель, помещенных в некоторых более отдаленных местах Вселенной, где сказка Бернакля Шотландского (о птице, рождающейся из дерева) не оказалась бы истинною...

Но не это надобно думать об измерениях материи. Тройное измерение определено не по причине наилучшего, а вследствие геометрической необходимости; поэтому-то геометры могли доказать, что возможны только три линии, перпендикулярные одна к другой и пересекающиеся в одной точке. Нельзя найти лучшего примера, указывающего на различие между нравственной необ-

* Конечно, в полном смысле представление о физической геометрии, отделение евклидовой геометрии (как математической системы) от свойств реального физического пространства стало возможным только после обнаружения других, неевклидовых, геометрических систем в 19 в.

** П. Бейль (1647—1706) — публицист и философ, один из ранних представителей французского Просвещения.

ходимостью, зависящей от мудрого избрания, и грубою необходимостью Стратона и спинозистов, отвергающих в Боге разум и свободу, — как в этом указании на различие между основаниями для законов движения и для тройного числа измерений; первое зависит от избрания наилучшего, а второе — от слепой геометрической необходимости» [74].

Можно было бы и не упоминать эти рассуждения (несравнимые по глубине с выдающимся достижением Лейбница), если бы они не послужили поводом для размышлений **Канта** (1724—1804) о факте трехмерности [58, т. 1, с. 69—72]. Указав на порочный круг в рассуждениях Лейбница и чистосердечно рассказав о своей неудачной попытке «вывести трехмерность протяжения», 23-летний Кант выдвигает совершенно новую идею:

«Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния».

И поясняет свою мысль:

«Я полагаю: во-первых, что субстанциям в существующем мире, частью которого мы являемся, присущи силы такого рода, что, соединяясь друг с другом, они распространяют свои действия обратно пропорционально квадрату их расстояний; во-вторых, что возникающее отсюда целое имеет в соответствии с этим законом свойство трехмерности; в-третьих, что этот закон произволен и что бог вместо него мог бы избрать какой-нибудь другой, например, закон обратной пропорциональности кубу расстояний; наконец; в-четвертых, что из другого закона проистекало бы и протяжение с другими свойствами и измерениями. Наука обо всех этих возможных видах пространства, несомненно, представляла бы собой высшую геометрию, какую способен построить конечный ум».

К такой связи числа измерений и закона силы Кант пришел, сочетая (лейбницевскую и антиньютоновскую) идею относительного пространства с (ньютоновской и антилейбницевской) идеей силы, действующей на расстоянии *.

И наконец, последний участник предыстории проблемы размерности, о котором нельзя не упомянуть, — **Б. Больцано** ** (1781—1848). В связи с проблемой размерности его наибольшие достижения состоят в развитии самого математического понятия раз-

* Замечание Канта, впрочем, окутано довольно густым метафизическим туманом. Например, он утверждает: «...вполне возможно, чтобы некоторая вещь действительно существовала, но тем не менее нигде во всем мире не находилась»; и поэтому можно говорить о существовании «созданных богом» пространств другой размерности и с другими законами для силы. Представление же об этих пространствах недоступно человеку иначе, чем в метафизическом смысле, поскольку «наша душа получает впечатление извне тоже по закону обратной пропорциональности квадрату расстояний».

** Автор благодарен Ф. А. Медведеву, обратившему его внимание на работы Больцано и на статьи [50].

мерности. Мы здесь не рассматриваем ту историческую линию, которая привела к понятию n-мерного линейного пространства [103]; наличие линейной структуры в координатном описании позволяет легко построить точное понятие линейной n-мерности. Однако слова «одномерность, двумерность и трехмерность» могут применяться не только к прямой, плоскости и (евклидову) пространству, но и к произвольной кривой линии, поверхности и телу. Построить достаточно общее понятие размерности нелегко, но Больцано добился существенного успеха, дав такое определение:

«Нечто пространственно протяженное будет просто протяженным, или линией, если каждая его точка на каждом достаточно малом расстоянии имеет одну или больше соседних точек, но никоим образом не так много, чтобы совокупность их сама по себе составляла уже протяжение; ... пространственное протяжение будет протяжением двух измерений, или поверхностью, если каждая точка на каждом достаточно малом расстоянии имеет целую линию соседних точек; ... пространственное протяжение будет протяжением трех измерений, или телом, если каждая точка на каждом достаточно малом расстоянии имеет целую поверхность соседних точек» [16б, с. 74; 50а].

В основе этого определения лежит метрическая идея — рассмотреть совокупность всех точек фигуры, находящихся от некоторой точки на заданном расстоянии. Но имеющееся здесь выражение «на каждом достаточно малом расстоянии» позволяет перевести это определение с метрического на топологический язык, получив при этом определение так называемой *малой индуктивной размерности* ind (см. гл. 2).

Происхождение же самой метрической идеи у Больцано было связано, по-видимому, с физической проблемой размерности пространства. Математической разработке общего понятия размерности предшествовала работа Больцано 1815 г. «Попытка объективного обоснования учения о трех измерениях пространства» (предмет исследования вполне мог быть подсказан работой Канта, внимательным читателем которого был Больцано). В центре этой статьи интересная теорема:

«Имеется система четырех точек, из которых ни одна не определена как сама по себе, так и своим отношением к остальным трем, поскольку оно должно быть охвачено чистым понятием. Однако если такая система четырех точек дана, то каждая другая точка и каждая совокупность точек (значит, всякая пространственная вещь) может быть детерминирована одними только понятиями, выражающими ее отношение к этим четырем точкам» [16а; 66].

Язык здесь не слишком однозначен. Однако если учесть, что «отношение одной точки к другой» для Больцано означало расстояние между этими точками, то окажется, что он обнаружил очень интересное свойство размерности, выраженное на метрическом языке. По существу речь идет о том, что в n-мерном случае максимальное число точек, взаимные расстояния между которыми могут задаваться произвольно, равно $n+1$; если добавить еще хотя бы одну точку, ее расстояния до n точек определяют расстояние до оставшейся точки. По-другому тот же факт можно выразить так: *в n-мерном пространстве необходимо и достаточно зафиксировать n точек (в общем положении), чтобы положение любой другой точки могло быть задано с помощью расстояний до фиксированных точек.* С этим фактом мы еще не раз встретимся.

До сих пор речь шла о предыстории проблемы размерности. Историей проблемы размерности можно назвать период, начавшийся с работ А. Пуанкаре на рубеже 20 в. Для этого есть следующие основания.

Наибольшее обобщение используемых до сих пор в физике представлений о размерности пространства дает топология. Пуанкаре — не только один из создателей топологии; ему принадлежит и первое, правда не вполне строгое, топологическое определение размерности.

Пуанкаре был не только величайшим математиком своего времени, но и одним из крупнейших физиков. Известна его роль в создании специальной теории относительности, означавшей радикальные изменения в представлениях о пространстве и времени. Но и независимо от этого он «неоднократно обращался к выяснению исходных начал геометрии и понятия пространства» [96г, т. 3, с. 656]. Пуанкаре, в частности, первый сделал факт трехмерности реального физического пространства предметом научного анализа.

Общая литература к главе 1: [32, 50, 51, 66, 101, 103].

Глава 2

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ И ФИЗИКА

2.1. ТВОРЧЕСТВО ПУАНКАРЕ И ИСТОРИЯ ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА

Интересы Пуанкаре простирались от абстрактных проблем математики до конкретных физических задач. Такая физико-математическая универсальность была весьма кстати при рассмотрении проблемы размерности пространства — действительно физико-математической проблемы.

Пуанкаре жил в эпоху революционных изменений в математике и физике, связанных с возникновением теории множеств и теории относительности. Он имел непосредственное отношение к этим изменениям и много сделал для утверждения обеих теорий. С его участием, по выражению П. С. Александрова, были «взорваны изнутри» традиции классической науки. Он, плодотворно применяя «наивную» теорию множеств Кантора, способствовал проникновению ее методов в различные области математики, переводил и популяризировал работы Кантора. Созданием топологии Пуанкаре открыл для математики «целый мир новых проблем..., по своему существу недоступный не только методам, но и самому... мировоззрению «классической» математики...» [2б, с. 809]. Не менее велик вклад Пуанкаре в создание специальной теории относительности. Основа математического аппарата этой теории — группа Лоренца — была указана им со всей математической ясностью [9].

Однако по отношению к обеим революционным теориям сказалось его глубоко классическое происхождение. Когда обнаружились парадоксы теории множеств и началась ее перестройка на аксиоматической основе, Пуанкаре не только отверг этот, как оказалось позже, основной для неклассической математики способ построения теории, но и отказался от фундаментального для нетривиальной теории множеств понятия актуальной бесконечности [84б, с. 114]. В случае теории относительности дело обстояло несколько иначе, но и здесь Пуанкаре, создавший по существу математический аппарат теории и осознавший раньше Эйнштейна неабсолютность понятия одновременности, так и не перешел полностью на новую релятивистскую программу. Свою последнюю статью на эту тему [9в] он заканчивает словами: «Теперь некоторые физики хотят принять новое соглашение [о неразрывной связи пространства и времени в одном четырехмерном пространстве-времени. — *авт.*]. Это не значит, что они были вынуждены это сделать; они считают это новое соглашение более удобным, вот и все; и те, кто не придерживается этого рода мыслей, могут вполне законно сохранить старый, чтобы не разрушать своих старых привычек. Между нами говоря, я думаю, что они это еще долго будут делать».

Таким образом, творчество Пуанкаре не просто хронологически совпадает с периодом «кризиса в естествознании», но в большой степени отражало этот кризис.

Почему Пуанкаре обратился к проблеме размерности пространства? Почему его можно назвать создателем топологии? Эти вопросы почти совпадают, так как для Пуанкаре основным и чуть ли не единственным свойством пространства, изучаемого топологией, является «свойство быть непрерывностью трех измерений» [9в, с. 35].

Основателем топологии обычно считают Б. Римана [23, с. 194]. Так о Римане говорит и сам Пуанкаре *. Однако важно, конечно, и обнаружение новой области исследований (что по отношению к топологии сделал Риман), и становление ее как самостоятельной науки. Последнее и есть заслуга Пуанкаре [26]. Он продемонстрировал плодотворность топологического подхода в различных областях математики («Что касается меня, то все различные пути, на которых я последовательно находился, приводили меня к Analysis situs»), осознал его «крайнюю важность» для математики в целом [96г, т. 3, с. 633, 634].

Особенно явным было продвижение Пуанкаре в определении понятия n-мерного пространства. Для Римана топология так же, как и для Пуанкаре, связана с понятием размерности: «Раздел 1 (понятие n-кратно протяженной величины) является одновременно введением к исследованиям по analysis situs» [97, с. 324]. В знаменитой лекции [97] Риман в первую очередь «поставил перед собой задачу — исходя из общего понятия о величине, сконструировать понятие многократно протяженной величины». Однако конструкция «n-кратно протяженной величины», которой удовлетворился Риман, весьма неопределенна:

«Однократно протяженное многообразие» он определяет возможностью «непрерывного смещения ... лишь в две стороны — вперед и назад», $n+1$-мерное многообразие — это совокупность всех «состояний», которые могут быть получены при переведении «определенным образом» n-мерного многообразия в иное, «вполне отличное» n-мерное многообразие.

В следующем параграфе мы увидим, как далеко продвинулся Пуанкаре в поисках топологического определения понятия раз-

* Впрочем, Пуанкаре во многих случаях свои собственные замечательные достижения связывал с именами своих предшественников, только инициировавших его работы. Так, например, именно Пуанкаре ввел название «группа Лоренца», установив групповую структуру совокупности преобразований Лоренца (последнее название также ввел Пуанкаре).

мерности. А сейчас попробуем ответить на вопрос, что вообще могло привести Пуанкаре к проблеме размерности пространства, к вопросу «Почему пространство имеет три измерения?» (так называется одна из последних его статей [96в]).

Объяснение может быть следующим. Вторую половину 19 в. с точки зрения истории математики можно назвать эпохой неевклидовой геометрии. Именно тогда неевклидова геометрия получила полное признание в математике. Отказ от априорной единственности евклидовой геометрии, возможность нескольких (а после работ Римана, бесконечного числа) типов геометрий произвел громадное впечатление на математиков того времени и, в частности, на Пуанкаре. Он неоднократно привлекал идеи неевклидовой геометрии при обсуждении проблемы пространства и немало сделал для самой неевклидовой геометрии [103]. С другой стороны, от момента создания неевклидовой геометрии его отделяло некоторое время, и он уже мог взглянуть на происшедшее с более общей точки зрения.

Естественно предположить, что отказ от казавшегося единственно возможным устройства пространства побудил Пуанкаре к анализу других, еще более фундаментальных свойств пространства, «уцелевших» при переходе к неевклидовой геометрии — в частности, его трехмерности. Не случайно, по-видимому, что Пуанкаре обсуждает одновременно возможности неевклидова и четырехмерного устройства физического пространства [96б, с. 62]. Выделение истории какой-то одной определенной концепции в математике всегда в некоторой степени условно: история понятия размерности, как мы видим, «зацепляется» за историю неевклидовой геометрии.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ

Что для Пуанкаре означает само утверждение о трехмерности пространства? У него можно найти два существенно различных подхода к понятию размерности — параметрический и топологический. В первой из четырех его книг по философии науки [96б] присутствуют оба подхода.

Параметрическая размерность. Пуанкаре пишет, например, что зрительное пространство «имеет как раз три измерения; т. е. элементы наших зрительных ощущений... будут вполне определены, когда известны три из них; выражаясь математическим языком, — они будут функциями трех независимых переменных» [96б, с. 65]. Подобный подход, основанный на параметрическом «определении» размерности, по существу до сих пор подразумевается в физике. Кавычки соответствуют тому, что параметрическое определение размерности (в форме, не учитывающей никаких структур в пространстве, кроме теоретико-множественной; например, «размерность как минимальное число параметров, которые необходимы, чтобы отличать точки фигуры друг от друга») математически некорректно. Это стало ясно после построенного Кантором (в 1877 г.) взаимно-однозначного соответствия между множеством всех точек квадрата и множеством точек отрезка и после построенного Пеано в 1890 г. непрерывного отображения отрезка на квадрат [84а, с. 107—110].

Однако параметрическое определение имело настолько ясный «физический смысл», согласующийся с обычным в физике понятием числа степеней свободы, что даже математик Пуанкаре в 1902 г. не отказался от этого интуитивно ясного определения. Даже в статье 1912 г., где уже содержится математически отчетливая идея топологического определения размерности, остались все-таки следы параметрических представлений. Поясняя понятие топологической эквивалентности двух пространств, Пуанкаре пишет: «Рассмотрим два пространства, E и E', точка M в пространстве E соответствует точке M' в пространстве E'; точка M имеет прямоугольными координатами x, y, z; точка M' имеет прямоугольными координатами три какие-либо непрерывные функции x, y, z. С интересующей нас точки зрения эти пространства не отличаются друг от друга» [96в, с. 34]. Однако координаты — не внутреннее топологическое понятие, и на самом деле топологическая эквивалентность определяется существованием одной функции — взаимно-однозначной и взаимно-непрерывной, связывающей точки двух пространств (а не трех функций, связывающих координаты).

Индуктивное определение размерности. Другой (радикально отличающийся от параметрического) подход к размерности, имеющийся уже в книге [96б], основан на анализе понятия непрерывности, в особенности «физической непрерывности». Именно при рассмотрении «физической непрерывности многих измерений» возникает конструкция, которой суждено было превратиться в первое топологическое определение размерности. Определение «математической непрерывности многих измерений» не доставляет беспокойства Пуанкаре, по-видимому, потому, что он считает достаточным аналитическое, или арифметическое (по выражению Пуанкаре) определение этого понятия: «Точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы раздельных величин, называемых ее координатами» [96б, с. 43].

Даже в 1912 г. Пуанкаре считает «безупречным с точки зрения математики» определение: «непрерывность n измерений есть совокупность n количеств, могущих изменяться независимо одно от другого, и принимать все вещественные значения, удовлетворяющие определенным неравенствам» [96в, с. 35]. В этой статье остались следы параметрического определения размерности, но подчеркивается, что «вопрос числа измерений тесно связан с понятием непрерывности и теряет всякий смысл для того, кто пожелает отвлечься от этого понятия» [96в, с. 35]. И действительно, как мы увидим, Пуанкаре рассматривает многомерность как обобщение простейшего случая непрерывности, соответствующего числовой прямой. Приведенное выше «арифметическое» определение, считает он, безупречно с точки зрения математики, но «не удовлетворяет философа», мало считается с интуитивным происхождением непрерывности [96в, с. 36]. И только поэтому он предлагает свое индуктивное определение размерности. Однако в статье 1912 г. это определение дается на математическом языке, и нелегко увидеть путь от «философской, интуитивной неудовлетворенности» к математическому определению.

Гораздо яснее этот путь просматривается в книге Пуанкаре «Наука и гипотеза», опубликованной в 1902 г.

Интуитивный, психологический аспект происхождения понятий был существенным элементом методологии Пуанкаре. Это относилось, в частности, и к геометрии: «Я занимался... анализом психологических исходных начал понятия пространства», — писал он в 1901 г. [96г, т. 3, с. 657].

В 1902 г. [96б, гл. 2] Пуанкаре рассматривает понятие физической непрерывности как первичное и связывает его с психологическим законом Фехнера: «Голые результаты опыта могут быть, следовательно, выражены следующими соотношениями: $A=B$, $B=C$, $A<C$, которые можно рассматривать как формулы физической непрерывности» [96б, с. 31]. Закон Фехнера описывает тот факт, что физически могут быть различимы только величины, отличающиеся не меньше, чем на некоторую конечную величину (порог различимости). Ясно, что речь идет скорее о физико-психологической непрерывности (о роли психологизма Пуанкаре см. [44г, к]). Понятие математической непрерывности если и не есть простая формализация физической непрерывности, то «поводом» к его созданию, согласно Пуанкаре, было «понятие физической непрерывности, выведенное из голых данных чувственного происхождения» [96б, с. 37].

Пуанкаре анализирует понятие «физической непрерывности многих измерений», и именно здесь появляется его идея топологического определения размерности (превращенная впоследствии Брауэром, Урысоном и Менгером в определение так называемой *большой индуктивной размерности* Ind). Он характеризует одномерную физическую непрерывность тем, что ее можно разделить, удаляя из нее конечное число «различимых друг от друга элементов». Если разделение непрерывности C «достигается вырезками, которые являются непрерывностными одного измерения, то мы скажем, что C имеет два измерения», и т. д. [96б, с. 43].

В 1902 г. Пуанкаре еще не заменяет слова «различимые элементы» на «точки» и не переносит это определение на случай математической непрерывности n измерений, которую (хотя он и пишет, что она вытекает совершенно естественно из понятий физической непрерывности) он характеризует всего лишь тем, что «точка подобной непрерывности, как известно, представляется нам определенной при помощи системы n раздельных величин, называемых ее координатами» [96б, с. 43].

Но утверждение о трехмерности пространства Пуанкаре раскрывает так: «И когда мы говорим, что пространство имеет три измерения, мы хотим сказать просто, что совокупность этих классов [изменений, мускульных ощущений — прообразов точек] выступает перед нами с характерными чертами физической непрерывности трех измерений» [96б, с. 100].

В работе 1912 г. хотя и говорится о «нематематической» (интуитивной, философской) потребности в новом определении, само определение дается на вполне математическом языке (без указания на происхождение из «голых чувственных данных», без слов «различимые элементы» и т. п.):

«Непрерывность имеет n измерений, когда ее можно разбить на несколько частей, произведя в ней одно или несколько сечений, которые сами являются непрерывностями n—1 измерений. Непрерывность n измерений, таким образом, определяется через непрерывность n—1 измерений; это — рекуррентное определение» [96в, с. 37].

Далее Пуанкаре пишет, что «веру в это определение» ему дает прежде всего (восходящее еще к «Началам» Евклида) представление о том, что поверхность — это граница тела, линия — граница поверхности и точка — граница линии, представление, которое дают «многие авторы элементарных учебников». Затем он подчеркивает важность в топологии понятия сечения («на сечении все основано») и в связи с этим напоминает, что по Риману отличие сферы от тора выражается с помощью сечений: на торе (в отличие от сферы) не любая замкнутая кривая разделяет его на две части. Однако источники веры в новое определение говорят не столько о происхождении самого определения, сколько о качественно другом уровне нового понятия.

Итак, понятие размерности пространства, являющееся фундаментальным понятием для одной из наиболее общих математических структур — топологии, возникало с помощью физики, на основе размышлений над «физическими» понятиями.

Размерность и свойства покрытий. Есть еще одно интересное обстоятельство в истории топологических определений размерности, связанное с творчеством Пуанкаре.

Обычно указывается [3, с. 163; 24б, с. 326; 46, с. 22], что проблема и идея общего индуктивного определения размерности появилась в статье Пуанкаре 1912 г. Как мы видели, вполне отчетливая идея этого определения была у него уже в 1902 г., и, по-видимому, именно здесь эта идея появляется впервые, так как в обзоре собственных работ Пуанкаре 1901 г. [96г, т. 3, с. 579] нет никаких следов индуктивного подхода.

Если мы обратимся к одной из самых бо́льших предшествующих работ Пуанкаре об основаниях геометрии (1898 г. [96а]), то и там не найдем никаких намеков на индуктивное определение. Это дает возможность установить время рождения идеи индуктивного определения с точностью до года — 1902 г. Но если в статье [96а] нет индуктивного определения, то зато есть нечто не менее интересное. Пуанкаре и здесь ставит вопрос о внутренней (топологической) характеристике n-мерного пространства, не связанной с конкретной реализацией того, что является элементарным многообразием, а тогда рассматривалось как «совокупность n независимо изменяющихся величин — координат» (см., напр., [96 г, т. 2, с. 13]). Вот каким образом Пуанкаре пытается дать такую характеристику:

«Представим себе совокупность плоских фигур [wafers], частично накрывающих одна другую таким образом, что плоскость оказывается полностью покрытой ими; или лучше представим себе что-то аналогичное в пространстве трех измерений. Если бы такие фигуры, налагаясь, образовывали нечто вроде одномерной ленты, мы смогли бы распознать это, потому что связь между этими фигурами... подчиняется закону, который можно сформулировать так: если A связано одновременно с B, C и D, то D связано с B или C. Этот закон не выполнялся бы, если бы фигуры, налагаясь, покрывали плоскость или пространство большего, чем два, числа измерений. Таким образом, когда я говорю, что всевозможные положения образуют совокупность одного измерения или больше, чем одного измерения, я имею в виду, что этот закон выполняется или не выполняется. Когда я говорю, что они образуют совокупность двух или трех измерений, я просто утверждаю, что выполняются некоторые аналогичные законы» [96а, с. 29].

Мы видим, что в 1898 г. Пуанкаре пытается связать понятие n-мерности со свойствами покрытий. Конечно, никаких определенных результатов здесь нет, и если одномерная «совокупность» охарактеризована некоторым образом, то о большем числе измерений сказано только то, что должны выполняться «аналогичные законы».

Понятие размерности, основанное на свойстве покрытий (dim) — минимальная кратность сколь угодно мелких покрытий, — считается сейчас главным размерностным инвариантом [3, с. 9, 164]. Как указывают Александров и Пасынков [3, с. 212], «первым математиком, который понял связь между размерностью и кратностью покрытий» (в 1911 г.), был Лебег. Хотя попытка Пуанкаре связать размерность со свойствами покрытий не удалась, само направление размышлений могло индуцировать идею Лебега.

2.3. РАЗМЕРНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА И ПУАНКАРЕ

К определению понятия размерности Пуанкаре пришел, рассматривая непосредственное восприятие человеком пространственных отношений. Другой важный результат его психологического анализа — вывод об определяющем влиянии внешнего мира на геометрические представления. Пуанкаре неоднократно писал, что существа, ум и органы чувств которых были бы подобны нашим, «могли бы получить от соответственно подобранного внешнего мира такие впечатления, что им пришлось бы построить геометрию иную, чем Евклидова, и разместить явления этого внешнего мира ... даже в пространстве четырех измерений» [96б].

Однако Пуанкаре не был бы физиком, если бы, заинтересовавшись проблемой размерности, он ограничился психологическим подходом к ней и не поставил вопроса об отношении физики к размерности пространства: «Мы до сих пор становились на точку зрения чисто субъективную, чисто психологическую, или, если угодно психофизиологическую; мы рассматривали только отношение между пространством и нашим чувством. Можно было бы, наоборот, встать на точку зрения физики и задать вопрос: нельзя ли локализовать явления природы в пространстве, отличном от нашего, например, двух или четырех измерений?» [96в, с. 47]. И далее следует четкая постановка проблемы: «Законы физики выражаются дифференциальными уравнениями, в этих уравнениях фигурируют три координаты материальных точек. Разве не возможно выразить эти законы другими уравнениями, где фигурировали бы в этом случае другие материальные точки, имеющие четыре координаты?» (Из этой постановки видно, кстати, что физика навязывает именно параметрическое представление о размерности.)

Сразу после формулировки проблемы Пуанкаре перечисляет возможные ответы: «Но, может быть, если это возможно, полученные таким способом уравнения окажутся менее простыми? Или, наконец, если они оказываются такими же простыми, то не отбрасываем ли мы их просто потому, что они противоречат нашим умственным привычкам?». Пуанкаре по существу предопределяет результаты анализа, и поэтому анализа, физического в полном смысле, у него вообще нет. Как мы увидим в гл. 4, физик Эренфест, поставив вопрос о размерности физического пространства, дал действительно глубокий анализ, не подгоняя его под заранее подготовленный ответ.

При рассмотрении проблемы Пуанкаре использует понятие «параллелизма» (изоморфизма) совокупностей явлений: «Что хотим мы сказать, говоря о выражении тех же законов другими уравнениями? Предположим, существуют два мира M и M'; мы можем между явлениями, которые происходят в этих мирах или которые могли бы в них происходить, найти такое соответствие, что всякому явлению Ф в первом соответствовало бы явление Ф′ во втором, которое, так сказать, было бы изображением первого. Тогда, если я предположу, что необходимым следствием явления Ф вследствие законов, управляющих миром M, оказывается определенное явление $Ф_1$ и что необходимым следствием явления Ф′ (изображения Ф) вследствие законов, управляющих миром M', является $Ф'_1$ — точное изображение явления $Ф_1$, мы можем сказать, что оба мира подчинены тем же законам. Нас мало интересует качественная природа явлений Ф и Ф′; нам достаточно, чтобы «параллелизм» был возможен».

Изоморфизм двух «миров» разных размерностей, который попытается доказать Пуанкаре, на самом деле невозможен; указание на радикальное отличие «физик» в пространствах разных размерностей и есть основной результат Эренфеста.

Как пишет Пуанкаре, «достаточно рассмотреть простой случай астрономических явлений и законы Ньютона». Указанный выше изоморфизм он устанавливает тем, что расстояния между двумя звездами (которые только и должны, по его словам, входить в законы небесной механики) заменяются на функции восьми координат двух звезд (в четырехмерном пространстве), и затем сразу утверждает: «Ясно только, что полученные таким образом уравнения окажутся гораздо менее простыми, чем наши обыкновенные уравнения. Конечно, то же произойдет и с законами физики» [96в, с. 49].

В этом и проявляется предопределенность ответа, связанная, по-видимому, с методологической установкой Пуанкаре, которую кратко можно описать следующим образом: геометрическая модель реальности неоднозначна, поскольку в экспериментах имеют дело не с самой по себе моделью, а с сочетанием определенной модели и определенной физической теории; поэтому геометрическая модель выбирается из соображений простоты и удобства. В слова «удобство» и «простота» можно вложить и вполне материалистический смысл: удобно и просто то, что выдерживает испытание общественно-исторической практикой. Однако утверждение о существенной неоднозначности геометрической модели, и, в частности, о практической возможности описания одной и той же реальности в геометриях разного числа измерений — именно такое утверждение дает основание говорить о философской, методологической позиции Пуанкаре как конвенционализме.

Как же Пуанкаре пытается обосновать то, что физическому пространству можно приписать число измерений, не равное трем? Он опирается на соображение, которое кажется убедительным только на первый взгляд: «Мы наблюдаем не координаты звезд, но только их взаимные расстояния: естественным изображением законов их движения должны быть дифференциальные уравнения, связывающие эти расстояния со временем» [96в, с. 48]. Может быть и «должны», но, как известно, кроме взаимных расстояний в механике Ньютона есть еще и понятие инерциальной системы отсчета, и понятие абсолютного пространства, и связанная с этим невыполнимость принципа Маха. То, что эти элементы ньютоновской механики вызывали сомнения у некоторых физиков (включая и Эйнштейна, для которого эти сомнения сыграли и позитивную роль при создании ОТО), не дает основания игнорировать их. Простейший пример дают две материальные точки, связанные гравитационным взаимодействием и находящиеся вначале на заданном расстоянии — поведение этой системы зависит от того, вращается она или нет.

Но Пуанкаре не учитывает еще более важное обстоятельство. Он неявно подразумевает, что при переходе к четырехмерному пространству «закон Ньютона» остается тем же (сила пропорциональна r^{-2}), так как он говорит только о замене r на функцию от восьми (4×2) координат. Но тогда этот закон не будет порождаться (линейным) уравнением Лапласа; это приведет к отказу от принципа суперпозиции, от эквивалентности гравитационных полей сферически-симметричной конфигурации и точки с массой, равной массе конфигурации, и т. д. Таким образом, изоморфизм совокупностей явлений не достигнут, что означает и безуспешность физического анализа проблемы размерности, проводимого Пуанкаре.

Если в математических размышлениях Пуанкаре о размерности явственно ощущается подход физика, оказавшийся, как мы видели, плодотворным, то в физическом анализе не менее отчетливо виден подход математика, но этот подход оказался, к сожалению, не плодотворным.

2.4. ГИПОТЕЗА КВАНТОВ И ПОНЯТИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В 1912 г.

Пуанкаре заинтересовался квантовыми идеями, по-видимому, только в последние год-два своей жизни [96г, т. 3, с. 710], но тем не менее глубоко проник в существо этих идей. Несмотря на тогдашнее (доборовское) состояние квантовой теории, он осознал фундаментальность положения о дискретности множества возможных значений физической величины. Участие Пуанкаре в обсуждении квантовых идей видно уже из того, что обстоятельная работа Планка «Физическая структура фазового пространства» [93в, с. 339] — это ответ на некий «каверзный вопрос» Пуанкаре.

В статье Пуанкаре 1912 г. «Гипотеза квантов» впервые естественным образом (из физики) появляющаяся дискретность сталкивается с вопросом числа измерений пространства, который, по словам Пуанкаре (в том же 1912 г.!), «тесно связан с понятием непрерывности и теряет всякий смысл для того, кто пожелает отвлечься от этого понятия».

Анализируя путь Планка к спектру теплового излучения, Пуанкаре приходит к выводу, что предположение Планка о возможных состояниях элементарных осцилляторов естественно обобщить на любую физическую систему: «Физическая система обладает конечным [точнее было бы сказать, дискретным — *авт.*] числом различных состояний; она перескакивает из одного состояния в другое, не проходя через непрерывный ряд промежуточных состояний» [96г, т. 3, с. 555].

Обратим внимание на то, какой пример множества состояний приводит Пуанкаре: «Допустим, простоты ради, что состояние системы зависит только от трех параметров, так что мы можем представить его геометрической точкой в пространстве. Ансамбль точек, изображающих различные возможные состояния, не заполняет полностью пространство или какую-либо область пространства, как обычно предполагается, а представляет собой большое число точек, изолированных в пространстве. Правда, эти точки распределены очень густо, что и создает у нас иллюзию непрерывности». Что это, как не параметрическое представление о размерности? Несмотря на то что математик Пуанкаре знает о некорректности параметрического определения, физик Пуанкаре совершенно естественно (и, можно даже сказать, наивно) пользуется параметрическим языком для описания трехмерности пространства состояний. Он рассматривает и возможность не только «точечного», нульмерного множества возможных состояний, но и одномерного или двумерного, по-прежнему полагая, что состояние физической системы, зависящей от трех параметров, естественно изображается точкой пространства.

Но может быть Пуанкаре имел в виду только пространство состояний, а не физическое пространство? Это, впрочем, не так уж и существенно, так как «линейка» — физический прибор для измерения расстояния — это тоже физическая система, множество состояний которой должно быть дискретным. Утверждение о дискретности множества возможных состояний любой изолированной физической системы, как указывает Пуанкаре, применимо и к Вселенной.

«Следовательно, Вселенная должна скачком переходить из одного состояния в другое, но в промежутках между скачками она остается неизменной, и различные моменты, в течение которых она сохраняет свое состояние, нельзя было бы уже отличать друг от друга; мы приходим, таким образом, к прерывному течению времени, к атомам времени» [96г, т. 3, с. 556]. Этими словами заканчивается параграф, и Пуанкаре переходит к другим вопросам.

Обратим внимание на вывод о прерывности времени, об атомах времени. Но почему только времени? Трудно представить, чтобы последовательный релятивист, действительно уверенный в том, что «пространство и время не являются двумя совершенно различными сущностями, которые могут быть представлены отдельно, но двумя частями одного и того же целого» [96в, с. 30], мог сказать что-либо новое о времени, не перенося это новое в какой-либо форме (хотя бы в форме вопроса) на пространство. Пуанкаре не ставит вопрос о дискретности пространства и тем самым лишает нас возможности узнать в прямой форме, считал ли он действительно невозможным говорить о трехмерности пространства, отвлекаясь от его непрерывности [96в, с. 35].

Пуанкаре подошел очень близко к представлению о возможной дискретности пространства, а то, что он так и не увидел этой возможности, проливает дополнительный свет на вопрос о роли Пуанкаре в создании релятивистских представлений [44г].

2.5. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАЗМЕРНОСТИ

Перечислим важнейшие события в истории топологической теории размерности.

Идея индуктивного топологического определения размерности появилась у Пуанкаре в 1902 г. и была изложена им на математическом языке в 1912 г.

В 1911 г. Брауэр в статье [19а] доказал невозможность взаимно-однозначного и взаимно-непрерывного (гомеоморфного) соответствия между кубами в евклидовых пространствах E^n и E^k при $n \neq k$, т. е. доказал топологическую неэквивалентность евклидовых пространств разных размерностей (здесь размерность понимается «арифметически», по выражению Пуанкаре, или как линейная размерность). Этот результат Брауэра, казалось бы весьма специальный, стал опорным не только для топологической теории размерности, но, в известном смысле, и для топологии в целом. Действительно, если бы оказалось, что при топологическом отображении может не сохраняться размерность геометрических объектов в E^n, то это означало бы, что класс гомеоморфных преобразований слишком широк, чтобы иметь содержательные геометрические приложения [46, с. 23]. Ведь E^n и фигуры в нем — одни из самых обычных объектов в математике. В этой связи вспомним замечательный результат Кантора — доказательство теоретико-множественной эквивалентности множества точек квадрата (или вообще куба в E^n) и множества точек отрезка. Этот результат означал невозможность определить понятие размерности на теоретико-множественном языке.

В том же номере журнала, что и упомянутая статья Брауэра, было опубликовано письмо Лебега с формулировкой теоремы: «Если каждая точка n-мерной области D принадлежит по крайней мере одному из замкнутых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_p$, число которых конечно, и если эти множества достаточно малы, то общая точка имеется по меньшей мере у $n+1$ из этих множеств» [73]. Характеристическое свойство размерности, указанное Лебегом (и которое пытался сформулировать Пуанкаре еще в 1898 г.), впоследствии превратилось в самостоятельное топологическое определение размерности (как минимальной кратности достаточно «мелких» покрытий).

В 1913 г. в статье «О естественном понятии размерности» [19б] Брауэр превратил идею Пуанкаре в корректное математическое определение, доказал теорему Лебега и с ее помощью доказал топологическую n-мерность пространства E^n (в смысле индуктивного определения).

Этой работой завершился первый период в истории топологической теории размерности. Брауэр, владея общим топологическим определением понятия размерности, тем не менее даже не поставил задачу построения топологической теории размерности. Возможное объяснение состоит в интуиционистской методологической программме Брауэра [44г].

Теорию, основанную на топологическом понятии размерности, создали в начале 20-х годов выдающийся советский математик П. С. Урысон и австрийский математик К. Менгер. Они открыли возможность распространить понятие размерности на широкий класс геометрических объектов и «оправдали новое понятие, сделав его краеугольным камнем чрезвычайно красивой и плодотворной теории, внесшей единство и порядок в большую область геометрии» [46, с. 22]. (Об Урысоне и Менгере, о роли физики в их математическом творчестве см. [44г, к].) В дальнейшем в результате интенсивного развития топологическая теория размерности превратилась в одну из центральных областей общей топологии [3].

С точки зрения физики (рассчитывающей получить от математики язык, пригодный для описания физической реальности) особый интерес имеет вопрос о взаимоотношении различных топологических определений размерности. Мы уже встречались с тремя ind, Ind и dim.

Приведем их (нестрогие) формулировки.

Малая индуктивная размерность пространства X ($\operatorname{ind} X$) равна n, если у каждой точки пространства X есть сколь угодно малые окрестности, границы которых имеют размерность $n-1$ (в смысле ind), но нет сколь угодно малых окрестностей, границы которых имеют размерность $<n-1$. Начало индуктивной цепочки образует то, что размерность пустого множества принимается равной минус единице; $\operatorname{ind}\varnothing=-1$.

Большая индуктивная размерность пространства X ($\operatorname{Ind} X$) равна n, если для любых его двух непересекающихся множеств найдется $n-1$-мерное (но не для любых найдется менее чем $n-1$-мерное) замкнутое множество, разделяющее их; $\operatorname{Ind}\varnothing=-1$.

Размерность пространства *X, определяемая с помощью покрытий,* ($\dim X$) равна n, если минимальная кратность сколь угодно малых покрытий пространства X равна $n+1$ (кратность данного покрытия — это наибольшее число элементов покрытия, имеющих хотя бы одну общую точку).

Хотя совпадение размерностных инвариантов dim, ind и Ind было доказано для обширного класса топологических пространств (и в частности, для произвольных множеств в евклидовых пространствах E^n), в 40-х годах обнаружилась самостоятельность величин dim, ind, Ind. Были построены конкретные примеры топологических пространств, для которых разные топологические определения давали разные значения размерности [3].

КРАТКИЕ ИТОГИ ГЛАВЫ 2

Пуанкаре — представитель классической математики и физики, своими работами подготовивший в большой степени революционное преобразование этих наук. Его деятельность — естественное начало истории современного понятия размерности пространства в топологии и физике.

Топологическая размерность — фундаментальное понятие для одной из наиболее общих математических структур — имело физико-психологическое происхождение. Время рождения идеи индуктивного топологического определения размерности (с точностью до года) — 1902 г. Этому предшествовала попытка связать размерность со свойствами покрытий.

Пуанкаре впервые поставил вопрос о размерности пространства как физическую проблему, хотя и не смог дать настоящего физического анализа этой проблемы. Основная причина этого — методологическая (конвенционалистская) позиция Пуанкаре.

Уже в работах Пуанкаре обнаруживается столкновение дискретности, характерной для квантовой физики, и непрерывности, обобщениями которой являются топологические определения размерности.

Практически во всех работах Пуанкаре, касающихся вопроса размерности пространства, можно найти элементы параметрических представлений о размерности, по существу навязываемые физикой, хотя и некорректные в простой теоретико-множественной форме. Это также свидетельствует о несоответствии между потребностями физики и топологическими определениями размерности.

Первый период в истории топологической теории размерности, начавшийся с появления в 1902 г. у Пуанкаре идеи первого топологического определения размерности пространства, завершился в 1913 г. работой Брауэра, в которой индуктивному определению размерности, данному Пуанкаре в 1912 г., придана корректная форма. На основе введенного определения и с помощью сформулированной Лебегом теоремы о свойстве покрытий в E^n Брауэр придает окончательную форму своему результату 1911 г. о негомеоморфности евклидовых пространств разного числа измерений, доказывая топологическую n-мерность E^n.

Топологическая теория размерности была создана в начале 20-х годов в работах П. С. Урысона и К. Менгера. Дальнейшее развитие теории привело к обнаружению самостоятельности различных топологических определений размерности.

Общая литература к главе 2: [2, 11, 50б, 84, 96, 97]

Глава 3

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ ЭЙНШТЕЙНА И РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

3.1. ТОПОЛОГИЯ И МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Несколько упрощая ситуацию, можно сказать, что пространство и время в дорелятивистской физике отождествлялись (иногда неосознанно) с трех- и одномерным евклидовыми пространствами E^3 и E^1, и только к концу дорелятивистской эпохи внутри физики возникла (в связи с открытием неевклидовых геометрий) потребность обоснования таких представлений. Предшествовавшие этому отдельные «преждевременные» догадки (в частности, попытка Канта обосновать трехмерность пространства) реально не повлияли на развитие физики.

После отождествления физического пространства с E^3 и времени с E^1 их изучение, естественно, полностью должно было передаться математике. В нерелятивистской физике пространство и время вполне можно было объединить формально в 4-мерное евклидово пространство E^4. Эйнштейн подчеркивал, что 4-мерность не связана именно с теорией относительности: «Каково отношение специальной теории относительности к проблеме пространства? В первую очередь мы должны предостеречь от того мнения, что четырехмерность реальности была введена впервые этой теорией. Даже в классической механике «положение» события определяется четырьмя числами...; таким образом, вся совокупность физических «событий» мыслится как бы погруженной в четырехмерное непрерывное многообразие...» [т. 2, с. 753]*.

Действительно, пространство E^3 вместе с естественной метрикой $\Delta\rho_s^2 = \sum\limits_{i=1,2,3} \Delta x_i^2$ и время E^1 с «метрикой» $\Delta\rho_t^2 = \Delta t^2$ (и порождаемыми этими метриками топологиями), как считалось, имеют абсолютный смысл. Поэтому объединение пространства и времени в пространство E^4 с метрикой, например, $\Delta\rho^2 = \sum\limits_{i=1,2,3} \Delta x_i^2 + \alpha^2\Delta t^2$, где α — некоторый параметр с размерностью скорости, хотя и не имело оснований в физике, но было формально возможным. Должен был, правда, возникнуть вопрос о смысле α, но так как топологии, порождаемые такой метрикой с различными α ($\neq 0$, ∞), эквивалентны, то, по крайней мере с точки зрения топологии, вопрос не имел бы особой остроты.

---

* В этой главе в ссылках на собрание научных трудов Эйнштейна [141] указывается только номер тома и страница.

Вместе со СТО в физику пришло представление о существовании фундаментальной постоянной именно с размерностью скорости — скорости света c. Пришло также представление о фундаментальности величины (интервала)

$$\Delta s^2 = \sum_{i=1,2,3} \Delta x_i^2 - c^2 \Delta t^2, \tag{1}$$

действительно осознанное только через несколько лет (Минковский, 1907), без чего ОТО «быть может, оставалась бы в зачаточном состоянии» [т. 1, с. 559] Содержание специальной теории относительности по существу совпадает с содержанием геометрии пространства-времени, определяемой интервалом (1). Очень существенно, что перед $c^2\Delta t^2$ в интервале стоит минус, точнее говоря, что интервал — знаконеопределенная, или индефинитная, величина, не подчиняющаяся неравенству треугольника (геометрия, соответствующая метрике (1), называется псевдоевклидовой, или геометрией Минковского). Это обстоятельство вынуждает заново рассмотреть соотношение метрики и топологии.

Знакоопределенная, или дефинитная, метрика $\rho(p_1, p_2)$ — расстояние между точками p_1 и p_2 — это симметричная, неотрицательная функция, подчиняющаяся неравенству треугольника, т. е.

а) $\rho(p_1, p_2) = \rho(p_2, p_1) \geqslant 0$;

б) $\rho(p_1, p_2) = 0$, только если $p_1 = p_2$; (2)

в) для любых трех точек p_1, p_2, p_3

$$\rho(p_1, p_2) \leqslant \rho(p_1, p_3) + \rho(p_3, p_2).$$

Существует несколько эквивалентных способов введения топологической структуры. Можно задать либо совокупность всех открытых множеств, либо базисную систему окрестностей, либо операцию замыкания множества [60].

Дефинитная метрика естественным образом порождает (индуцирует) топологию: «близки» те точки, расстояние между которыми «мало». Выражаясь на математическом языке, можно ввести операцию замыкания множества исходя из дефинитной метрики: точка p принадлежит замыканию множества M, если в M можно найти точки, сколь угодно близкие к p: $\rho(p, p') \to 0$, $p' \in M$. Используя понятие базы, или базисной системы окрестностей, можно сказать, что дефинитная метрика индуцирует топологию, база которой — всевозможные шары. Кроме того, дефинитная метрика дает естественный размер для области M пространства — ее диаметр

$$\operatorname{diam} M = \sup \rho(p_1, p_2); \quad p_1, p_2 \in M. \tag{2a}$$

Неевклидова геометрия обобщала евклидову, сохраняя и подразумевая эти свойства (дефинитной) метрики [Риман, с. 315, 316, 333]. И хотя, как выяснилось позже, дифференциальная геометрия может быть построена независимо от предположения о дефинитности метрики (справедливости неравенства треугольника), введение топологии существенно зависит от типа метрики.

В СТО естественным аналогом двухточечной метрической функции $\rho(p_1, p_2)$ является интервал $s(P_1, P_2)$, выражение (1) для которого справедливо для любых двух точек пространства-времени (не обязательно «бесконечно близких»). Уже рассматривая выражение (1), легко увидеть радикальные отличия дефинитной и индефинитной метрик (в частности, невыполнение неравенства треугольника).

Одно из фундаментальных положений, лежащих в основе ОТО — риманова, точнее говоря, псевдориманова геометрия, т. е. понятие интервала

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \tag{3}$$

Но здесь уже конкретное выражение для интервала не может считаться заданным раз и навсегда, как в СТО. От функций $g_{ik}(x)$ требуется только локальная приводимость выражения (3) к виду (1) (риманова геометрия локально соответствует евклидовой, псевдориманова — псевдоевклидовой).

Однако и в ОТО есть возможность ввести интегральную двухточечную функцию, описывающую метрическую структуру пространства-времени:

$$I(P_1, P_2) = \Big(\int\limits_{P_1}^{P_2} ds\Big)^2, \tag{4}$$

здесь интеграл берется по геодезической, соединяющей точки P_1 и P_2 (в достаточно малой области произвольного риманова пространства через любые две точки проходит только одна геодезическая [109]). Эту функцию ввел в 30-е годы английский математик Г. Рузе, а ее значение для ОТО особенно внимательно изучал Дж. Синг [109], назвавший ее «мировой функцией» (см. также [55]). Мы будем называть функцию $I(P_1, P_2)$ интервалом, учитывая ее прямую связь с локальным интервалом (3) и не обращая внимания на то, что $I(P_1, P_2)$ — это по существу квадрат интервала. Описание метрической структуры пространства с помощью интегральной величины $I(P_1, P_2)$ эквивалентно локальному описанию с помощью метрического тензора $g_{ik}(P)$ [109]. Эту эквивалентность вместе с формулой (3) устанавливает соотношение

$$g_{ik}(P) = \lim_{P' \to P} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} I(P, P'); \; P = \{x^i\}. \tag{5}$$

Две величины ds^2 и $I(P_1, P_2)$ эквивалентны в том смысле, что если задана система координат, то задание одной из этих величин определяет и вторую. Однако в то время как о ds^2 можно говорить, только если система координат уже задана, интервал $I(P_1, P_2)$ имеет смысл и без задания системы координат. Это просто функция пары точек, обладающая определенным набором свойств (пока еще не аксиоматизированным полностью [55]) и в этом смысле должна быть подобна обычной дефинитной метрике (см. (2)). Интервал $I(P_1, P_2)$ имеет естественный физический смысл — для $I<0$ $I(P_1, P_2)=-\tau^2(P_1, P_2)$, где τ — собственное время частицы, движущейся свободно из p_1 в p_2 (об операционально-измерительном статусе интервала между конечно удаленными точками пространства-времени см. [83]).

Необходимость использовать несколько координатных карт в локальном описании многообразия соответствует неединственности или несуществованию геодезической для некоторой пары точек в интегральном описании.

Математика, изучающая наиболее общие структуры «пространственного» типа, игнорирует, однако, метрику индефинитного типа и метрическим пространством называет только пространство с дефинитной метрикой (2) [60]. Общая концепция метрического пространства появилась в математике в 1906 г. (М. Фреше), а топологического — в 1914 г. (Ф. Хаусдорф). Вполне естественно поэтому, что Эйнштейн при создании физической теории пространства-времени и тяготения (ОТО) в 1907—1915 гг. не ощущал потребности в уточнении используемых им (топологических по существу) понятий близости, соседства точек пространства-времени. Он просто упоминает «гауссовское» (по его выражению) обобщение геометрии, которое само по себе, конечно, подразумевало дефинитную метрику:

«Гаусс предложил метод математического описания любого континуума, в котором определены метрические соотношения («расстояния» между соседними точками). Каждой точке континуума приписывается столько чисел (гауссовых координат), сколько измерений имеет континуум. Способ приписания выбран таким, чтобы он был однозначным и чтобы соседним точкам соответствовали числа (гауссовы координаты), отличающиеся на бесконечно малую величину. Гауссова система координат является логическим обобщением декартовой. Она применима также и к неевклидовым континуумам, но лишь тогда, когда малые по отношению к определенному размеру («расстоянию») части рассматриваемого континуума тем более похожи на евклидов континуум, чем меньше рассматриваемая часть континуума» [т. 1, с. 575].

Эйнштейн неоднократно говорил о «малых» и «бесконечно малых» областях пространства-времени. Но даже обычное утверждение о близости некоторых геометрических свойств достаточно малой области искривленного риманова пространства к свойствам плоского пространства требует уточнения, когда вместо дефинитной метрики используется интервал. «Бесконечную малость» области пространства-времени можно еще связать с касательным пространством, не говоря о стремлении к нулю каких-то инвариантных размеров области. Когда же говорят просто о «малой» области пространства-времени, то без определения размеров области обойтись нельзя. Но определить размеры мешает индефинитность интервала — равенство нулю интервала между двумя точками означает, как известно, не совпадение этих точек, а лишь возможность связать их светоподобным сигналом.

Пользуясь интегральным понятием интервала $I(P, P')$, можно было бы говорить о размерах пространственно-временной области M в следующем смысле. Введем две характеристики размера M: *пространственный диаметр* — наибольший пространственно-подобный интервал, разделяющий точки, принадлежащие M,

$$(\mathrm{Diam}_s M)^2 = \sup I(P, P'); \quad P, P' \in M; \tag{6а}$$

и *временной диаметр* — наибольший (по абсолютной величине) времени-подобный интервал, разделяющий точки, принадлежащие M,

$$(\mathrm{Diam}_t M)^2 = -\inf I(P, P'); \quad P, P' \in M. \tag{6б}$$

Наибольшую из этих двух величин можно назвать просто *диаметром*, или размером M:

$$\mathrm{Diam}\, M = \max\{\mathrm{Diam}_s M, \ \mathrm{Diam}_t M\}. \tag{7}$$

Нетрудно понять, что конечная в введенном смысле область пространства-времени не может содержать в себе светоподобную линию целиком, если в области есть хотя бы одна точка, не лежащая на этой линии.

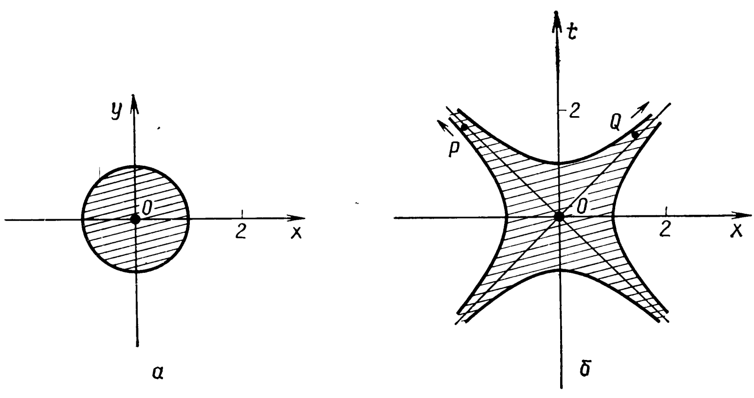


Рис. 3.1. Различие дефинитной метрики и интервала.
а — 2-мерное евклидово пространство с метрикой $\rho(p, q)$:

$$\rho^2(p, q) = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2.$$

Область, ограниченная окружностью, — это множество точек, удаленных от точки O на расстояние, не большее 1. Любая пара точек в этой области разделена расстоянием, не большим 2.
б — 1+1-мерное псевдоевклидово пространство с интервалом

$$I(P, Q) = -(t_P - t_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2.$$

«Четыреххвостая» область, ограниченная гиперболами, — это множество точек, удаленных от точки O на интервал, по абсолютной величине не больший, чем 1. В этой области существуют пары точек, разделенные сколь угодно большим интервалом: $I(P, Q) \to \infty$.

Когда Эйнштейн говорит о введении координат в пространстве-времени, он предполагает, что понятие близости точек (т. е. топология) уже существует: «Я могу перейти от какой-либо точки поверхности к любой другой точке, переходя большое число раз к «соседним» точкам, или, другими словами, переходя от точки к точке без „скачков"» [т. 1, с. 571]. Он говорит о том, что вводимые координаты могут быть произвольными, но обязательно согласованными с топологией пространства:

«Для описания пространственно-временных областей конечной протяженности нужны произвольные координаты в четырехмерном многообразии, обеспечивающие не что иное, как однозначное обозначение каждой из точек пространства-времени четырьмя числами, и отвечающие непрерывности этого четырехмерного многообразия...» [т. 2, с. 125].

Если в пространстве задана дефинитная метрика, то, как уже говорилось, нет необходимости вводить топологию независимо. Другое дело — интервал. Взаимоотношение индефинитной метрической структуры с топологической структурой не так просто, и в современных математически оснащенных изложениях ОТО [135] топологическая структура пространства-времени постулируется до введения метрики.

Сейчас, правда, известно, что, и основываясь на индефинитной метрической структуре (интервале), можно ввести некоторую топологию. Для этого достаточно даже знать не всю метрическую структуру, а лишь ее часть — так называемую причинную структуру, т. е. знак интервала для каждой пары точек и ориентацию во времени, задающую «направление из прошлого в будущее». Базисную систему окрестностей соответствующей топологии — так называемой A-топологии (введенной А. Д. Александровым [1а, 135]) — образуют пересечения всевозможных конусов прошлого и будущего. В случае СТО A-топология совпадает с топологией пространственно-временного многообразия, однако, поскольку в СТО структура пространства-времени полностью и явно определена, в топологическом описании нет необходимости. В случае же ОТО A-топология может не совпадать с топологией многообразия [135].

С помощью интервала $I(P_1, P_2)$ и основанного на нем понятия диаметра области в псевдоримановом пространстве (6), (7) можно ввести топологию следующим образом.

Назовем δ-окрестностью точки P всякое множество Ω такое, что $P \in \Omega$, $\mathrm{Diam}\,\Omega < \delta$ и Ω — максимальное множество такого рода (т. е. к нему нельзя добавить ни одной точки без нарушения этого свойства). Обозначим такие окрестности $\Omega(P;\ \delta)$. В случае дефинитной метрики множество $\Omega(p;\ \delta)$ — это шар диаметра δ. В случае интервала в $n+1$-мерном пространстве Минковского $\Omega(P;\ \delta)$ — это цилиндр $B^n(\delta) \times (0,\ \delta)$, где $B^n(\delta)$ — n-мерный шар диаметра δ; а также всякая фигура, полученная из этого цилиндра с помощью преобразования Лоренца (рис. 3.2).

Система окрестностей $\Omega(P;\ \delta)$ порождает топологию, совпадающую с топологией многообразия.

Сам Эйнштейн ни о каких точных конструкциях топологического характера не говорил, ограничиваясь интуитивным представлением о размерах пространственно-временной области, о существующих в пространстве-времени отношениях близости, соседства точек и т. п.

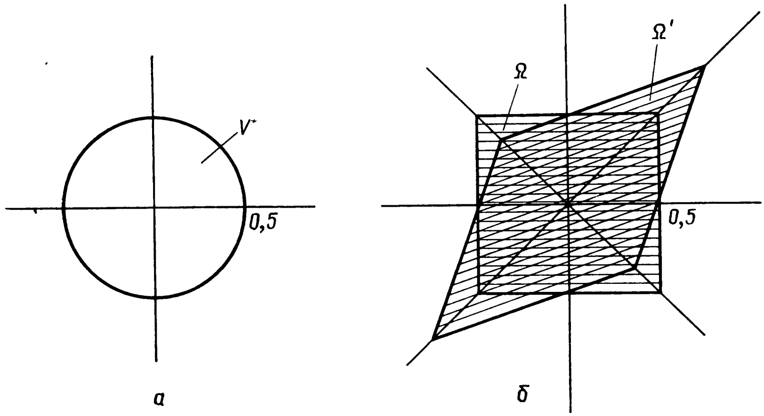


Рис. 3.2. Различие дефинитной метрики и интервала. *а* — максимальное множество точек в E^2, любая пара из которых разделена расстоянием, не большим 1, diam $V=1$. *б* — два максимальных множества точек в M^{1+1}; в каждом множестве любая пара точек разделена интервалом, по модулю не большим 1, Diam $\Omega=$Diam $\Omega'=1$.

3.2. КООРДИНАТЫ И ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Представления Эйнштейна о размерности пространства тесно связаны с введением координат:

«Пространство представляет собой трехмерный континуум. Это значит, что положение (покоящейся) точки можно описать тремя числами (координатами) и что около каждой точки имеются сколь угодно близкие «соседние» точки, положение которых может быть описано такими значениями координат, которые могут быть сколь угодно близки к координатам исходной точки. Благодаря последнему свойству мы говорим о «континууме» (непрерывности), а ввиду того, что число координат равно трем, — о его «трехмерности» [т. 1, с. 558].

Эйнштейн неоднократно подчеркивал нефизичность координат в ОТО и связывал прогресс в создании этой теории с отказом от попыток физической интерпретации координат. Однако по Эйнштейну именно координаты описывают топологическую структуру пространства-времени и его размерность.

В связи с этим напомним, как изменилось отношение Эйнштейна к роли и смыслу координат в пространстве-времени при построении СТО и ОТО.

Специальная теория относительности исторически начиналась с придания реального физического смысла временной координате (выяснению бессмысленности понятия «абсолютной одновременности») и с уточнения физического смысла пространственных координат с помощью указания вполне определенной процедуры измерения [т. 1, с. 8—21].

В ОТО окончательный успех, по мнению Эйнштейна, стал возможен только после отказа от придания координатам физического (метрического) смысла и признания равноправности «произвольных» систем координат: «Постулат относительности в его наиболее общей форме, которая лишает пространственно-временные координаты физического смысла, приводит с железной необходимостью к вполне определенной теории тяготения, объясняющей движение перигелия Меркурия» [т. 1, с. 451].

Отсюда видно, какой трудный путь пришлось пройти Эйнштейну [27г, д]: вначале успех пришел в результате придания конкретного физического смысла координатам сопоставлением с определенной процедурой измерения, а через десять лет успех новой теории оказался связанным с отказом от какого-либо физического смысла координат и от сопоставления с какой-либо процедурой измерения. Координатам оставлялась «лишь» роль описания «непрерывности» пространства-времени:

«координаты выражают только порядок или степень «близости», а следовательно, и размерность пространства, но не выражают никаких его метрических свойств» [т. 2, с. 755].

Итак, с одной стороны, координаты утрачивают физический смысл, но, с другой стороны, оказывается, что координаты описывают понятие близости, т. е. топологию, и одно из самых фундаментальных свойств пространства — его размерность. Несмотря на свое отношение к координатам, Эйнштейн именно с координатами связывал локальную топологическую структуру пространства-времени. При этом обнаруживается своеобразный логический круг: близость точек, непрерывность (т. е. топологическая структура пространства-времени) описывается координатами, но сами координаты должны вводиться с учетом непрерывности пространства-времени (при современном строгом изложении ОТО этот круг разрывается постулированием определенной топологии [135]).

Но что же такое координаты? Эйнштейн, освободив координаты от физического смысла, не дает в рамках ОТО никакого конструктивного способа наделить точки пространства-времени координатами, т. е. ввести систему координат, или провести *арифметизацию* физического пространства-времени [129]. Эйнштейн даже не обсуждал эту проблему в связи с ОТО, хотя и оставлял координатам фундаментальную роль. Впрочем, сам Эйнштейн, по-видимому, не считал эту роль такой уж фундаментальной, говоря, например, что координаты описывают «всего лишь» близость точек.

Как известно, арифметизация пространства-времени — весьма нетривиальная проблема в ОТО [86, с. 32—40; 119б, с. 42—47]. С учетом квантовой теории эта проблема, строго говоря, вообще неразрешима [14б]. А ведь без арифметизации пространства-времени нельзя говорить и об уравнениях Эйнштейна в обычном смысле. Нужно иметь возможность хотя бы одним способом арифметизовать пространство-время; после этого произвольные гладкие преобразования этой одной системы координат дадут «полный набор» допустимых систем координат. Проблема арифметизации связана с очень сложными и не решенными до настоящего времени проблемами описания системы отсчета, наблюдателя и измерений в ОТО. Пока в ОТО не найдена общая процедура построения всех физически измеримых величин в произвольной метрике, и в метриках специального вида (например, в сферически-симметричной метрике Шварцшильда, которая одна по существу и «проверялась» в экспериментах до настоящего времени) строгого обоснования такой процедуры нет.

Возможно Эйнштейн не обсуждал эту проблему потому, что считал невозможным достаточно универсальное, естественное введение координат, так как это уже выделяло бы физически некоторую систему координат или класс систем. А последнее Эйнштейн считал несовместимым с общей ковариантностью, с основными принципами, заложенными в ОТО [т. 1, с. 459].

Если с современной точки зрения взглянуть на трудный путь Эйнштейна от физического смысла координат в СТО к отказу от физического смысла координат в ОТО, то можно увидеть, что на самом деле этот отказ не был так уж необходим для построения ОТО. Если существует хотя бы один физически осмысленный способ введения системы координат (а он должен существовать, как уже указывалось), то он и придает физический смысл вводимым координатам.

В действительности решающим моментом в построении ОТО была геометризация гравитации. Этому соответствовало признание допустимости не *произвольной системы координат*, а *произвольной* (3+1-мерной псевдоримановой) *геометрии*, точнее говоря, установление взаимосвязи между геометрией пространства-времени и состоянием вещества.

Инвариантность «величины» локального интервала ds^2 относительно любых (гладких) преобразований координат включается в само математическое определение римановой геометрии. Но отсюда вовсе не следует, что среди всевозможных систем координат в произвольно искривленном пространстве-времени нельзя указать класс систем координат, имеющих конструктивную геометрическую, а следовательно, и физическую интерпретацию (поскольку в ОТО геометрия физически интерпретирована: геодезические — траектории свободных частиц и т. д.). В действительности таких классов систем координат известно даже несколько: нормальные координаты, оптические координаты, координаты Ферми и т. д. [109].

Укажем несколько способов введения в *произвольное* (псевдо)риманово пространство координат, имеющих инвариантный, метрический смысл, который можно считать и физическим смыслом, хотя такое отождествление отнюдь не тривиально. *Метрическими* естественно называть такие координаты, которые вводятся с помощью внутренней метрической структуры пространства-времени, т. е. с помощью величины $I(P_1, P_2)$, тесно связанного с ней понятия геодезической, локального скалярного произведения векторов и т. п.

а) *I-координаты* [44б,д]. Логически наиболее простая метрическая система координат строится с помощью только двухточечного инварианта $I(P, Q)$. Зафиксировав в пространстве-времени некоторую (базисную) точку b, мы для каждой точки P получаем число $x(P)=I(P, b)$; это — первая координата. В 4-мерном пространстве нужно зафиксировать 4 (базисные) точки $b^0, ..., b^3$, чтобы получить систему координат

$$x_I{}^i(P)=I(P, b^i),\ i=0, ..., 3;$$

базис могут образовать любые четыре точки, находящиеся в общем положении. Систему I-координат характеризует набор значений интервалов между точками базиса $B^{ik}=I(b^i, b^k)$.

б) *Нормальные координаты* [109]. Фиксируется некоторая точка пространства-времени Q и в ней ортонормированный репер, т. е. четыре (в 4-мерном случае) взаимно ортогональных единичных вектора e^i. Пусть $\xi^k(\tau)$ — геодезическая, соединяющая некоторую точку P с Q, и τ — произвольный аффинный параметр, обращающийся в нуль в Q. Точке P сопоставим вектор $u^k(P)=\tau(P)(\partial_\tau \xi^k|_Q)$, определенный в точке Q и инвариантный относительно остающегося произвола в выборе аффинного параметра (для неизотропной геодезической $\tau(P)$ можно считать длиной отрезка геодезической от Q до P). Нормальные координаты точки P образуют скалярные произведения

$$x_N{}^i(P)=u^k(P)e_k{}^i.$$

в) *Координаты Ферми,* порождаемые геодезической [109]. Фиксируется некоторая времениподобная геодезическая C, точка на ней Q и три вектора e^α ($\alpha=1, 2, 3$) в Q, взаимно ортогональные и ортогональные C. Чтобы получить координаты Ферми точки P, находят геодезическую $\xi^k(\tau)$, проходящую через P и ортогонально пересекающую C. Обозначим эту точку пересечения через P_C и параллельно перенесем вдоль C в точку P_C три вектора e^α. Тогда координата $x_F{}^0(P)$ — это длина отрезка геодезической QP_C, а

$$x_F{}^\alpha(P)=\tau(P)(\partial_\tau \xi^k|_{P_C})e^\alpha{}_k,\ \tau(P_C)=0.$$

г) *D-координаты.* Зафиксируем точку Q и четыре геодезических $C(i)$, пересекающиеся ортогонально в точке Q (координатные оси). Опустим из точки P геодезические перпендикуляры на $C(i)$, пусть эти перпендикуляры пересекают $C(i)$ в точках $P_{C(i)}$. D-координатами точки P назовем величины

$$x_D{}^i(P)=I(Q, P_{C(i)}).$$

Каждый из указанных способов построения системы координат осуществим в произвольно искривленном пространстве, поскольку никакие специальные свойства у пространства не предполагались. Разумеется, каждая из приведенных систем координат, вообще говоря, лишь полуглобальна, но набор одинаково устроенных систем координат (привязанных к разным точкам «начала отсчета») может уже покрыть все пространство.

3.3. СИНГУЛЯРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И КООРДИНАТЫ

С координатами Эйнштейн связывал не только понятие размерности, но и еще один важный вопрос — вопрос о сингулярностях в ОТО. Проблема сингулярностей, важная во многих отношениях для ОТО (существование и природа начальной космологической сингулярности, вопрос о конечной стадии эволюции достаточно массивной звезды и т. д.), — это по существу проблема структуры пространства-времени в тех областях, где уравнения Эйнштейна теряют смысл. Вопрос о сингулярностях в решениях уравнений Эйнштейна имеет отношение к проблеме пределов применимости ОТО, а для Эйнштейна — к проблеме сочетания дискретной квантовой структуры вещества и непрерывности поля.

Как мы увидим, проблема сингулярностей — пример того, что отнюдь не всякое несовершенство математической компоненты проходит для физической теории без последствий. Отсутствие в рамках ОТО корректного подхода к сингулярностям (такой подход появился только в 60-х годах) значительно повлияло и на развитие теории гравитации и на самого Эйнштейна.

Несмотря на свое отношение к координатам в ОТО (отказ от их физического смысла), Эйнштейн понимал сингулярность координатным образом, как обращение в ноль или бесконечность компонент метрического тензора и определителя $\sqrt{-g}$ [т. 1, с. 648; т. 2, с. 117, 132]. Уже в первом систематическом изложении ОТО Эйнштейн обращает внимание на координатность такого подхода; и условие $\sqrt{-g}=1$, которое он в этой статье использует (хотя оно исключает даже обычную сферическую систему координат в евклидовом пространстве), только подчеркивает это [т. 1, с. 471].

В заметке 1918 г. Эйнштейн, по-видимому, впервые используя аргументы, связанные с сингулярностями, подвергает сомнению космологическое решение де Ситтера, так как это решение (в координатах де Ситтера) имеет две сингулярности указанного типа. Одна из сингулярностей, как пишет Эйнштейн, устранима преобразованием координат, а другую следует считать истинной, «если не будет доказано противное», т. е. если не будет указано преобразование координат, устраняющее ее [т. 1, с. 647]. Отсюда можно сделать вывод, что Эйнштейн понимал сингулярность пространства-времени как такую сингулярность компонент метрического тензора и определителя, которая не устраняется никаким преобразованием координат. Этим неконструктивным определением по существу нельзя реально пользоваться. Действительно, даже в случае очень симметричного решения следует рассматривать не только преобразования, сохраняющие симметрию (тогда задача была бы обозримой), но и произвольные преобразования.

Тем не менее Эйнштейн использовал аргументы, связанные с сингулярностями. Он отвергает интерпретацию некоторого решения как поля двух неподвижных друг относительно друга тел на том основании, что в этом решении g_{00} обращается в некоторой точке в ноль, и даже не обсуждает устранимость этой «сингулярности» [т. 2, с. 117]. Этот координатный эффект Эйнштейн связывает с физикой (несмотря на свою общую позицию по отношению к координатам), указывая на поведение часов в «сингулярной» точке. Поверхность Шварцшильда (и подобные ей) для Эйнштейна (как, впрочем, и для всех физиков на протяжении четырех десятилетий) сингулярна [т. 2, с. 424; т. 4, с. 224].

Вопрос о сингулярностях был особенно важен для Эйнштейна в связи с его отношением к квантовой теории, ее перспективам и возможностям. В своей последней опубликованной работе он пишет:

«Можно ли думать, что теория поля позволит понять атомистическую квантовую структуру реальности? Почти каждый ответит на этот вопрос «нет». Но я полагаю, что по этому поводу никому не известно ничего достоверного, поскольку мы не знаем, каким образом и в какой степени исключение сингулярностей сокращает множество решений. У нас вообще нет никакого метода для систематического получения решений, свободных от сингулярностей. По этой причине мы не можем в настоящее время сравнивать с опытом содержание нелинейной теории поля. Здесь может помочь только существенный прогресс в математических методах. В настоящее время преобладает мнение, что теорию поля сначала необходимо перевести «квантованием» в статистическую теорию вероятностей, следуя более или менее установленным правилам. Я вижу в этом лишь попытку описывать линейными методами соотношения существенно нелинейного характера» [т. 2, с. 873].

Как стало известно после теорем Хокинга и Пенроуза о сингулярностях [150], желание Эйнштейна отбросить из решений ОТО сингулярные привело бы к тому, что не осталось бы «почти» ни одного решения. Впрочем, эти теоремы имеют дело с уравнениями Эйнштейна в форме, не удовлетворявшей полностью его самого:

«...она [ОТО] похожа на здание, одно крыло которого сделано из изящного мрамора (левая часть уравнений), а другое — из плохого дерева (правая часть уравнений)» [т. 4, с. 217].

Физики столкнулись с сингулярностью уже в первом нетривиальном решении уравнений ОТО — в решении Шварцшильда. Впрочем, то, что на протяжении четырех десятилетий считалось наиболее явной сингулярностью — поверхность Шварцшильда, — оказалось вовсе не сингулярностью пространства-времени. Локальная структура пространства-времени на поверхности Шварцшильда оказалась вполне обычной, ее особые свойства имеют глобальный характер.

Лишь в 60-е годы возник корректный подход к сингулярностям, основанный на изучении структуры пространственно-временного многообразия с помощью геометрически инвариантных объектов, например, с помощью анализа поведения геодезических [38б; 135]. Наибольшие результаты были получены такими методами при определении сингулярности как геодезической неполноты нерасширяемого пространства. Согласно этому определению, точка A является сингулярной, если геодезическая, «натыкающаяся» на эту точку, не может быть продолжена. Такой подход дает возможность не только корректно определить саму сингулярность, но и снабдить ее дополнительной структурой — размерностью сингулярной области [38а].

Чтобы пояснить суть таких конструкций, рассмотрим два многообразия, сделанных из плоскости E^2 с обычной евклидовой геометрией: 1) плоскость, из которой удалена одна точка, и 2) плоскость, из которой удален круг (скажем, радиуса a). Эти два многообразия топологически эквивалентны; в полярных координатах соответствие устроено очень просто: $\varphi'=\varphi$, $r'=r-a$ (это даже диффеоморфизм). Окружность $r=a$ в результате превращается в «точку» $r'=0$, но ни точка, ни окружность сами не являются частями многообразий. Как можно зафиксировать различие размерностей «сингулярных областей» в этих двух случаях, оставаясь в пределах самих многообразий? Будем рассматривать поведение геодезических (в данном случае — прямых) — инвариантных объектов, не зависящих от координатного произвола. Окрестностью данной геодезической назовем всякую совокупность геодезических, полученную из исходной изменением (в некоторых пределах) положения точки, через которую проходит данная геодезическая, и соответствующего направляющего вектора. Теперь, рассматривая геодезические, натыкающиеся на сингулярную область, можно увидеть различие двух указанных выше случаев. В первом (плоскость с удаленной точкой) — окрестности любых двух геодезических, натыкающихся на сингулярность, пересекаются, а во втором (плоскость с удаленным кругом) — имеются такие геодезические, натыкающиеся на сингулярность, у которых некоторые окрестности не пересекаются. На этом пути и вводится структура сингулярности пространства-времени.

Инвариантный подход является по существу чисто геометрическим, хотя и был создан физиками или по крайней мере для нужд физики — для теории пространства-времени и гравитации. Только необычностью методов дифференциальной геометрии для физики можно объяснить живучесть старых координатных представлений.

Проиллюстрируем ограниченность координатного представления на примере проблемы коллапса в скалярно-тензорной теории гравитации (СТТ) — еще недавно самом обсуждаемом обобщении ОТО. Заодно мы сможем убедиться, что инвариантные методы полезны и для физических целей.

В конце 60-х годов возникло мнение, что в СТТ (в отличие от ОТО) могут существовать сколь угодно массивные и плотные статические тела. Это утверждение основывалось на статическом сферически-симметричном решении уравнений СТТ в определенных координатах, в которых компонента метрики g_{rr} обращается в ноль при $r=0$ (т. е., казалось бы, в центре), но эта особенность объявлялась несущественной, поскольку давление и плотность вещества при $r=0$ остаются конечными *. Однако исследование сингулярной области инвариантными методами показывает, что «точка» $r=0$ является на самом деле $2+1$-мерной поверхностью [44а]. Модель звезды с таким «неточечным» сингулярным центром, конечно, физически бессмыслена.

Инвариантные методы пока не образовали вполне законченную систему. Одна из проблем — выбор среди нескольких возможных инвариантных определений сингулярности [38б]. Можно было бы назвать сингулярным нерасширяемое пространство, если оно геодезически неполно хотя бы для одной геодезической, но физически интерпретируема, по-видимому, только свето- и времени-подобная неполнота. Тем не менее прогресс, связанный с инвариантными методами, общепризнан, и наиболее яркое его проявление — теоремы о неизбежности сингулярностей в классической ОТО, имеющие особое значение для космологии [38б; 150].

Инвариантный подход к изучению структуры пространства-времени в ОТО сменил неопределенные координатные представления. Но следует помнить, что сама неопределенность координатных представлений тесно связана с постулатом о принципиальном равноправии *произвольных* (гладких) координат. «Произвольность» координат — это, конечно, необходимый элемент математического понятия многообразия, лежащего в основе ОТО. Но с физической точки зрения «произвольная» система координат — объект, для построения которого не дается никаких физических интерпретируемых правил, — совершенно эфемерна. С помощью «произвольной» системы координат, никак не связанной с метрической структурой пространства-времени, разумеется, нельзя судить об этой структуре.

Однако если система координат сама строится с помощью метрической структуры пространства-времени (а таких способов, как уже говорилось в § 3.2, известно несколько), то можно рассчитывать, что эта система координат окажется полезной для непосредственно координатной характеристики структуры пространства-времени и, в частности, его сингулярностей.

Такой координатно-метрический подход был бы особенно уместен в связи с упомянутой выше неоднозначностью определений сингулярности, основанных на понятии геодезической полноты. Для риманова многообразия с дефинитной метрикой имеется естественное и однозначное понятие *метрической полноты:* пространство метрически полно, если любая последовательность точек в нем $\{p_i\}$ сходится к некоторой точке, лишь только выполнено условие, что расстояние между точками последовательности $\rho(p_N, p_{N+m})$ для достаточно большого N и произвольного m становится меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$. На псевдоримановом многообразие с индефинитной метрикой — интервалом — такое определение прямо перенести нельзя (последовательность точек на одном световом луче может вовсе не сходиться, хотя интервалы между любыми точками этой последовательности равны нулю). Однако с помощью метрических координат можно и в псевдоримановом пространстве ввести понятие метрической полноты.

Воспользуемся, например, введенными в § 3.2 I-координатами, непосредственно связанными с метрической структурой (псевдориманова) пространства-времени. Последовательность точек $\{P_i\}$, $i=1, ..., \infty$, в пространстве-времени R^n назовем фундаментальной, если хотя бы для одного базиса $\{b^r\}$, $r=1, ..., n$, все n

* См., например, Саакян Г. С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. — М.: Наука, 1972.

последовательностей $I_i^r = I(b^r, P_i)$, $r = 1, \ldots, n$, являются фундаментальными последовательностями чисел (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для произвольного m величина $|I^r{}_N - I^r{}_{N+m}| < \varepsilon$). Тогда пространство-время можно назвать *метрически полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится к некоторой точке.

После того как была доказана неизбежность сингулярного характера космологических моделей, основанных на классической (неквантовой) ОТО, инвариантный подход в общем-то исчерпал свои возможности для физики. Этот подход положил конец надеждам на то, что уже в рамках классической ОТО можно найти решение проблемы начальной сингулярности, например, в виде «отскока» от сингулярности (т. е. регулярного минимума в зависимости масштабного фактора от времени). Надежды на то, что микроскопическое, квантовое устройство гравитационного взаимодействия не существенно для космологии, казалось, имеют основание: ведь Вселенная — это «наиболее» макроскопический объект, существующий во Вселенной. Однако инвариантный подход в рамках классической ОТО, изнутри неквантовой теории пространства-времени, показал ограниченность существующих представлений о пространстве-времени. В результате еще более укрепилась уверенность в том, что космология требует квантового обобщения ОТО. Впрочем, как мы увидим в гл. 5, сингулярности в классической ОТО — это не единственный и физически не самый убедительный довод, говорящий о необходимости квантового обобщения ОТО, о необходимости синтеза квантовых и общерелятивистских идей в физической теории пространства-времени.

В § 3.1—3.3 анализировались представления Эйнштейна о топологии, координатах и сингулярностях в ОТО. Эти представления, как мы видели, нельзя считать корректными с современной точки зрения. В связи с этим возникает общий вопрос, касающийся взаимоотношения математики и физики: сказалось ли математическое несовершенство эйнштейновской формы ОТО на физической биографии этой теории?

С одной стороны, уже сама идея геометризации гравитации и почти следующие из этой идеи уравнения Эйнштейна привели не только к уровню теории, вполне достаточному для ее функционирования, но и к тому, что ОТО стала одним из важнейших элементов современной физической картины мира.

С другой стороны, математическая незавершенность теории все же не прошла бесследно. Не только много сил было отдано обсуждению некорректного понятия сингулярности, важного для самой ОТО. В известной степени отношение Эйнштейна к квантовой теории и его полное переключение на программу теоретико-полевого описания реальности были связаны с математической незавершенностью ОТО. Действительно, неприятие Эйнштейном квантовой программы, чрезвычайно поучительное с точки зрения истории физики и психологии научного творчества, хотя и имело, возможно, вненаучное происхождение [44з], но опиралось и на определенный позитивный идеал физической теории. Этот идеал был связан для Эйнштейна с такими особенностями, как сильный детерминизм, существенно нелинейный характер теории пространства-времени, выводимость уравнений движения из уравнений поля, а также возможность использовать понятие сингулярности для описания дискретной, квантовой природы реальности (например, с помощью принципа отбора несингулярных решений [т. 2, с. 425, 873]). Можно предположить, что если бы Эйнштейну стал известен корректный подход к сингулярностям в ОТО и, в частности, теоремы о неизбежности сингулярностей в классической ОТО, то это могло бы подорвать его конкретный идеал и тем самым, возможно, побудило бы обратить большее внимание на квантовую программу.

3.4. ЭЙНШТЕЙН И ЧЕТЫРЕХМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

Представление Эйнштейна о физическом пространстве-времени соответствует математическому понятию многообразия, но не более общим структурам. При математически строгом современном изложении ОТО пространство-время считается именно многообразием с заданными на нем дополнительными структурами [135]. Размерность многообразия в некотором смысле тривиально связана с размерностью евклидова пространства E^n. Локально многообразие «устроено» в точности как E^n — у каждой точки многообразия есть окрестность, топологически эквивалентная E^n.

Подход Эйнштейна к размерности можно описать так: существует «эталон» n-мерности — E^n (напомним, что «существование» такого эталона было математически обосновано Брауэром лишь в 1911 г.), и, устанавливая определенную связь с этим эталоном, можно говорить о размерности пространства вообще. Это не самый общий мыслимый подход к размерности пространства, но нужно помнить, что даже в математике более общий подход к размерности по-настоящему был создан Урысоном и Менгером лишь в 1922—1923 гг., т. е. через семь лет после завершения ОТО и спустя несколько лет после ее экспериментального подтверждения.

Для Эйнштейна утверждение о 3-мерности пространства или 4-мерности пространства-времени означает возможность установить связь между E^3 (E^4) и пространством (пространством-временем) таким образом, чтобы эта связь была взаимно-однозначной и взаимно-непрерывной. Таких в точности слов у Эйнштейна нет, он даже приводил иногда «небрежное» определение и говорил о непрерывности только в одну сторону [т. 1, с. 558], но все же есть у него определение, которое после некоторого уточнения можно привести к математически корректному виду:

«Я не стану подробно останавливаться на свойствах пространства отсчета, которые приводят нас к пониманию точки как элемента пространства, а пространства — как континуума. Я не буду также пытаться глубже анализировать те свойства пространства, которые оправдывают представление о непрерывных последовательностях точек, или линиях. Если считать эти понятия и их связь с существующими твердыми телами заданными, то легко выразить, что мы понимаем под трехмерностью пространства. Каждой точке можно поставить в соответствие три числа x_1, x_2, x_3 (координаты) таким образом, чтобы это соответствие было взаимнооднозначным, и x_1, x_2 и x_3 менялись бы непрерывно, когда точка пробегает непрерывную последовательность точек (линию)» [т. 2, с. 7].

Таким образом, Эйнштейн предполагает существующим свойство близости, соседства точек в пространстве.

Что же физически означает для Эйнштейна, во-первых, существующая в пространстве топологическая структура (близость, соседство точек) и, во-вторых, специальный тип этой структуры, допускающий установление достаточно «хорошего» соответствия (локального гомеоморфизма) с E^4? Другими словами, что означает физически 4-мерность пространства-времени?

В работах Эйнштейна нет ответов на эти вопросы. Можно только понять, что он считает 4-мерность фундаментальным свойством и считает ее неотделимо связанной с «непрерывностью» пространства, с тем, что пространство-время есть «континуум» (см. § 3.5).

Фундаментальное значение, которое Эйнштейн придавал 4-мерности, проявилось также в его отношении к квантовой теории. Как известно, он не считал квантовую механику окончательной и фундаментальной теорией. Он неоднократно подчеркивал, что не может подкрепить свою позицию точными логическими аргументами, что опирается на «чутье», на «инстинкт физика». Однако один аргумент против окончательности квантового описания Эйнштейн все же использовал. И этот аргумент связан с размерностью пространства. В 1933 г. он пишет: «Но, к сожалению, оно [статистическое толкование квантовой механики] вынуждает нас использовать континуум, размерность которого не является размерностью пространства, применяемого в физике до сих пор (а именно: четырехмерного); размерность этого континуума неограниченно возрастает вместе с ростом числа частиц, составляющих рассматриваемую систему. Не могу не признаться в том, что я придавал этой интерпретации только преходящее значение» [т. 4, с. 185]*.

---

* Отношение Эйнштейна к квантовой теории, как уже говорилось (§ 3.3), отнюдь не исчерпывается этим соображением.

Такая ситуация волновала не только Эйнштейна. В 1932 г. Эренфест указал на «глубокий конфликт» квантовой механики с фундаментальным представлением о том, что «прямая первичная взаимосвязь осуществляется в природе только между такими величинами, описывающими состояние, которые принадлежат к бесконечно близко расположенным точкам t, x, y, z. Шредингеровское уравнение для двух электронов, напротив, требует взаимосвязи величин в бесконечно малой области t, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2-континуума, в которой $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ может быть равно любому количеству километров. Мы должны все время помнить о том, какой необычной теорией дальнодействия является волновая теория Шредингера, если мы хотим сохранить свою приверженность к четырехмерной теории близкодействия» [142д, с. 173].

На статью Эренфеста ответил Паули, также выразивший неудовлетворенность состоянием теории, может быть даже более глубокую, так как включал в нее проблему собственной энергии. Однако Паули перенес ударение с $3n$-мерного пространства на «странное отделение пространства от времени», т. е. на нерелятивистский характер уравнения Шредингера (релятивистская теория — это обязательно близкодействие, так как в теории обеспечена конечная скорость распространения взаимодействий). Тем самым неудовлетворенность дальнодействием в квантовой механике приняла форму четко поставленной проблемы: построить релятивистскую квантовую теорию. Однако Паули считал возможным «получить удовлетворительное решение только при модификации теперешнего понятия пространства-времени» и отмечал, что эта модификация «преобразовала бы также и понятия «дальнодействие» и «близкодействие», поскольку они существенно основываются на понятии обычного пространства-времени» [91г, т. 2, с. 193].

Отношение Эйнштейна к факту 4-мерности пространства-времени проявилась и в связи с 5-мерными теориями, оттолкнув в конце концов его от этого направления, потому что пятимерным теориям не удавалось объяснить, «почему континуум очевидным образом ограничен четырьмя измерениями» [т. 2, с. 872] (подробнее см. [44г]).

Нет свидетельств, что Эйнштейн пытался осознать 4-мерность пространства-времени на более конструктивном физическом уровне. Он мог, конечно, считать, что о 4-мерности пространства-времени свидетельствует успех физической теории, основанной на таком представлении. В подобном духе он высказывался неоднократно, рассматривая результативность теории как важный фактор, например: «Только успех может служить оправданием такой попытки приписать физическую реальность основным понятиям римановой геометрии вне области их физического определения» [т. 2, с. 88]. Но, с другой стороны, для Эйнштейна не характерно ограничиться таким неконструктивным ответом. Здесь уместно вспомнить отношение Эйнштейна к квантовой теории, игнорирующее ее огромные практические успехи.

Невнимание Эйнштейна к проблеме размерности пространства тем более странно, что попытку «расшифровать», перевести на язык физики факт 3-мерности пространства, попытку, глубокую по своему смыслу и по существу первую в истории физики, предпринял в 1917 г. Эренфест (см. гл. 4) — один из самых близких в то время Эйнштейну людей. Не удается найти каких-либо свидетельств того, знал ли Эйнштейн об этой попытке; если не знал, то почему, а если знал, то почему не обратил на нее внимание. Эта ситуация кажется особенно загадочной, так как Эйнштейн с его повышенным вниманием к физическому осмыслению пространственно-временных понятий должен был бы обратить внимание на эту попытку физически осмыслить фундаментальное понятие размерности пространства *.

В связи с этим отметим, что в первом издании книги М. Джэммера «Концепции пространства» (1954 г.), предисловие к которой написал Эйнштейн, не упоминаются работы Эренфеста, хотя в книге рассматривается вопрос о размерности пространства и с математической точки зрения (определения), и с физической (попытки обоснования 3+1-мерности пространства-времени). Только во втором издании этой книги (1969 г.) появляется упоминание о работах Эренфеста: «В последние годы проблема размерности пространства и, в особенности, вопрос, насколько в современной физике необходимо предположение о трехмерном пространстве или четырехмерном пространстве-времени, вновь заняли заметное положение. Некоторые из этих исследований разрабатывают аргументы Эренфеста 1917 и 1920 гг., которые в то время привлекли незначительное внимание» [51, р. 205].

В предисловии к книге Джэммера (самом большом из предисловий к книгам современников) Эйнштейн, высоко оценивая саму книгу, рассматривает историю понятия пространства как историю развития, противоборства и взаимодействия двух концепций: аб-

* В высказывании Эйнштейна: «Я не буду здесь рассматривать, как понятия трехмерности и «евклидовости» пространства могут быть прослежены в сравнительно простых опытах» [т. 2, с. 746], судя по контексту и по предполагаемому (невысокому) физико-математическому уровню читателя имеются в виду действительно простые эксперименты, регистрирующие трехмерность пространства в *макроскопическом*, обыденном опыте. Речь идет, например, о возможности провести из одной точки только три взаимно перпендикулярные линии (реализованные в виде натянутых нитей или световых лучей), или же о необходимости именно трех недеформируемых стержней, закрепленных шарнирно, чтобы зафиксировать положение точки.

Такие эксперименты действительно просты и в общем-то излишни, чего никак нельзя сказать о том эмпирическом, физическом обосновании размерности, которое содержится в работе Эренфеста (см. гл. 4). Это обоснование главным образом направлено на *немакроскопический* диапазон физических явлений.

солютное пространство и «пространство как свойство материальных объектов». Эйнштейн считает неизбежным и исторически оправданным как длительное царствование первой концепции, так и победу второй. Эту победу концепции относительного пространства он связывает с введением понятия поля и заканчивает предисловие словами, имеющими прямое отношение к проблеме размерности пространства: «...вся физическая реальность может быть представлена в виде поля, компоненты которого зависят от четырех пространственно-временных параметров... . Пространственный характер физической реальности обуславливается в этом случае четырёхмерностью поля. В этом случае «пустого» пространства, т. е. пространства без поля, не существует» [т. 4, с. 347]. Эйнштейн не уточняет выражение «четырехмерность поля», но по сути дела здесь он выделяет четырехмерность как важнейшее свойство пространства-времени и пытается связать это свойство с физикой или даже свести его к физике.

3.5. ДИСКРЕТНОСТЬ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В ОТО

Представление Эйнштейна о размерности было очень тесно связано с его представлением о пространстве-времени как о континууме. Неразделимость понятий размерности и непрерывности была присуща, как мы видели, и взглядам Пуанкаре. Эта неразделимость означает по существу чисто топологический подход к размерности, хотя понятия «непрерывность пространства» и «континуум», употреблявшиеся, в частности, Эйнштейном, не имеют в топологии вполне определенного, однозначного воплощения.

Вот как поясняет понятие «континуум» сам Эйнштейн: «Я могу перейти от какой-либо точки поверхности к любой другой точке, переходя большое число раз к «соседним» точкам, или, другими словами, переходя от точки к точке без «скачков». Читатель, по-видимому, достаточно ясно понимает (если только он не очень придирчив), что означают здесь понятия «соседний» и «скачки». Эту же мысль мы выражаем, утверждая, что поверхность представляет собою континуум» [т. 1, с. 571]*. Но даже если

* Эти слова Эйнштейна взяты из «общедоступного изложения» теории относительности, предназначавшегося читателям, «не владеющим математическим аппаратом теоретической физики» [т. 1, с. 530]. Однако в «серьезных» работах Эйнштейн не излагает сколько-нибудь подробно свои представления о топологических свойствах пространства и его размерности; например, в основной работе 1916 г., которую он рекомендует для «математического» знакомства с ОТО [т. 1, с. 530], Эйнштейн ограничивается всего лишь примечанием: «Мы не будем здесь касаться некоторых ограничений, вытекающих из требования однозначности и непрерывности» [т. 1, с. 459].

быть не очень придирчивым, трудно счесть это описание точным. Не ясно, например, можно ли считать континуумом множество $E^{n(\mathrm{rat})}$ (множество точек в E^n, все координаты которых — рациональные числа) или $\bar{E}^{n(\mathrm{rat})}$ (состоящее из точек всех прямых, проходящих через какие-нибудь две точки $E^{n(\mathrm{rat})}$). Ведь и в «пространствах» $E^{n(\mathrm{rat})}$, $\bar{E}^{n(\mathrm{rat})}$ можно переходить от точки к точке так же без скачков (вернее, сколь угодно малыми скачками, точно так же, как в E^n). Для Эйнштейна понятие «непрерывности» пространства, «континуума» не вызывали потребности глубже их анализировать, хотя эти понятия не легче признать физически тривиальными, чем, например, понятие «абсолютной одновременности».

Высказывания Эйнштейна, приведенные в предыдущих параграфах, также свидетельствуют о прочной связи его представления о размерности с представлением о непрерывности пространства-времени. Однако Эйнштейн как физик (точнее говоря, как великий физик) не мог себе позволить «слишком прочную» связь понятий (о вынужденном «эклектизме», или, лучше сказать, «плюрализме» естествоиспытателя он писал в [т. 4, с. 310]).

Характерная общая черта методологии Эйнштейна — скептицизм к установившимся представлениям, стремление к анализу их реального физического статуса, антиаприоризм. В особенности это относится к пространственно-временным понятиям:

«Что является априори несомненным, или необходимым, соответственно в геометрии (доктрина пространства) или в ее основаниях? Прежде мы думали — все, теперь мы думаем — ничто. Уже понятие «отрезок» является логически произвольным: вовсе не обязаны существовать вещи, соответствующие ему даже приближенно. Аналогичное замечание можно сделать о понятиях прямой, плоскости, о трехмерности пространства и о справедливости теоремы Пифагора. Даже доктрина континуума никоим образом не дана нам в природе человеческого мышления, так что с точки зрения теории познания чисто топологическим соотношениям нельзя придавать большего значения, чем другим соотношениям» [т. 2, с. 238].

Реальные причины для сомнений в «доктрине континуума» давала квантовая физика: «... введение пространственно-временного континуума может считаться противоестественным, если иметь в виду молекулярную структуру всего происходящего в микромире. Утверждают, что успех метода Гейзенберга может быть приведен к чисто алгебраическому методу описания природы, т. е. исключению из физики непрерывных функций. Но тогда нужно будет в принципе отказаться от пространственно-временного континуума. Можно думать, что человеческая изобретательность в конце концов найдет методы, которые позволят следовать этому пути. Но в настоящее время такая программа смахивает на попытку дышать в безвоздушном пространстве» [т. 4, с. 223]; «Можно убедительно доказать, что реальность вообще не может быть представлена непрерывным полем. Из квантовых явлений, по-видимому, следует, что конечная система с конечной энергией может полностью описываться конечным набором чисел (квантовых чисел). Это, кажется, нельзя совместить с теорией континуума и требует для описания реальности чисто алгебраической теории. Однако сейчас никто не знает, как найти основу для такой теории» [т. 2, с. 873].

Особенно выразительно Эйнштейн описал свою позицию в связи со статьей К. Менгера [1949], поставившего под сомнение представления о физическом пространстве как о континууме:

«Для построения современной теории относительности существенно следующее:

1. Физические объекты описываются непрерывными функциями — параметрами поля, зависящими от четырех координат. Если топологическая связность сохраняется, то выбор этих координат произволен.

2. Переменные поля являются компонентами тензора. Среди этих тензоров имеется симметрический тензор g_{ik} для описания гравитационного поля.

... Рассматривая квантовые явления, мы начинаем подозревать, что могут появиться сомнения в окончательной целесообразности программы, коротко характеризуемой предложениями (1) и (2). Можно усомниться только в предположении (2) и, таким образом, поставить вопрос о том, нельзя ли адекватно сформулировать законы с помощью дифференциальных уравнений, не отбрасывая утверждения (1). Мне кажется (думаю, что мою точку зрения разделяет и д-р Менгер), что еще проще предпринять более радикальную попытку и отказаться от предположений (1) и (2). Пока нет новых понятий, обладающих достаточной созидательной силой, приходится довольствоваться одними лишь сомнениями. Таково, к сожалению, мое положение. Я придерживаюсь представлений о континууме не потому, что исхожу из некоторого предрассудка, а потому, что не могу придумать ничего такого, что могло бы органически заменить эти представления. Каким образом следует сохранить наиболее существенные черты четырехмерности (хотя бы в некотором приближении), если отказаться от представлений о непрерывности?» [т. 4, с. 312].

Эйнштейну не удалось найти «органическую замену» представлениям о непрерывном пространстве-времени (он, по-видимому, и не искал по-настоящему, считая не пройденным до конца путь геометризованной единой теории, основанной на непрерывности и строгой причинности). Не удалось построить физическую теорию, воплощающую гипотезу дискретного пространства или более общую идею фундаментальной длины, и многим другим физикам, видевшим физическую ограниченность непрерывной модели пространства-времени (см. гл. 5, 7 и [14, 31, 61а]).

Мы не будем говорить обо всей в целом проблеме фундаментальной длины, а ограничимся тем ее аспектом, который соответствует вопросу Эйнштейна:

«Каким образом следует сохранить наиболее существенные черты четырехмерности (хотя бы в некотором приближении), если отказать от представлений о непрерывности?»

Этот вопрос можно воспринимать как постановку задачи перед математикой и теоретической физикой: научиться описывать дискретные структуры, о которых, тем не менее, можно было бы говорить как о четырехмерных в определенном смысле. По существу речь идет о том, чтобы ввести понятие размерности не на топологическом языке.

Чтобы обсудить возможность решения этой задачи, вернемся к уже введенным «почти» непрерывным моделям пространства $E^{3(\mathrm{rat})}$ (множество всех таких точек E^3, у которых координаты — рациональные числа) и $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$ (множество всех точек E^3, расположенных хотя бы на одной прямой, проходящей через две точки $E^{3(\mathrm{rat})}$. Введем еще в рассмотрение заведомо дискретные модели пространства: $D_0^3(a)$ — множество точек E^3, образующих кубическую решетку с шагом a; аналогично, $D_1^3(a)$ и $D_2^3(a)$ множества параллельных прямых и плоскостей E^3, расположенных с шагом a.

Физическая интуиция не может примириться с тем, что в топологическом смысле пространство $E^{3(\mathrm{rat})}$ — нульмерно, $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$ — одномерно, а $D_n^3(a)$ — n-мерно независимо от величины a. С физической точки зрения кажется, что $D_n^3(a)$ при $a \to 0$ должно приближаться по своим свойствам, и в частности по размерности, к E^3; $E^{3(\mathrm{rat})}$ и $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$ кажутся вообще «физически» неотличимыми от E^3.

На каком же языке следует выражать факт четырехмерности пространства-времени?

«Смысл утверждения, что мир имеет четыре измерения, не так ясен, как это может показаться... Когда говорят, что мир имеет четыре изменения, то здесь неявно содержится указание на некоторое соотношение порядка. По-видимому, этим соотношением является интервал, хотя я не имею полной уверенности в том, что достаточно этого одного отношения без некоторого соотношения, соответствующего понятию близости: дело в том, что если интервал между двумя событиями мал, то это не значит еще, что события обязательно близки одно к другому в обычном смысле слова», — это высказывание Эддингтона 1920 г. [140б, с. 185] не только ясно указывает на проблему связи метрической и топологической структур в случае индефинитной метрики. Эддингтон также выдвигает совершенно естественное предположение о том, что факт четырехмерности можно выразить с помощью понятия интервала*. Действительно, основной объект изучения ОТО — метрическая структура пространства-времени. Поэтому вполне естественно, чтобы и размерность пространства-времени была выражена на метрическом языке. Возможно ли это?

Положительный ответ на этот вопрос будет дан в гл. 6 и 7. В седьмой главе этот ответ дается в рамках римановой геометрии ОТО, т. е. в предположении непрерывной структуры пространства-времени; при этом окажется, что выраженная на метрическом языке размерностная структура пространства-времени в ОТО дает новые возможности, в частности, для построения законов сохранения в ОТО. В шестой главе метрический подход к размерности позволит выйти за рамки предположения о непрерывной структуре пространства-времени; введенное там понятие размерности позволит, в частности, удовлетворить ожидания физического здравого смысла в отношении дискретных моделей типа

$\mathrm{E}^{n(\mathrm{rat})}$, $\overline{\mathrm{E}}^{n(\mathrm{rat})}$, $\mathrm{D}_k{}^n(a)$.

Используемый в гл. 6 и 7 метрический подход к размерности реализует параметрическое представление о размерности, но способ параметризации точек пространства ограничивается только метрической формой. Если в пространстве-времени задан интервал $I(P_1, P_2)$, то размерность характеризуется тем, сколько точек необходимо зафиксировать, чтобы положение любой точки можно было определить с помощью задания значений интервала от этой точки до зафиксированных точек.

Параметрический подход к размерности может быть реализован не только на основе идеи метрической зависимости, но и в более общем случае, опираясь только на причинную структуру пространства-времени. Такое обобщение, в частности, может представлять интерес для существующего в математике направления «Аксиоматическая теория относительности» (см., например, обзор [49]). Это направление, особенно продвинутое в работах А. Д. Александрова, стремится выявить минимальный набор аксиом, достаточный для дедуктивного построения теории относительности (прежде всего СТО). Согласно А. Д. Александрову, пространственно-временная структура мира сводится к его причинно-следственной структуре. Такое сведение имеет не только глубокий философский и физический смысл, но также дает осно-

* Внимание Эддингтона к понятию размерности пространства-времени не удивительно, если учесть дальнейшую эволюцию его исследовательской программы, направленной на создание фундаментальной теории, в которой все безразмерные физические константы были бы выводимыми. При этом исходным оказывалось именно число 4 — размерность пространства-времени. В частности, посредством довольно неопределенных рассуждений Эддингтон получал значение постоянной тонкой структуры из размерности пространства-времени: $1/\alpha = {}^1/_2 n^2(n^2+1)+1 = 137$ при $n=4$.

ву для математической аксиоматизации. В качестве первичных понятий берутся понятия «событие» и «область воздействия события», т. е. конусы будущего (можно использовать эквивалентным образом и конусы прошлого). При этом, однако, факт четырехмерности пространства-времени считается топологическим с самого начала. Беря за основу отношение воздействия, или причинного следования, было бы естественно и факт четырехмерности постулировать на таком же причинном языке. Возникает задача «заменить положение о четырехмерности пространства-времени каким-либо постулатом, характеризующим отношение воздействия событий пространства-времени» [49, с. 76]. Если в предложенном метрическом подходе к размерности ограничиться только нулевыми интервалами, нетрудно сформулировать условие, эквивалентное топологической четырехмерности, но выраженное на «причинном» языке: поверхности произвольных четырех конусов (областей воздействия), ни один из которых не лежит целиком в другом, пересекаются в одной точке.

КРАТКИЕ ИТОГИ ГЛАВЫ 3

Представления о пространстве и времени, возникшие в рамках СТО и ОТО, вследствие индефинитного характера метрики радикально меняют соотношение метрических и топологических свойств пространства-времени. Особое значение эта проблема приобретает в ОТО из-за принципиально различного характера координат в СТО (где они операционально определены) и в эйнштейновской форме ОТО (с «произвольностью» координат). Представления Эйнштейна о топологии и координатах содержали логический круг: топология описывается координатами (близость точек соответствует близости координат), а координаты должны вводиться с учетом «непрерывности», топологии пространства. В современной форме ОТО этот круг разрывается постулированием топологии.

Представление Эйнштейна о пространстве-времени соответствует математическому понятию многообразия, и поэтому для него достаточным оказалось параметрическое представление о размерности евклидова пространства E^n как «эталоне» n-мерности. Для Эйнштейна фундаментальное значение имела четырехмерность пространства-времени. Это проявилось, в частности, в его отношении к пятимерной теории поля, а также в одном из немногих «логических» аргументов против фундаментальной квантовой механики.

Развитие квантовой физики привело к сомнениям в обычной непрерывной пространственно-временной картине. В связи с этим Эйнштейн допускал возможность «чисто алгебраического» построения теории, которое сопровождалось бы отказом от непрерывности пространства. Однако понятие размерности для Эйнштейна (так же как для Пуанкаре и для топологии вплоть до наших дней) тесно связана с понятием непрерывности, является специализацией этого понятия. Поэтому возможность отказа от непрерывности пространства-времени Эйнштейн встречает вопросом: как сохранить в этом случае четырехмерность? Это говорит не только о фундаментальном значении четырехмерности для Эйнштейна, но и ставит вполне определенную задачу перед математикой и теоретической физикой — найти подходящий язык для описания размерностной структуры пространства-времени.

Общая литература к главе 3: [1, 27, 39а, 49, 60, 70, 109, 123б, 124, 135]

Глава 4

ФИЗИЧЕСКИЙ СТАТУС ПОНЯТИЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА, ВЫЯВЛЕННЫЙ ЭРЕНФЕСТОМ

4.1. ТРЕХМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА И ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ ФИЗИКИ

Факт трехмерности пространства был хорошо известен (можно сказать, всем) с древнейших времен. Было ясно также, что этот факт характеризует одно из фундаментальных свойств материального, физического мира. Однако, возможно именно из-за своей всеобщей известности и очевидности, в этом факте не видели особого физического содержания. Не было даже отношения к трехмерности пространства как к физическому факту, отношения, предполагающего (так же, как и в случае любого другого физического факта) экспериментальное подтверждение. А поскольку речь шла о факте, имеющем количественное выражение, то надо было говорить даже не просто об экспериментах, а об измерениях.

Впрочем, если иметь в виду только макроскопические явления, то эмпирический характер имело уже наблюдение такого (бытового) типа, что все реальные физические тела имеют длину, ширину и глубину. Нетрудно также предложить более научные формы подобных эмпирических подтверждений: например, упомянутая Галилеем возможность провести только три различные взаимно перпендикулярные (физические) линии к одной (физической) точке, или необходимость и достаточность трех чисел для однозначной фиксации положений точек в пространстве (с помощью конкретно описанной физической процедуры). Поскольку до 20 в. интересы физики ограничивались в основном макроскопическими явлениями (если не считать небесной механики), то «невнимательное» отношение к факту трехмерности можно было считать вполне оправданным.

Однако в начале 20 в. положение существенно изменилось. Физика активно устремилась за пределы области макроскопических явлений: квантовая теория — в микромир, общая теория относительности — в мегамир. Теперь уже, по отношению к новым областям физических явлений, вопрос об эмпирической обоснованности трехмерности не мог быть поставлен и решен так же просто. Впрочем, еще в 19 в., когда атомистическая теория строения вещества входила в физику, Максвелл подчеркивал «макроскопические» корни уверенности в трехмерности:

«Есть люди, которые не могут освободиться от мнения, что всякая материя протяженна в длину, ширину и глубину. Это —

предрассудок..., вытекающий из нашего опыта над телами, состоящими из безмерного множества атомов» [78, с. 125].

Однако мало указать на границы эмпирической обоснованности и экстраполяционный характер утверждения о трехмерности. Надо еще найти способы выяснения размерности пространства при расширении области изучаемых физикой явлений. Эта заслуга принадлежит П. Эренфесту (1880—1933).

В 1917 г. в «Трудах Амстердамской академии» была опубликована статья Эренфеста «Каким образом в фундаментальных законах физики проявляется то, что пространство имеет три измерения?» *. В 1920 г. несколько измененный вариант этой статьи под названием «Какую роль играет трехмерность пространства в фундаментальных законах физики?» появился в «Annalen der Physik».

Эренфест по существу исследовал чувствительность поведения некоторых простых, но вместе с тем фундаментальных физических систем к значению размерности пространства. Он рассмотрел планетарную систему, боровский спектр атома и волновой процесс. В результате он обнаружил такие различия случаев разной размерности, которые сделали возможным прямое сопоставление с наблюдениями и обоснование трехмерности от атомных до астрономических масштабов.

Считая источником физических законов в n-мерном пространстве E^n уравнение Лапласа (или Даламбера) в этом пространстве и ньютоновские законы динамики (к вопросу о «физике» в E^n мы еще вернемся), Эренфест обнаружил следующие различия случаев разной размерности:

1) только в E^3 возможны и устойчивое финитное, и инфинитное движения; в E^2 инфинитное движение невозможно; в E^n при $n>3$ финитное движение неустойчиво;

2) спектр атома в E^n при $n\neq 3$ радикально отличается от трехмерного;

3) только в E^3 возмущение поля распространяется «концентрированно», а само поле определяется плотностью заряда (см. § 3 статьи Эренфеста).

Из введения к статье Эренфеста следует, что сам он не считал вопрос исчерпанным и даже не считал его удовлетворительно поставленным. По существу эренфестовское исследование выявило конкретные основания для уверенности физиков в трехмерности пространства по отношению к достаточно широкому диапазону физических явлений. Но, что более важно, это исследование дало образец физического обоснования размерности пространства при дальнейшем расширении области явлений, изучаемых физикой.

Через два с небольшим года после статьи 1917 г. Эренфест направляет в «Annalen der Physik» сокращенный примерно на треть

---

* Перевод этой статьи помещен в конце книги. В дальнейшем предполагается, что читатель знаком с ее содержанием.

вариант этой статьи, добавив лишь несколько новых замечаний.

В качестве повода для этой публикации он упоминает высказывание Г. Вейля о 4-мерности пространства-времени. Вейль [(1918) 1979] в связи со своим вариантом единой теории поля, в которой электромагнитный вектор-потенциал получил геометрическую интерпретацию, указал на выделенность 4-мерности пространства-времени, связанную с тем, что только в 4-мерном мире действие для электромагнитного поля с «максвелловским» лагранжианом конформно инвариантно. А конформная инвариантность в теории Вейля заменяла обычную ковариантность ОТО.

В статье 1920 г. Эренфест уже не ставит цель выделения сингулярных свойств трехмерной геометрии (впрочем, в статье 1917 г. было указано только одно подобное свойство — «дуализм» вращений и трансляций), а ограничивается физикой. За подробностями он отсылает к статье 1917 г. В заключительных замечаниях он подчеркивает, что размерность пространства проявляется практически во всей физике. С трехмерностью, например, связаны четверка в законе Стефана — Больцмана и тройка в законе Вина.

Прежде чем обсуждать место и роль этой работы Эренфеста в истории физики, вернемся к вопросу о физике в n-мерном пространстве.

4. 2. КАКОЙ ДОЛЖНА БЫТЬ n-МЕРНАЯ ФИЗИКА?

Когда Эренфест выводит n-мерный закон притяжения из n-мерного уравнения Лапласа, он не обосновывает специально такой способ получения n-мерной физики. Однако этот способ вовсе не самоочевиден — Пуанкаре по крайней мере его «не видел» (см. § 2.3).

Что по существу сделал Эренфест? Он рассмотрел совокупность «пространств» E^n, отличающихся одним параметром — размерностью. Конечно, эта совокупность не исчерпывала все геометрические структуры, носящие с большим или меньшим правом название «пространство»; достаточно указать на римановы пространства, уж не говоря об общих метрических и топологических пространствах. Однако совокупность $\{E^n\}$ выгодно выделялась тем, что для каждого пространства из этой совокупности можно было естественно предложить совершенно определенную «физику», по крайней мере ее фундаментальную часть. Действительно, лежащие в основе физики дифференциальные уравнения, будучи записанными в ковариантной форме, легко допускают обобщение с E^3 на E^n. Для этого надо в соответствующих суммах число слагаемых заменить с 3 на n (выражение для радиус-вектора, лапласиан, даламбертиан). Форму фундаментальных уравнений физики «естественно» оставить прежней: уравнения Лапласа и Даламбера (волновое уравнение), «законы Ньютона», квантовый постулат Бора.

В обычной сейчас вариационной форме задания фундаментальных физических законов такое обобщение можно осуществить еще проще. Рассмотрим, например, простейший случай действия для скалярного безмассового поля $\mathcal{A} = \int L d\Omega$ с лагранжианом

$$L = \varphi_{,k}\varphi^{,k}, \quad \text{где } \varphi_{,k} \equiv \partial\varphi/\partial x^k.$$

Ясно, что размерность пространства учитывается в этом выражении только в множестве значений, которые принимает k (в 3+1-мерном случае $k=0, 1, 2, 3$). Таким образом, приведенное выражение для действия позволяет получить соответствующую часть физики (физику скалярного безмассового поля) в пространстве любой размерности, точнее говоря, в евклидовом (а при общековариантном понимании квадрата градиента и в римановом) пространстве любой размерности.

По существу так и поступил Эренфест, взяв за основу физики уравнение Пуассона или Даламбера, математически эквивалентное вариационному принципу с описанным выше действием (и с естественным обобщением на другие поля). Здесь на первый взгляд возможно возражение, что такая процедура — просто «линейная» экстраполяция, что с тем же правом можно представить себе общий лагранжиан в виде, например,

$$\widetilde{L} = (\varphi_{,k}\varphi^{,k})^{N-3} + (N-4)\,\varphi_{,ik}\varphi^{,ik}$$

(где N — размерность пространства-времени), также переходящий в обычный лангражиан в случае 4-мерного пространства-времени.

В ответ на это (такого ответа, впрочем, нет у Эренфеста) следует заметить, что Эренфест не просто придумывал какую-то физику в каком-то пространстве — такая «физика» действительно могла бы быть совершенно произвольной. Проблема ставится иначе. Надо выяснить, на чем основана уверенность физиков в том, что реальное физическое пространство, действительно трехмерно, т. е. что *все* множество известных физике явлений (включая атомные и астрономические) наилучшим образом описывается с помощью модели пространства E^3. А раз речь идет о совокупности конкретных явлений, возможность выбора лагранжиана, разумеется, сильно ограничена. Такими ограничениями являются известные свойства физических явлений, не требующие для своей формулировки определенного значения размерности пространства. Так, например, известный в электромагнетизме и механике принцип суперпозиции с необходимостью свидетельствует о линейности уравнений (и, стало быть, о квадратичности лагранжиана). Тот факт, что для задания «движения» системы достаточно знать только начальные «положения и скорость» (это относится не только к механике, но и к теории поля), говорит о том, что дифференциальные уравнения, описывающие данную систему, должны быть не выше, чем второго порядка (т. е. в лагранжиан должны входить производные не выше первого порядка). Эти ограничения приводят как раз к «обычному» лагранжиану.

Правда, по поводу этих ограничений можно было бы сказать, что они не могут быть полным и строгим обоснованием вида лагранжиана, так как связаны с определенным диапазоном явлений, ограниченным, в частности, по характерным пространственно-временным масштабам. Однако ограниченность эмпирического базиса в «данный» момент — обычная ситуация для науки.

Важно именно то, что в эту «обычную ситуацию» с помощью статьи Эренфеста оказалось вовлеченным фундаментальное понятие размерности пространства, до этого находившееся по существу в состоянии априорности. В статье Эренфеста нет анализа понятия размерности пространства, нет никаких «метафизических» замечаний об этом понятии. Однако если бы физик захотел ответить на вопрос, что физически означает трехмерность реального пространства, то он должен был бы начать с анализа, подобного эренфестовскому.

Весьма характерно отличие подходов Эренфеста и Пуанкаре (см. § 2.3) к вопросу «физика и размерность». Пуанкаре стремился реализовать свою конвенционалистскую установку, показать физическую равноправность пространств любой размерности и «только удобство» трехмерного пространства. В результате — поверхностный и физически несостоятельный анализ закона всемирного тяготения в предположении отличной от 3 размерности пространства. Исходный и неизменный факт для Пуанкаре — обратная пропорциональность квадрату расстояния в законе тяготения, и переход к пространству другой размерности для него лишь меняет выражение расстояния между телами через координаты. Он не видит, что закон r^{-2} в E^n при $n \neq 3$ несовместим со всей остальной (даже только гравитационной) физикой: с принципом суперпозиции, с эквивалентностью сферического распределения масс и материальной точки с массой, равной полной массе распределения и находящейся в центре, и т. д.

Пуанкаре не учитывал, что физика не может дополнить любую геометрию так, чтобы их комбинация была правильной теорией. Его замечание о том, что на опыте проверяется только сумма «физика+геометрия», правильно, и, следовательно, некоторый конвенциональный элемент всегда существует в физике. Однако сравнение позиций и результатов Эренфеста и Пуанкаре наглядно демонстрирует, что полного конвенционализма на самом деле нет. Еще яснее это было бы видно, если бы Пуанкаре рассмотрел не 4-, а 2- или 1-мерное пространство, как допустимую модель реальности. Какая физика «в сумме» с одномерной геометрией была бы равна «сумме» обычной физики с трехмерной геометрией?

Анализ Эренфеста не основывается на такой предвзятой позиции. И если бы Эренфест обнаружил, допустим, что спектр водорода точнее согласуется с наблюдениями в предположении какой-то отличной от трех размерности, то это могло бы дать ему основание предположить эту другую размерность пространства в атомных масштабах. Конечно, такое предположение потребовало бы ответа на вопрос: «Как согласовать эту «другую» размерность с макроскопически несомненной трехмерностью?» Исследование Эренфеста не затрагивает этот вопрос; тем самым неявно предполагается, что и без конкретной реализации такого согласования рассмотрение имеет смысл.

Историческое значение работы Эренфеста, несложной по своему математическому аппарату, но глубокой по смыслу, состоит в следующем. Поставив вопрос о смысле трехмерности и соотнеся ее с конкретными физическими явлениями, Эренфест тем самым установил границы, в которых трехмерность имеет конкретное физическое обоснование и вне которых она оказывается лишь предположением. В анализе Эренфеста границы сверху определялись масштабами Солнечной системы, а снизу — атомными масштабами. Вне этих границ вопрос оставался открытым. Таким образом, размерность пространства с помощью работы Эренфеста становится физическим понятием.

Ни современники Эренфеста, ни физики последующих десятилетий не увидели подлинного значения его работы. Это связано с тем, что статья Эренфеста безусловно опередила свое время — до сих пор в физике почти не ощущалась жесткость рамок абсолютной трехмерности. Только в недавнее время начали появляться признаки изменения такого положения (см. гл. 6, 8). Однако если перед физикой действительно встанет вопрос об эмпирическом статусе факта трехмерности пространства, тогда необходимо будет вспомнить, что впервые путь к установлению такого эмпирического статуса, путь к расшифровке, переводу понятия трехмерности пространства на язык физики увидел Эренфест.

Анализ Эренфеста был распространен в дальнейшем на риманову * геометрию [115], а боровское квантование было заменено анализом уравнения Шредингера [115, 48].

4.3. ПРЕДПОСЫЛКИ РАБОТЫ ЭРЕНФЕСТА

В историко-научных исследованиях статья Эренфеста о трехмерности пространства до сих пор обходится вниманием. И это

* У Эренфеста есть вообще-то замечания о справедливости его результатов о движении планет при учете неевклидовости геометрии. Ссылаясь на книгу Либмана (1912), он пишет, что учет кривизны пространства в законе гравитации приводит в трехмерном неевклидовом пространстве к замкнутым планетным орбитам в случае эллиптического движения. Как известно, в ОТО ситуация совершенно другая, так как замкнутыми могут быть только круговые орбиты. В данном случае Эренфест под неевклидовой понимает, конечно, риманову геометрию постоянной кривизны, т. е. геометрии Лобачевского и Римана, а не решение Шварцшильда ОТО.

не случайно. На первый взгляд кажется, что и к этой работе относятся слова Эренфеста из его писем, адресованных А. Ф. Иоффе: «...все, что я до сих пор сумел сделать, основывалось на любви к головоломкам, интересе ко всяким парадоксам, а не на стремлении сделать что-либо «значительное»»; «...в отличие от тебя, Ритца, Эйнштейна и даже Дебая, у меня нет главных и солидных идейных направлений, нет «собственной проблемы», а так, только «забавные задачки»...» [142е, с. 115, 120]. В этих словах неоднократно выражавшаяся Эренфестом (и в общем-то необоснованная) неудовлетворенность недостаточной фундаментальностью своих исследований [Френкель, 1977, с. 158].

Однако работа 1917 г. все же не случайна как для общего состояния физики того времени, так и для творчества самого Эренфеста.

Одной из важнейших черт развития физико-математических наук к началу 20 в. стало разрушение господствовавших представлений о евклидовом трехмерном пространстве как единственно возможном математическом описании свойств реального физического пространства. Для этих представлений была характерна априоризация геометрических понятий и отождествление физического пространства с его математической моделью E^3. Однако в связи с созданием неевклидовых геометрий математика 19 в. пришла к пониманию того, что евклидова геометрия — лишь одна из логически возможных геометрических систем. Это достижение математиков популяризовалось и физиками, чувствительными к проблеме эмпирического обоснования физических понятий [103, гл. 11].

Такая атмосфера, ощущение необходимости физически обосновать выбор геометрического описания облегчили путь Эйнштейна к СТО и к ОТО; хотя, разумеется, создание этих теорий было бы невозможно без собственно физических причин. Одним из исходных пунктов для Эйнштейна стал как раз анализ эмпирического, физического статуса ньютоновских пространственных и временных понятий.

В свою очередь революционные изменения в представлениях о пространстве и времени, связанные с теорией относительности, уже через небольшое время после того, как была разрушена «первая линия обороны» классических представлений, привели к чрезвычайно большой готовности «общественного мнения» физиков к новым, еще более глубоким изменениям пространственно-временных представлений. Достаточно вспомнить тогдашнюю необычайную активность в этом направлении: теория Вейля, претендовавшая на геометрическое объединение гравитации и электромагнетизма, поиски других геометризованных теорий поля. Несколько позже появилось предположение, что проблему ядра можно решить только радикальным изменением геометрии [Иваненко, 1932, с. 317]. Очень распространенным было также мнение, что построить релятивистскую квантовую теорию поля нельзя без изменений понятия пространства-времени (см., например, [Паули, 1975 (1933), с. 193]).

Стремление искать новые физические теории на геометрическом пути затронуло и понятие размерности пространства. Пятимерная (точнее выражаясь, 3+1+1-мерная) теория поля несколько десятилетий привлекала внимание теоретиков (включая Эйнштейна и Паули). Это внимание определялось в первую очередь тем, что в пятимерной теории удавалось описать электромагнетизм с помощью геометрической структуры в духе идей ОТО [13а]. Начало пятимерного направления принято связывать с работой Калуцы 1921 г. [5], но еще в 1914 г. известный физик Г. Нордстрем использовал идею пятимерности (вне идей ОТО) [27д, с. 253].

Таким образом, направленность работы Эренфеста можно считать в известном смысле характерной для физики первых десятилетий 20 в.

Работа Эренфеста была неслучайна и в его собственном творчестве. Она вполне соответствовала его вкусам и устремлениям в теоретической физике. Кроме того, в научной биографии Эренфеста удается найти такие эпизоды, которые делают более понятным его обращение к вопросу о размерности пространства.

Понятие размерности пространства еще более фундаментально, чем представления о метрической структуре пространства-времени. Действительно, теория относительности изучает именно метрическую структуру; при этом факт 3+1-мерности пространства-времени принимается в качестве исходного, не подлежащего анализу. Фундаментальность поднятой Эренфестом проблемы вполне соответствовала его устремлениям, которые, однако, скорее можно обнаружить в его письмах, чем в немногословных, четких, лишенных чаще всего «метафизических» замечаний работах. Впрочем, одно замечание такого рода все же можно указать, и оно оказывается связанным любопытным образом с понятием размерности пространства.

В 1911 г. в реферате «Магнитон» Эренфест очень ясно выражает свой вкус, называя истинной физикой внесение порядка в хаос явлений с помощью фундаментальных, «освещающих» идей. В том же реферате Эренфест критически отозвался о встречающихся в курсах физики попытках дать полное определение физики как науки. Он высказал мнение, что подобное определение вообще не может быть полезным из-за непрерывного изменения области явлений, исследуемой физикой. В связи с этим с критикой выступил О. Д. Хвольсон, который, отдав должное самой статье («превосходная статья», «образец ясного и общедоступного изложения сложного современного вопроса»), раздраженно заметил, что определения физики, о которых говорит Эренфест, вообще никогда не существовали.

Ответная статья Эренфеста «Возможно ли определить понятие «физика»?» уже целиком посвящена этому вопросу. Из этой статьи можно узнать, во-первых, что магнитные явления интересны Эренфесту только поскольку они связаны с фундаментальными физическими закономерностями, а не в прикладном, инженерном аспекте. Во-вторых, Эренфест приводит несколько определений физики такого типа, о котором он говорил в предыдущей статье. Очень любопытно одно из них, взятое из «Физического словаря» Полиана (1761 г.):

«Эта наука [физика] имеет предметом тело в его естественном состоянии, т. е. субстанцию длинную, широкую и глубокую. Рассматривать, может ли Всемогущий отнять у тела его длину, ширину и глубину, значит желать остановить развитие физики. Мы верим, что Он это может: однако мы, как физики, воздержимся заниматься таким вопросом. Тело, лишенное своих трех измерений и сохранившее только требование протяженности, было бы скорее объектом метафизики» [94, т. 3, р. 44; 142д, с. 180].

Как видим, в этом определении трехмерность считается самым важным признаком реальности. Не эта ли категоричность, может быть подсознательно, привела к тому, что Эренфест задумался над вопросом размерности пространства?

Сам Эренфест ничего не пишет ни о причинах, которые побудили его заняться исследованием трехмерности пространства, ни о своих предшественниках, или работах, идейно повлиявших на него. Работы, на которые ссылается Эренфест (Бертрана о замкнутости орбины в E^3 в зависимости от вида центрального потенциала; Либмана о неевклидовой геометрии; Лоренца о колебании мембраны; Релея и Адамара о математическом анализе волнового уравнения), вряд ли могли привести к самой постановке проблемы. Работы Адамара посвящены общей математической теории волнового уравнения, и обобщение на E^n в этих работах — лишь естественное математическое обобщение. Более физически изучался вопрос при $n<3$, однако эти случаи рассматривались лишь как «вложенные» в E^3 и соответствующие определенным ограничениям (одномерные волны в телеграфной линии, «двумерные» цилиндрические волны).

Истории науки известна только одна, предшествовавшая работе Эренфеста попытка связать 3-мерность пространства с физикой. Это — гипотеза Канта, о которой уже говорилось в первой главе: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют друг на друга таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния».

Однако нет свидетельств, что это предположение Канта както подействовало на Эренфеста. Кроме того, что в работе Эренфеста нет указаний на такое влияние, следует отметить довольно безразличное отношение Эренфеста к классической философии вообще. Ни в его переписке, ни в статьях (даже не специально научных) почти не встречаются имена философов или какие-либо ссылки на их работы. Исключение составляет, пожалуй, только работы Маха.

И это исключение довольно многозначительное. Дело в том, что в книгах Маха (которые внимательно читал Эренфест [1973, с. 46]) в связи с критическим анализом основных физических представлений активно популяризировались достижения математиков в области неевклидовой и многомерной геометрии (см., напр., [5, с. 73]). Вопрос о размерности пространства не был центральным в работах Маха, но все же у него появился, в частности, вопрос: «Почему пространство трехмерно?». Мах даже предполагал, что в атомной физике вполне возможно обращение к многомерным пространствам. Было бы, может быть, соблазнительным рассматривать работу Эренфеста как конкретный (отрицательный) ответ на это предположение, но прямых оснований для такой гипотезы нет.

Таким образом, можно было бы предположить, что интерес Эренфеста к проблеме размерности пространства не связан с какими-либо внешними влияниями. Однако есть основания считать, что влияние на Эренфеста все же было оказано и, довольно неожиданным образом, влияние со стороны топологии!

Об этом свидетельствует письмо Эренфеста к Иоффе от 4 ноября 1912 г. Эренфест всего за несколько недель до этого приехал из России в Голландию по приглашению Лоренца для того, чтобы занять его кафедру в Лейденском университете [128б, с. 57—63]. Первые недели Эренфеста в Голландии были заняты, кроме устройства на новом месте, официальными визитами и знакомствами с голландскими учеными:

«Пятница — визит с выражением благодарности Ван-дер-Ваальсу (попечитель университета) — старенький человек (далеко за 70) и, кажется, более ничего. Потом Ваальс младший — около 40—45 лет. Гм...да. С ним помчался к *Брауэру*, приват-доценту математики в Амстердаме — сейчас единственному математику в Голландии, — довольно молод — Геттинген — аксиоматика, теория функций, теория множеств. ... В общем это человек, с которым мне надо *основательно* познакомиться. Все, включая Лоренца, говорят с особой весомостью о его выдающейся одаренности» [Эренфест, 1973, с. 98] (перевод уточнен по оригиналу [9], см. также [126]).

Л. Брауэр, как известно, сыграл чрезвычайно важную роль в топологии, в частности, в теории размерности, причем годами его наибольшей активности в этом направлении были именно 1911—1913 гг. Брауэр находился под влиянием А. Пуанкаре. Это влияние проявлялось и в отношении философии математики (идеи Пуанкаре стимулировали построение Брауэром интуиционистской программы) и, что особенно существенно, в связи с проблемой топологического определения размерности. В 1911 г. Брауэр доказал топологическую неэквивалентность E^n с разными n, в 1913 г. воплотил в корректное математическое определение принадлежащую Пуанкаре идею индуктивного топологического определения размерности (см. § 2.2).

И вот как раз в период между этими двумя замечательными результатами Брауэра в топологической теории размерности с ним знакомится Эренфест. Можно предположить, что предметом их беседы была, в частности, занимавшая тогда Брауэра проблема размерности пространства, возможно и с участием других близких (и больше связанных с физикой) идей Пуанкаре, наверняка известных Брауэру.

Таким образом, импульс для размышлений Эренфеста над понятием размерности пространства мог прийти от топологии с помощью Л. Брауэра (и тем самым и А. Пуанкаре).

Но пять лет — не слишком ли большой интервал между начальным импульсом и публикацией работы? Ответ на этот вопрос может дать запись Эренфеста от 4 августа 1912 г. в записной книжке:

«Всякий вопрос, на который ты натыкаешься при размышлении или во время чтения или, наконец, в разговоре, надо кратко и четко зафиксировать. Время от времени подобные вопросы следует просматривать, стараясь их как-то систематизировать. Прежде всего, приятно сознавать, что ты сумел разрешить некоторые из них, хотя первоначально едва лишь смог их сформулировать, — не говоря о том, чтобы разработать! Во-вторых, мы тем самым учимся нечто туманное и неясное превращать в четко сформулированные вопросы. А это исключительно важно, это — полпути к решению: замечание столь же справедливое, сколь и тривиальное. В-третьих, попадая в круг высокообразованных собеседников, ты располагаешь массой вопросов, уже четко тобой сформулированных и очерченных. Нет более прямого пути, чтобы раскрыть саму их — этих вопросов — сущность! Ничего нет более досадного, чем ощущение: вот бог представил мне возможность встретиться с выдающимся человеком, а я молча сидел перед ним, разинув рот. О скольких вещах я мог бы его спросить — но никаких конкретных вопросов у меня не было! Итак, для меня несомненно, что главное заключается в том, чтобы выработать у себя привычку туманные неясности перерабатывать в четкие вопросы» (цит. по [128б, с. 44]).

Зафиксированные в этой записи особенности методологии научного творчества Эренфеста делают вполне объяснимым пятилетний интервал. Столько времени могло понадобиться для эволюции от «туманной неясности» до «четкого вопроса».

4.4. РАБОТА ЭРЕНФЕСТА О ТРЕХМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА И ЭЙНШТЕЙН

Несмотря на фундаментальное значение, которое Эйнштейн придавал факту трехмерности пространства (или четырехмерности пространства-времени) в его работах не ощущается стремление конструктивно, на физическом языке осмыслить факт трехмерности пространства, другими словами, выявить конкретные физические основания для утверждения о трехмерности пространства. Еще более странным кажется отсутствие в его работах какого-либо упоминания о попытке такого рода, сделанной Эренфестом.

Действительно, Эренфест — один из самых близких Эйнштейну людей; это относится и к 1917—1920 гг., когда Эренфест послал в печать свои статьи о трехмерности. В октябре 1919 г., всего через два месяца после того как Эренфест отправил вторую статью в журнал, Эйнштейн приезжает в Лейден и проводит несколько дней в доме Эренфестов [128б, с. 97]. В дальнейшем Эйнштейн неоднократно бывал у Эренфеста, и эти посещения всегда сопровождались обсуждениями и конкретных физических проблем, и общей ситуации в физике. С кем Эренфесту стоило обсудить проблему размерности пространства, как не с Эйнштейном, интересы которого почти целиком сосредотачивались на свойствах пространства-времени? Вспомним еще особенности эренфестовской «методологии» научного общения (см. предыдущий параграф): фиксировать возникающие вопросы разной степени туманности и обсуждать их затем с «высокообразованными и выдающимися» людьми.

Трудно предположить, что Эйнштейн, зная о попытке Эренфеста проанализировать понятие трехмерности пространства, ни разу бы не упомянул об этой попытке в своих работах. Даже если бы Эйнштейн счел эту попытку неудавшейся, то сам факт такой попытки анализа фундаментальнейшего свойства пространства-времени вполне заслуживал упоминания. И, как мы видели (гл. 3), «удобные случаи» для такого упоминания у Эйнштейна, безусловно, были. Отсюда, как это не удивительно, следует, что Эйнштейн, по-видимому, не знал о работе Эренфеста, посвященной размерности пространства. Как же могло это случиться? Может быть, Эренфест сам не придавал особого значения этой работе, видел в ней всего лишь одну из «забавных задачек» и поэтому не счел нужным рассказать о ней Эйнштейну? Это объяснение трудно принять по следующим двум причинам.

1. Тот факт, что Эренфест после статьи 1917 г. через два с лишним года вновь вернулся к этой теме, говорит о том, что проблему размерности он не забыл. Кроме того, далеко не все свои работы, опубликованные в трудах Амстердамской академии, Эренфест также направлял в другие, более крупные журналы (это касается лишь половины работ). И среди таких дублирующих публикаций статьи о трехмерности выделяются необычно большим интервалом между ними. То, что поводом публикации 1920 г. Эренфест называет краткое замечание Вейля о четырехмерности пространства-времени, только подтверждает «чувствительность» Эренфеста к этой проблеме.

2. В 1926 г. Эренфест совместно с Уленбеком написал статью о волновом уравнении в многомерном пространстве. В этой статье Эренфест ссылается на свою статью 1917 г. (через 10 лет) в связи с различием четно- и нечетномерных пространств. При этом он указывает, что в статье 1917 г. приведены и другие различия между пространствами (точнее, «физиками») разного числа измерений.

Таким образом, Эренфест отнюдь не считал свое исследование не заслуживающим внимания.

По-видимому, объяснить тот факт, что он не обсуждал с Эйнштейном свою работу, могут особенности психологии научного творчества Эренфеста, особенности его личности. Для Эренфеста характерна неудовлетворенность недостаточной, по его мнению, фундаментальностью своих работ. Эта неудовлетворенность, не только проявляясь в повышенной его мнительности, но и приводя в некотором смысле к комплексу неполноценности, основывалась на исключительно высоких «стандартах» научного творчества. Учитывая это, можно предположить, что Эренфест не рассказал Эйнштейну о своей работе потому, что он, попросту говоря, стеснялся несоизмеримости (по его мнению) фундаментальности проблемы размерности и своего научного потенциала (за такую проблему пристало бы взяться самому Эйнштейну!). Он, конечно, не «боялся» Эйнштейна; достаточно вспомнить, например, скептическое отношение Эренфеста к ОТО. Но одно дело — критически рассматривать не идеально еще «отлаженный механизм» теории Эйнштейна, и совсем другое — представить свою скромную попытку на его суд. А «скромность» этой попытки бросалась в глаза: ведь для анализа такой необычной проблемы применялись самые обычные, стандартные методы теоретической физики.

Обсуждаемый в этом параграфе вопрос может проясниться после опубликования переписки Эренфеста с Эйнштейном, хранящейся в эйнштейновском архиве.

4.5. ЗНАЧЕНИЕ РАБОТЫ ЭРЕНФЕСТА

Утверждение о трехмерности пространства тривиально в том смысле, что уже Аристотель с помощью понятийного аппарата современной ему науки сознавал факт трехмерности пространства и выразил его соответствующим образом. А практически это фундаментальное свойство пространства было «известно» уже далеким предкам человека.

Тысячелетия, отделяющие двадцатый век от времени Аристотеля, не сделали факт трехмерности менее известным. Поэтому, казалось бы, исследование факта трехмерности пространства излишне. Однако, как предупреждал еще Максвелл (см. § 4.1), трехмерность очевидна лишь на основании макроскопического опыта.

Уже отмечалось, что работа Эренфеста опередила свое время. Однако вместе с тем есть основание считать ее вполне своевременной. Действительно, начало 20 в. отмечено появлением двух теорий, связанных с активным проникновением в области существенно немакроскопических явлений: теория квантов — в микромир, теория относительности — в мегамир. Выход за пределы области изученных явлений, как правило, начинается с экстраполяции (самой грубой, «линейной») известных закономерностей и свойств на новые явления. Это, конечно, вполне естественно и даже неизбежно, однако сам факт экстраполяции чаще всего вначале не осознается, что приводит к парадоксам, в результате решения которых возникают новые понятия и новое знание. Хрестоматийный пример такой ситуации — экстраполяции законов классической электродинамики на движение электронов в атоме. В результате — парадокс неизлучения. Решение парадокса было достигнуто с помощью создания понятийного аппарата квантовой механики и установления границ применимости классической электродинамики.

Смысл работы Эренфеста состоит в указании на необходимость «перепроверять» факт трехмерности пространства при расширении области исследуемых явлений. Атомные и астрономические явления выходят за пределы макроопыта, и результат исследования Эренфеста — подтверждение факта трехмерности пространства в этих явлениях. Могло бы оказаться, что предположение о другой размерности приводило бы только к количественным изменениям, и тогда пришлось бы сравнивать более тщательно различные случаи. Однако Эренфест установил, что различия в рассматриваемых случаях качественные, и это облегчило выбор между моделями пространства различных размерностей.

Речь по существу идет о мере жесткости математической модели пространства-времени, используемой в физике. Принятие модели трехмерного евклидова пространства ньютоновской физикой— результат макроопыта. Эта трехмерность практически без изменения перекочевала в 3+1-мерную псевдоевклидову модель пространства в СТО и 3+1-мерную псевдориманову — в ОТО. Естественно возникает вопрос, не станут ли рамки трехмерности (или вообще, определенной размерности) при достаточном «удалении» от области макроскопических явлений слишком жесткими для физики. Отложив до гл. 6, 8 рассмотрение возможных ответов на этот вопрос в современной физике, отметим уже сейчас, что некоторые симптомы такой излишней жесткости действительно ощущаются. Это касается в основном микрофизики. Попытки сделать более гибкой пространственно-временную модель возникают не только «от хорошей жизни», но и от конкретных проблемных ситуаций. Не все эти проблемы возникли в последнее время. Одна из них была осознана еще в начале 20 в. при сочетании классической электродинамики и СТО. Это — проблема собственной энергии электрона, или, на языке квантовой теории поля, проблема ультрафиолетовых расходимостей. Другие проблемы возникли совсем недавно в связи с сильными взаимодействиями при высоких энергиях, с «удержанием» кварков и т. п.

Хотя по отношению к проблемам космологии (или физики в мегамасштабах) нет такого потока экспериментально добытых сведений, как в физике элементарных частиц, но и здесь «главная проблема космологии — проблема начального состояния Вселенной (начала расширения, начальной сингулярности) — вызывает сомнения в абсолютном характере 3+1-мерности [Блохинцев, 1976; Сасло, 1977] (см. также § 8.4).

Интересно сравнить отношение физиков к трехмерности как фундаментальному свойству пространства, проявляющемуся, как показал Эренфест, в фундаментальных физических законах, с отношением к законам сохранения — наиболее эффективным инструментам теоретической физики. Размерность с точки зрения современной физики фундаментальнее законов сохранения. В последних явно «заложена» определенная структура пространства-времени, в частности его размерность и симметрии (см. гл. 7). У физиков возникали предположения о нарушении закона сохранения энергии-импульса (например, у Бора), не говоря о менее фундаментальных законах сохранения, нарушение которых при определенных условиях уже включено в теорию (например, несохранение четности).

В отличие от законов сохранения 3-мерность пространства остается до сих пор по существу почти «нетронутой». В физике, правда, существует уже довольно давно направление, связанное с гипотезами фундаментальной длины и дискретного пространства [Киржниц, 1973; Блохинцев, 1970; Вяльцев, 1965] (см. гл. 6). Речь идет о попытках найти такую модель пространственно-временного описания реальности, которая не предполагала бы заранее его непрерывную структуру (точнее говоря, локальную структуру E^4).

Это направление не эквивалентно отказу от абсолютного характера размерности (размерности как одного числа, характеризующего все возможные физические явления), включению понятия размерности пространства в совокупность физических понятий или даже физических величин с определенной областью применимости, возможностью изменения и т. д. Обычно неявно предполагается, что моделью, альтернативной локально-евклидовой 3+1-мерной, является «полностью дискретная», «точечная», «нульмерная», или, на более физическом языке, полностью квантованная (например, в смысле Снайдера, см. [14а]) модель пространства. Однако не исключено, что по мере углубления в микромир размерность будет «отступать» постепенно и что для некоторых физических ситуаций приемлемой окажется 2+1-мерная или 1+1-мерная модели пространства-времени. Такое изменение (уменьшение) размерности пространства при переходе к малым расстояниям могло бы стать конкретной реализацией общей идеи фундаментальной длины и дискретного пространства.

Однако главная трудность остается той же — отсутствие математической модели пространства-времени, обладающей, с одной стороны, достаточной гибкостью, чтобы описать возможные изменения свойств пространства вне области изученных физических явлений, и, с другой стороны, достаточно конкретно, конструктивно заданной, чтобы в рамки этой модели можно было включить обширный аппарат современной физики (т. е. область изученных явлений).

Именно с этой трудностью связано то, что Эренфест не мог рассмотреть все возможные n-мерные пространства, а рассмотрел лишь наиболее простые — евклидовы пространства. Тем более он не мог рассмотреть математическую модель пространства-времени, в которой размерность зависела бы от масштабов явлений.

КРАТКИЕ ИТОГИ ГЛАВЫ 4

Первую в истории физики попытку перевести на язык физики факт 3-мерности пространства предпринял в 1917 г. Эренфест. Его работа, использующая несложный, или по крайней мере стандартный, для своего времени математический аппарат, имеет глубокий смысл. Анализ Эренфеста открыл путь к прекращению размерности пространства-времени из априорного числа, описывающего абсолютным образом весь реальный физический мир, в физическое понятие, обладающее определенным эмпирическим статусом, областью применимости и возможностью изменения.

Появление эренфестовского исследования не было случайным. Во-первых, эта работа, значительно опередившая свое время, была тем не менее вполне своевременной в связи с выходом физики в начале 20 в. за пределы макроскопического опыта. Во-вторых, появлению этой работы предшествовало (и есть основание думать, что не только хронологически) знакомство Эренфеста в 1912 г. с выдающимся математиком Л. Брауэром, который как раз в 1911—1913 гг. получил замечательные результаты, связанные с топологическим понятием размерности пространства. Кроме того, фундаментальность проблемы размерности пространства вполне соответствовала устремлениям и вкусам Эренфеста в теоретической физике.

Работа Эренфеста о размерности пространства естественным образом приводит к вопросу о жесткости модели пространства-времени и тем самым оказывается актуальной и для современной физики.

Общая литература к главе 4: [63, 87, 88, 115, 125, 128б, 142]

Глава 5

КВАНТОВЫЕ ГРАНИЦЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ОТО

В предыдущей главе речь шла о физическом подходе к $3+1$-мерности пространства-времени. Этот подход включает в себя и вопрос о границах «области определения» факта $3+1$-мерности. И эренфестовский анализ, и его развитие не обнаружили таких границ. Если, однако, не удовлетворяться простой констатацией такого рода и пытаться прогнозировать будущее проблемы размерности, то неизбежно придется обратиться к вопросу о квантовых пределах применимости геометрического описания, лежащего в основе ОТО.

Действительно, физическая геометрия ОТО дает наиболее общее на сегодняшний день описание свойства $3+1$-мерности, и границы области определения этого свойства стали бы одновременно границами применимости геометрии ОТО. Можно было бы сомневаться в существовании жесткой связи между $3+1$-мерностью и всей геометрической структурой ОТО, т. е. предполагать, что $3+1$-мерность может уцелеть при переходе через границу применимости геометрии ОТО. Однако если учитывать реально существующие возможности описания размерностной структуры (гл. 2, 3, 6), характер квантово-гравитационных ограничений на геометрическое описание (гл. 5, 6) и, наконец, тенденции в современной физике (гл. 8), то взаимосвязь $3+1$-мерности и классической геометрии ОТО в целом становится весьма вероятной. В физике первые предложения обобщить классическое геометрическое описание были порождены не квантово-гравитационными соображениями (см. гл. 6), но к настоящему времени только такие соображения сохраняют свою силу.

Именно эти обстоятельства делают необходимым рассмотрение квантовых границ ОТО в данной книге.

В настоящее время во всяком обсуждении квантовых границ ОТО непременно появляются так называемые планковские величины. Эти величины представляют собой комбинации из фундаментальных констант c (скорость света), G (гравитационная константа) и $\hbar$ (постоянная Планка) вида

$$X_{\text{пл}} = c^{\alpha} G^{\beta} \hbar^{\gamma}$$

и могут иметь любые размерности * (длины, времени, плотности и т. д.). Планковские величины связывают с границами ОТО, обусловленными необходимостью квантового обобщения релятивистской теории гравитации и пространства-времени. За планковскими границами, как считается, можно ожидать изменения самого смысла свойств пространства-времени и, в частности, его размерности [86, с. 40].

Аргументы, с помощью которых обычно обосновывается такая роль планковских величин, весьма различны — от рассуждений в рамках эскизных вариантов будущей теории квантовой гравитации до простых размерностных соображений. А поскольку последние не требуют каких-либо сложных теоретических конструкций, то можно было бы предположить, что такая, квантово-гравитационная роль планковских величин была известна очень давно, чуть ли не самому Планку.

Однако в действительности эти величины Планк ввел в 1899 г. совершенно вне какой-либо связи с квантовой гравитацией. Кроме того, сам факт, что область применимости классической (неквантовой) теории гравитации ограничена планковскими величинами, был осознан довольно поздно. Квантовые пределы применимости ОТО (и, в неявном виде, планковские величины) были обнаружены М. П. Бронштейном в 1935 г. А в явном виде на квантово-гравитационное значение планковских величин было указано лишь в середине 50-х годов почти одновременно в работах нескольких авторов, хотя по существу это могло произойти гораздо раньше, уже на базе боровской модели атома 1913 г.

Одна из целей данной главы — восстановить «биографию» планковских величин, внимание к которым оправдано уже тем, что это по существу единственный не вызывающий сомнений элемент будущего синтеза теории гравитации и квантовой теории. От самого же синтеза, от квантовой теории гравитации ожидается, как известно, выяснение фундаментальных проблем и космологии и физики элементарных частиц. Но и не дожидаясь построения полной квантовой теории гравитации, планковские величины используются конструктивным образом при рассмотрении некоторых фундаментальных вопросов физики элементарных частиц, астрофизики и космологии, таких, например, как существование верхней границы спектра масс элементарных частиц [82в], компактификация «лишних» измерений в некоторых моделях квантовой теории поля [69], конечная стадия квантового испарения черных дыр

---

* В этой главе читателю придется считаться с тем, что слово «размерность» в физике соответствует существенно различным понятиям: 1) числу измерений, 2) характеристике физической величины с помощью основных единиц в рамках некоторой системы измерений. Если бы не устойчивость традиции, то можно было бы устаревающее выражение «число измерений» заменить словом «мерность», учитывая форму слова «n-мерность». Впрочем, различие контекстов и так обеспечивает полную определенность.

[41], проблема начальных возмущений, приводящих к наблюдаемой галактической структуре Вселенной [36], вопрос об уравнении состояния на самых ранних стадиях расширения Вселенной [45] и т. д.

5.1. РОЖДЕНИЕ ПЛАНКОВСКИХ ВЕЛИЧИН

18 мая 1899 г. на заседании Академии наук в Берлине состоялся доклад М. Планка «О необратимых процессах излучения». В этом докладе впервые было указано на существование двух новых универсальных физических констант, обозначенных a и b, и из экспериментальных данных были вычислены их значения. В конце следующего года константу b Планк переобозначил буквой h, а вместо константы a ввел константу $k=b/a$. Так, в физике появились постоянная Планка и постоянная Больцмана.

В докладе Планка 1899 г. константа b (т. е. h) не имела еще собственно квантового смысла (не было еще представления о квантах энергии $E=h\nu$), она была введена в определении так называемой электромагнитной энтропии. Это определение оправдывалось тем, что оно обеспечивало справедливость второго начала термодинамики для явлений электромагнитного теплового излучения и приводило к формуле Вина для распределения энергии в спектре излучения черного тела. А формула Вина, как известно, пригодна только в пределе $\lambda T \to 0$. Таким, далеко не «торжественно-дедуктивным» путем вошла в физику новая постоянная. И тем не менее Планк сразу же назвал ее универсальной. Планку, который в течение шести лет пытался решить проблему равновесия между излучением и веществом, был ясен фундаментальный характер искомого распределения энергии в спектре, не зависящий от конкретных свойств вещества.

Именно универсальность новой постоянной могла побудить Планка в том же докладе 1899 г. обратиться к вопросу, в общем-то не связанному с основной темой, к вопросу о естественных единицах измерения. В докладе и в статье, излагающей этот доклад [93а, в, с. 191], последний параграф так и называется — «Естественные единицы измерения». Планк обращает внимание на то, что выбор единиц во всех используемых системах единиц «сделан не исходя из общей точки зрения, обязательно приемлемой для всех мест и времен, но исключительно исходя из потребностей нашей земной культуры», и, как он пишет, «нетрудно себе представить, что в другое время, при изменившихся внешних обстоятельствах, любая из употребляемых до настоящего времени систем единиц частично или полностью утратила бы свое первоначальное естественное значение».

В связи с этим Планк отмечает, что, опираясь на новые постоянные, а также на скорость света в вакууме c и гравитационную постоянную G, «мы получаем возможность установить единицы длины, массы, времени и температуры, которые не зависели бы от выбора каких-либо тел или веществ и обязательно сохраняли бы свое значение для всех времен и для всех культур, в том числе и внеземных и нечеловеческих, и которые поэтому можно было бы ввести в качестве «естественных единиц измерения»». Новые (естественные) единицы выбираются так, чтобы в новой системе единиц каждая из четырех указанных констант обращалась в единицу. Таким образом Планк получает единицы длины, массы, времени и температуры:

$$l_{\text{пл}} = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1{,}6\cdot 10^{-33}\ \text{см}, \tag{1а}$$

$$m_{\text{пл}} = (\hbar c/G)^{1/2} = 2\cdot 10^{-5}\ \text{г}, \tag{1б}$$

$$t_{\text{пл}} = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5\cdot 10^{-44}\ \text{с}, \tag{1в}$$

$$\theta_{\text{пл}} = k^{-1}\hbar c^5/G)^{1/2} = 1{,}4\cdot 10^{32}\ \text{К} \tag{1г}$$

(здесь используются современные обозначения и величина констант; вместо h используется принятая сейчас $\hbar = h/2\pi$). Выпишем еще выражение для «естественной единицы» плотности (которого нет у Планка):

$$\rho_{\text{пл}} = c^5/\hbar G^2 = 5\cdot 10^{93}\ \text{г/см}^3. \tag{1д}$$

Заканчивает параграф (и статью) Планк такими словами: «Эти единицы сохраняют свое естественное значение до тех пор, пока справедливы законы тяготения, оба начала термодинамики и пока остается неизменной скорость распространения света в вакууме. Поэтому, будучи измеренными самыми разными интеллектами посредством самых разных методов, они будут иметь всегда одно и то же значение».

Последний параграф статьи Планка производит довольно странное впечатление. Не видно никакой внутренней связи его с основной для статьи проблемой равновесия излучения с веществом. Удивление вызывает и сам замысел создать систему единиц, пригодную для всех времен и культур, «в том числе и для внеземных». И наконец, непонятно, почему Планк даже не обсуждал возможность привлечь для построения естественных единиц другие известные в то время физические постоянные: заряд и массу электрона, массу атома водорода. Все эти вопросы могут несколько проясниться только при учете общих, методологических установок Планка: особого внимания к абсолютным элементам в физической картине мира, связанного с этим антиантропоморфизма, довольно прохладного отношения к господствовавшей на рубеже веков электромагнитной картине мира.

Для Планка характерен постоянный интерес к соотношению относительного и абсолютного в развитии науки [42]. Он неоднократно затрагивал этот вопрос, особенно выделяя в качестве абсолютных элементов универсальные константы — «наиболее осязаемые знаки реального мира, целиком сохраняющие свое значение и в новой картине мира» [93б, с. 12; в, с. 647].

По мнению Планка, «самый важный признак всякого естественнонаучного исследования» — это «стремление найти постоянную, не зависящую от смены времен и народов картину мира»; цель науки состоит «в полном освобождении физической картины мира от индивидуальности творческого ума..., от антропоморфных элементов» [93в, с. 631, 632]. Такой антиантропоморфизм делает понятной мысль о «внеземных и нечеловеческих» культурах. В связи с этими же соображениями Планк вспомнил о своей идее естественных единиц в 1908 г. в лекции, прочитанной студентам Лейденского университета, «Единство физической картины мира». Так что для Планка идея естественных единиц была не более чем выражением его общей методологической установки о роли абсолютных элементов в развитии науки.

По-видимому, первым, кто попытался (хотя и очень неопределенным образом) придать длине, построенной из констант c, $\hbar$ и G, некоторое теоретическое значение, был А. Эддингтон. В 1918 г. (еще до того, как астрономическая экспедиция, возглавленная им, подтвердила эйнштейновский эффект отклонения света) Эддингтон опубликовал обстоятельный обзор «релятивистской теории гравитации» [140а]. В заключительном параграфе этого обзора Эддингтон отметил, что «естественные силы» уже не пытаются объяснять на основе механических моделей, а принимают аксиоматически, без дальнейшего анализа, однако он не думает, что эта (аксиоматическая) стадия уже достигнута в случае гравитации. Свое мнение он поясняет следующим образом: «Имеются три фундаментальные константы природы, занимающие выделенное положение» — c, G, h. «Из них мы можем сконструировать фундаментальную единицу длины, величина которой $4 \cdot 10^{-33}$ см. Есть другие естественные единицы длины — радиусы положительного и отрицательного электрических зарядов — но они гораздо большей величины. За возможным исключением теории материи Осборна Рейнольдса * ни одна теория не пыталась дойти до столь тонкого дробления. Но очевидно, что эта длина может быть ключом к некоторой существенной структуре. Может быть осуществимой надежда, что будет достигнуто более ясное знание процессов гравитации и что чрезвычайная общность и выделенность теории относительности будет освещена детальным изучением точного механизма». Впоследствии, однако, Эддингтон не возвращался к

* Английский физик О. Рейнольдс (1842—1912), известный своими работами по гидродинамике, в 1902 г. объявил о создании всеобщей физической теории, основанной на том, что «имеется одна и только одна мыслимая чисто механическая система, с помощью которой можно объяснить все физические явления, известные нам во вселенной. Эта система есть не больше и не меньше, чем бесконечно протяженное расположение однородных сферических гранул» с диаметром $5{,}534 \cdot 10^{-18}$ см (Proc. R. Soc. L., 1902, v. 69, p. 425).

длине $l_{пл}$, и в его известной «игре констант» эта величина участия не принимала.

Как планковский вариант «интерцивилизационной» системы единиц, так и предположение об особой роли длины $l_{пл}$ не нашли сочувствия у физиков. В этом отношении характерной была позиция П. Бриджмена, выраженная в его книге «Анализ размерностей» [20], и С. И. Вавилова, под редакцией которого эта книга вышла на русском языке. Во-первых, как отметил Бриджмен, ни о какой однозначности планковских единиц нельзя говорить. С теми же основаниями (а точнее, с тем же отсутствием оснований) в набор констант, определяющий естественную систему, можно было включить другие известные к тому времени константы, например заряд и массу электрона. На рубеже веков все эти константы выглядели довольно равноправно, а в рамках господствовавшей тогда электромагнитной картины мира заряд и масса электрона выглядели даже «естественнее» гравитационной константы.

То, что Планк использовал именно константы c, G, $\hbar$ и игнорировал другие, т. е. фактически признавал c, G, $\hbar$ наиболее фундаментальными, может объясняться следующими причинами. Планк не был приверженцем электромагнитной картины мира, несмотря на взгляды, господствовавшие среди физиков его времени (за исключением, пожалуй, только Эйнштейна). Такая позиция Планка (проявившаяся позже и в его отношении к специальной теории относительности [27д]) была связана, по-видимому, с тем, что ему к 1899 г. была яснее, чем другим, неспособность классической электродинамики решить фундаментальную проблему равновесия излучения с веществом. В то же время для него как настоящего теоретика универсальность гравитационного взаимодействия могла компенсировать некоторую обособленность области гравитационных явлений.

И все же Планк не пытался обосновать выделенное положение констант c, G, $\hbar$. Да и слишком теоретическими были бы, по-видимому, подобные доводы для Бриджмена, который методологию экспериментатора довел до уровня философской системы (операционализма). Бриджмен вообще не разделял планковского отношения к физическим константам, считая их только «неизбежным злом» [20, с. 53], и тем более не видел какой-либо выделенности констант c, G, $\hbar$. По поводу приведенного выше предположения Эддингтона об особой роли $l_{пл}$ он высказался еще резче: «Спекуляции такого рода не могут возбудить симпатии в тех, кто разделяет несколько материалистическую точку зрения моего изложения» [20, с. 106].

Однако ко времени появления книги Бриджмена уже можно было видеть некоторую теоретическую выделенность констант c, G, $\hbar$. Действительно, начиная, скажем, с 20-х годов, стал ясен всеобщий характер релятивистской теории гравитации (построенной на константах c и G) и квантовой теории (построенной на константе $\hbar$), т. е. стало ясно то обстоятельство, что с точки зрения этих теорий любое физическое явление при достаточно высокой требуемой точности должно описываться с их участием; эти теории можно не учитывать, только если требуется точность, меньшая, чем Gm/c^2L и $\hbar/S$ (m, L, S — характерные для данного явления масса, расстояние и действие). Тем самым константы G, c, $\hbar$, участвующие в формулировках ОТО и квантовой теории, получают особое, «всеобщее» значение. Стоит, впрочем, подчеркнуть, что это значение привязано именно к современному уровню развития физики; не исключено, например, что подлинное включение в теорию факта квантованности электрического заряда или спектра масс элементарных частиц изменило бы ситуацию.

Однако легко видеть, что даже если ограничиться константами c, G, $\hbar$, значениям единиц, на них основанных, нельзя придать единственное, «внеземное и нечеловеческое», значение. Реально исторически это проявилось, например, в том, что планковские единицы уже «изменились» в $(2\pi)^{1/2}$ раз в результате замены h на $\hbar$; никто также не препятствует называть гравитационной константой коэффициент в уравнении Пуассона $\Delta\varphi = G'\rho$ или в уравнении Эйнштейна $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = G'' T_{\mu\nu}$ — так мы получаем еще множитель 4π и т. д. Для целей квантовой космологии можно естественным образом обосновать $cG\hbar$-единицы, отличающиеся от планковских (1) даже на два порядка [45] (см. § 8.3).

Таким образом, замысел Планка установить «внеземные и нечеловеческие» единицы измерения не удался (как известно, сейчас во «внеземных» целях в качестве единиц предполагается использовать величины, отмеченные самими космическими условиями, например, длину волны $\lambda = 21$ см в спектре водорода и т. п.). Сама идея естественных систем единиц (известная, впрочем, уже до Планка; см. § 5.6) осталась, но служит лишь для удобства вычислений в расчетах, проводимых в атомной физике, где удобно положить равными единице константы e, m_e, $\hbar$ (точно в том же смысле при расчетах бетонных конструкций удобно обратить в единицу плотность бетона, ускорение свободного падения и какой-нибудь коэффициент, характеризующий прочность бетона).

Сам Планк, по-видимому, также разочаровался в своем замысле и перестал упоминать о естественных единицах, хотя физическим константам вообще отводил, по-прежнему, выдающуюся роль.

5.2. ГРАВИТАЦИЯ И КВАНТЫ

Новый этап в истории планковских величин наступил после создания релятивистской теории гравитации — ОТО. На необходимость синтеза новых представлений о гравитации с квантовой теорией первым обратил внимание сам Эйнштейн уже в 1916 г., рассматривая гравитационные волны (в приближении слабого поля) [141, т. 1, с. 522]. Выведя формулу для интенсивности излучения гравитационных волн *, он отметил: «...атом, вследствие внутриатомного движения электронов, должен излучать не только электромагнитную, но и гравитационную энергию, хотя и в ничтожном количестве. Поскольку в природе в действительности ничего подобного не должно быть, то, по-видимому, квантовая теория должна модифицировать не только максвелловскую электродинамику, но также и новую теорию гравитации».

В статье 1918 г., целиком посвященной проблемам гравитационных волн, Эйнштейн вновь замечает: «... интенсивность излучения [гравитационных волн] ни в одном направлении не может стать отрицательной, тем более не может быть отрицательной и полная интенсивность излучения. Уже в прежней работе подчеркивалось, что окончательный результат, согласно которому должна происходить потеря энергии телами вследствие теплового возбуждения, вызывает сомнение во всеобщей справедливости теории. Нам кажется, что построение усовершенствованной квантовой теории должно повлечь за собой и видоизменение теории тяготения» [141, т. 1, с. 642]. (Как мы видим, в это время Эйнштейн, еще не принявший программу единой теории, отводит квантовой теории даже более активную роль в синтезе гравитации и квантов.)

В первом из этих замечаний Эйнштейн, по-видимому, имеет в виду проблему нестабильности атома. Однако его вывод вряд ли основан на количественных оценках. Дело в том, что если «высвечивание» атома, рассчитанное в рамках классической электромагнитной теории и приводящее к падению электрона на ядро, происходит за характерное время

$$\tau_{em} = E/\dot{E}_{em} \approx mv^2/(\ddot{d}^2/c^3) \approx c^3 m\omega^{-2} \approx c^3 m^2 r^3 e^{-4} \approx 10^{-10}\ \text{с}$$

(в вопиющем противоречии с действительностью), то высвечивание энергии атома посредством гравитационного излучения (рассчитанного по формуле Эйнштейна) происходит за характерное время

$$\tau_g = E/\dot{E}_g \approx mv^2/(G\,\dddot{D}^2/c^5) \approx c^5 G^{-1} m r^4 e^{-4} \approx 10^{37}\ \text{с}.$$

Так что ни о каком непосредственном противоречии с эмпирическими данными говорить нельзя **. В данном случае определяющей

* Вывод Эйнштейна ставится под вопрос в работе В. И. Денисова и А. А. Логунова («Итоги науки и техники», т. 21. ВИНИТИ, 1982), однако замечание Эйнштейна носило качественный характер и основывалось только на самом существовании гравитационного излучения.

** «Космологическая» величина времени гравитационного высвечивания атома τ_g дает основание вспомнить, что примерно в это же время Эйнштейн размышлял над космологической проблемой. Тот факт, что для него не важна была величина эффекта, чтобы его отвергнуть, имеет, по-видимому, связь с эйнштейновскими предпосылками, относящимися к космологии (статичность картины Вселенной). В статической Вселенной, существующей вечно, эффект нестабильности атомов недопустим независимо от величины самого эффекта. Людля Эйнштейна скорее была аналогия с электромагнитным полем.

После того как Эйнштейн в 1916 г. указал на необходимость построения квантово-гравитационной теории, на долю этой теории в течение двух десятилетий доставались только отдельные замечания — слишком велик был объем стоявших перед теоретической физикой других, гораздо более насущных проблем (после построения квантовой механики настал черед квантовой теории электромагнитного поля). Однако даже и эти немногие замечания не вскрывали особые свойства гравитационного поля, подразумевая слишком большую аналогию со случаем электромагнитного поля.

Так, например, в известной статье Гейзенберга и Паули 1929 г., в которой появилась общая схема квантования полей, есть такие слова: «Следует еще упомянуть, что квантование гравитационного поля, которое необходимо в силу некоторых физических причин, проводится без каких-либо новых трудностей с помощью формализма, вполне аналогичного развитому здесь» [91в, с. 32]. По поводу самой необходимости квантового рассмотрения гравитации здесь дается ссылка на упомянутое выше замечание Эйнштейна 1916 г. и на соображение, содержащееся в работе О. Клейна [1927], посвященной в целом пятимерной теории. Аргумент Клейна носил скорее методологический характер и сводился к указанию на необходимость единого, учитывающего постоянную Планка, описания гравитационных и электромагнитных волн.

Высказывание Гейзенберга и Паули было основано на том, что исходной точкой для квантования гравитационного поля они считали полученные еще Эйнштейном в 1916 г. уравнения для слабого гравитационного поля, или линеаризованные уравнения Эйнштейна. Такой заведомо приближенный подход хотя и позволял надеяться на аналогию со случаем электромагнитного поля, но давал повод забыть о существенно особых свойствах гравитационного поля, связанных с принципом эквивалентности, с геометрическим характером и нелинейностью этого поля.

Именно этот подход использовал Л. Розенфельд, рассматривавший систему, состоящую из квантованных электромагнитного и слабого гравитационного полей, в статье 1930 г. «О гравитационном действии света». В статье использовался термин «гравитационные кванты» и говорилось о взаимных превращениях световых и гравитационных квантов.

Первое действительно глубокое исследование квантования гравитационного поля провел М. П. Бронштейн. Его статья «Квантование гравитационных волн», излагающая результаты докторской диссертации 1935 г., посвящена в основном рассмотрению

бопытно сопоставить эту позицию, вполне естественную для того времени, с тем фактом, что в наше время возможная нестабильность протона (характеризуемая, кстати, близкой к τ_g величиной 10^{39} с) упоминается в нобелевских лекциях 1979 г. даже как предпочтительная [Салам, 1980]. Таково воздействие эволюционной космологической картины на нормы допустимого в теоретической физике.

случая слабого гравитационного поля, который, как известно, дает возможность не учитывать геометрический характер гравитационного поля, т. е. искривленность пространства-времени.

Однако в работе Бронштейна содержится также очень важный анализ, выявляющий принципиальное различие между квантовой электродинамикой и квантовой теорией гравитационного поля уже без ограничения условием слабости и «негеометричности» поля. Этот анализ показал недостаточность обычной схемы квантовой теории поля и понятий римановой геометрии для формулировки полной теории квантовой гравитации и привел к обнаружению границ области существенно квантово-гравитационных явлений (а неявным образом и к планковским величинам).

Но прежде чем обратиться к этой работе, рассмотрим тот «фон», на котором она появилась, творческую биографию М. П. Бронштейна. Уделить биографии Бронштейна некоторое место в этой книге вполне уместно, поскольку для других главных ее героев — Пуанкаре, Эйнштейна, Эренфеста — существует обширная биографическая литература.

5.3. РОЖДЕНИЕ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ И М. П. БРОНШТЕЙН

В тридцатые годы имя ленинградского теоретика Матвея Петровича Бронштейна было хорошо известно физикам нашей страны, хотя ему в то время не было еще и тридцати лет. Его знали по статьям, печатавшимся в основных физических журналах, по ясным и блестящим по форме выступлениям на семинарах и конференциях. Его знали по переводу книги П. Дирака «Основы квантовой механики», впервые излагавшей квантовую механику как сложившуюся теорию (составленные Бронштейном многочисленные примечания к переводу были особенно существенны для читателей того времени). В Физико-техническом институте ценили его активное сотрудничество в журнале «Physikasche Dummheiten», выходившем тиражом в один экземпляр. Гораздо большему числу людей имя Бронштейна было знакомо по статьям, написанным для научно-популярных журналов (Природа, Сорена и др.), по замечательным научно-популярным и научно-художественным книгам. Эти книги переиздаются, продолжают жить и в наши дни, спустя четыре с половиной десятилетия после смерти их автора. И тем не менее мало кому из современных физиков, даже работающих в областях, которых коснулась деятельность Бронштейна, известно о нем.

После краткой биографии и общего описания деятельности М. П. Бронштейна * подробнее будет рассмотрена его работа о

* Многие приводимые сведения почерпнуты из бесед с людьми, близко знавшими М. П. Бронштейна: с его родными, друзьями, коллегами по ленинградскому Физтеху, с теми, кто слушал его лекции в Ленинградском университете и

квантовании гравитационного поля, которой суждено было стать наибольшим его достижением в физике.

1. Краткая биография.

Матвей Петрович Бронштейн родился 2 декабря (по новому стилю) 1906 г. в провинциальном городке Виннице в семье врача, не отличавшейся ни особенным достатком, ни особыми духовными интересами. В 1915 г. Бронштейны (без отца, мобилизованного в 1914 г. в армию) переехали в Киев. Матвей Петрович вместе с братом-близнецом учились дома, сдавая экзамены в гимназии экстерном. Братья очень много читали; любовь Матвея Петровича к книгам — на всю жизнь — возникла в эти годы.

В 1923 г. братья поступили в электротехникум, но вскоре из-за материальных трудностей учебу пришлось оставить. В 1924 г. М. П. Бронштейн, работая на заводе, начал посещать кружок любителей физики при Киевском университете, где под воздействием П. С. Тартаковского и начался его путь в науке.

Уже в январе 1925 г. «Журнал русского физико-химического общества» (предшественник ЖЭТФа) получил первую статью Бронштейна «Об одном следствии гипотезы световых квантов». В статье в предположении фотонного строения излучения рентгеновской трубки на основе законов сохранения энергии и импульса была получена зависимость границы непрерывного рентгеновского спектра от угла излучения. В конце статьи вывод: обнаружение ожидаемого эффекта добавит еще один аргумент в пользу теории световых квантов, а «в противном случае будет пролит некоторый свет на вопрос о границах применимости теории световых квантов в области рентгеновских лучей». Надо учитывать, что в это время фотонную гипотезу все еще отвергал не кто иной, как Н. Бор, изменивший свое мнение только после эксперимента Боте и Гейгера 1925 г. с эффектом Комптона. Так, что 18-летний Бронштейн сразу же окунулся в гущу событий современной физики.

В том же 1925 году он опубликовал в известном немецком журнале «Zeitschrift für Physik» две статьи о квантовой теории взаимодействия рентгеновских лучей с веществом, в следующем году — еще три статьи. В этих работах производит впечатление серьезная математическая подготовка 18-летнего автора.

В 1926 г. по совету П. С. Тартаковского он поступает в Ленинградский университет, по окончании которого уже вполне самостоятельным физиком поступает на работу в теоретический отдел Ленинградского физико-технического института. Возглавлявший отдел Я. И. Френкель к тому времени уже хорошо знал и высоко ценил его. «М. П. Бронштейн является исключительно талантливым физиком-теоретиком, с широкими интересами, большой инициативой и чрезвычайно большими познаниями. Я не сомневаюсь, что он будет одним из наиболее ценных сотрудников теоретического отдела института и лаборатории», — пишет Я. И. Френкель на заявлении 23-летнего Бронштейна о приеме на работу [128а, с. 210].

Сотрудники физтеха активно участвовали в подготовке новых кадров физиков. В эту деятельность сразу же включился и Бронштейн. Он преподавал в Ленинградском университете, на физико-механическом факультете Политехнического института, вел занятия с аспирантами. У него был яркий талант педагога. Но он не только умел делать ясными сложные физические построения. Он понимал, что теоретическая физика 20 века требует нового стиля мышления, начало которому положил Эйнштейн. Надо было освободиться от чересчур тесных оков индуктивного построения теории, нисколько не ослабляя роль эксперимен-

---

Политехническом институте. Особенно автор благодарен И. П. Бронштейну, Г. И. Егудину, И. К. Кикоину, М. А. Корецу, А. Б. Мигдалу, Я. А. Смородинскому. Большую помощь автор получил от В. Я. Френкеля (о М. П. Бронштейне см. также в кн. [111, 128а]).

та как судьи теории. Новый стиль теоретической физики в нашей стране формировался в тридцатые годы. Наиболее известным проявлением этого стиля стал курс теоретической физики Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, замысел которого возник именно тогда. Бронштейна связывала с Ландау тесная дружба еще со студенческих лет. В их интенсивном общении существенное место занимали и педагогические проблемы. При этом речь шла не только о «теоретической педагогике», поскольку оба активно занимались и педагогической практикой и «педагогическим экспериментом».

Бронштейн читал курсы лекций, посвященные различным областям теоретической физики и математики: электродинамика, статистическая физика, теория излучения (как тогда называли квантовую электродинамику), теория ядра, матричная алгебра, тензорный анализ и др. Слушавшие Бронштейна студенты и аспиранты, ставшие впоследствии известными физиками, вспоминают о его лекциях с восхищением. Не случайно конспекты этих лекций служили им еще годы. Не случайно некоторые конспекты хранятся до сих пор. Курсы Бронштейна характеризовал тот же подход к теоретической физике, который многим знаком по книгам Ландау и Лифшица: с одной стороны, активно используются соображения симметрии, инвариантности, даются наиболее общие постановки проблем и методы их анализа, а с другой стороны, выявляется физическое содержание задачи, обнаруживаются физические характеристики, существенные для данного явления. Физика не подменяется математическим формализмом, скорее математические понятия пропитываются физическим смыслом.

Остались и более конкретные свидетельства педагогического сотрудничества Бронштейна и Ландау. У Я. А. Смородинского сохранился конспект, составленный в 1937 г. по машинописной рукописи, озаглавленной «М. П. Бронштейн и Л. Ландау. Статистическая физика».

В своих лекциях Бронштейн выбирал кратчайший путь к освоению материала. Такой путь, как известно, практически никогда не совпадает с историческим. Однако это не значит, что Бронштейн плохо знал историю науки. Скорее наоборот: судя по его научно-популярным статьям и книгам, он знал ее удивительно хорошо. «Удивительно», если учесть его возраст и высокую собственно-научную активность. Он глубоко понимал поэзию и прозу реального процесса исторического развития физической науки. Об этом свидетельствуют не только многочисленные факты истории науки, которыми он свободно пользовался в популярных статьях и книгах.

Для Бронштейна было характерно особое внимание к «историческому» духу современной ему физики. Это в общем-то не удивительно. Происходившее в первые десятилетия нашего века стремительное преобразование понятийной структуры физики на основе релятивистских и квантовых идей настроило многих на «перманентную революцию» в физике.

Одним из проявлений такого настроения было широко распространенное сомнение во всеобщей применимости закона сохранения энергии. Это предположение, высказанное Бором в 1931 г. в связи с проблемой β-распада, поддержали многие физики, в частности Дирак, Ландау, Бронштейн *. Это была, конечно, «правильная» гипотеза, правильно сформулированная для экспериментальной проверки и правильно отвергнутая на основе экспериментов задолго до прямого экспериментального подтверждения альтернативной нейтринной гипотезы Паули.

Еще более распространенной была уверенность в том, что построение релятивистской квантовой теории невозможно без радикальных изменений пространственно-временных представлений. Связанный с этим круг разнообразных остроумных идей привлекал большое внимание, хотя после работы Бора и Ро-

* В то время считалось, что электроны входят в состав ядра. Тогда из принципа неопределенности с учетом размеров ядра следует, что скорости электронов должны быть ультрарелятивистскими. Поэтому считалось, что β-распад может быть объяснен только (еще не построенной) релятивистской квантовой теорией, «на чей счет» и относилось несохранение энергии.

зенфельда 1933 г. об измеримости электромагнитного поля такая возможность перестала особенно волновать прагматически настроенных теоретиков.

Обе идеи, которые для физиков того времени, пожалуй, нельзя было назвать и еретическими (настолько они были естественны), вызывали энтузиазм у Бронштейна. Он не был прагматиком, «несмотря» на совершенно свободное владение математическим аппаратом современной физики и большую «физическую силу ума» (выражение, бытовавшее в его среде).

Бронштейн относился к тем теоретикам, для которых физика не сводится к возможности решить увлекательные и трудные задачи раньше других, изящнее других и в большем количестве. Он относился к тем физикам, для которых жизненно необходима целостная и развивающаяся физическая картина мира. Об этом, в частности, говорит и его глубокий интерес к предполагаемым в то время точкам роста физического знания: закону сохранения энергии и локальности пространственно-временного описания.

Стоит подчеркнуть, что это не был только так называемый философский интерес. Матвей Петрович, по свидетельству многих знавших его физиков, не имел себе равных по объему глубоко и последовательно продуманных физических знаний, и поэтому для него упомянутые два вопроса были не изолированными, а взаимосвязанными с другими фундаментальными конкретными фактами, свойствами физической реальности. Закон сохранения энергии он связывал с вопросом об источнике энергии звезд и с космологической временной асимметрией, а неопределенность абсолютно-локального пространственно-временного описания связывал с будущим подлинным синтезом квантовых и релятивистских идей и с фактом атомистического строения материи. Источники звездной энергии были найдены, как известно, без опасности для закона сохранения энергии и без введения временной асимметрии фундаментальных законов, однако второй круг вопросов сохранил по существу свою актуальность до наших дней. И сейчас нет теоретического объяснения факта атомарности электрического заряда [Салам, 1980]. Обнаруженная впервые Бронштейном несовместимость понятий римановой геометрии ОТО и квантовых ограничений до сих пор не нашла своего разрешения в построении полной квантовой теории гравитации.

Для методологической настроенности Бронштейна ключевыми были слова «границы применимости». Он глубоко понимал органическую связь прошлого и будущего в науке, запечатленную, в частности, в понятийной структуре развивающегося знания. Слова «границы применимости» нередко встречаются в научных статьях Бронштейна, начиная, как мы видели, с самой первой. Один из важнейших его результатов, о котором подробнее будет говориться дальше, — это обнаружение квантовых границ применимости общей теории относительности.

Подлинная космологическая теория, как полагал Бронштейн, должна опираться на максимально общую физическую теорию, и в этой связи он рассматривал структуру физики в целом, отношение физических теорий друг к другу. Структура физики для него прежде всего определяется границами применимости отдельных физических теорий. Каждая такая граница соответствует некоторой фундаментальной физической константе, значением которой в одной из двух соседних областей можно пренебречь (см. об этом далее).

Для физики первой трети 20 в. наряду с революционным духом было характерно резкое возрастание удельного веса «высшей» математики. Понимая и принимая это усиление математической компоненты в физической теории, Бронштейн и преподавание физики строил в соответствии с этим. Причем он считал необходимым, чтобы фундаментальные дисциплины, и в частности математика, были положены в основу не только теоретического, но и инженерно-физического образования (предвосхищая современную тенденцию). Его студентам запомнилась, например, фраза о том, что человеку, знающему, что такое производная, для освоения сопромата требуется не два года (отводившиеся в действительности), а две недели.

Вполне владея и свободно пользуясь математическим аппаратом теоретической физики, Бронштейн видел в математике не только технический инструмент для решения физических задач. Он, например, мог с интересом читать и обсуждать книгу по теории чисел. Это, впрочем, было лишь одним проявлением широты его кругозора, активных его интересов практически во всех областях культуры.

Знавшие Матвея Петровича, характеризуя его, единодушно говорят о выдающейся его образованности: «энциклопедически образован», «самый образованный человек из тех, кого я встречал». При этом его энциклопедическая образованность вовсе не казалась результатом того, что он читал и запоминал наизусть энциклопедии, хотя он и был наделен превосходной памятью и способностью легко и быстро усваивать новое. (У него, в частности, были замечательные способности к языкам. На окружающих производило большое впечатление, когда на конференциях он свободно переходил с одного языка на другой. При его участии были переведены на русский язык одна за другой книги Дирака (с английского), Бриллюэна (с французского) и Беккера (с немецкого).)

Широта интересов и познаний Бронштейна была очень гармоничной и естественной. И физику он воспринимал не просто как собрание трудных и интересных задач, а как естественную и органическую часть человеческой культуры.

Глубокую образованность Бронштейна дополнял литературный дар, говоря точнее, дар слова. Его научные статьи написаны хорошим, свободным русским языком, не подавленным тем стилем научно-протокольной прозы, который так легко пародировать. Впрочем, статьи его столь же чужды того туманного красноречия, которым иногда пытаются компенсировать недостаток продуманных мыслей.

Именно сочетание глубоких знаний и чувства слова дало возможность раскрыться педагогическому таланту Матвея Петровича. У него была живая потребность делиться своими знаниями, фиксировать в слове наполнявшие его мысли и чувства. Еще студентом он начал писать научно-популярные статьи. За свою короткую жизнь, насыщенную активной научной работой, он, кроме нескольких десятков научно-популярных статей написал три научно-популярные книги и три научно-художественные книги для юного читателя.

Жанр научно-художественной детской книги формировался в ленинградском Детиздате при активном участии С. Я. Маршака. Маршак «открыл» и Бронштейна, заразил его своим энтузиазмом и помог найти композицию первой его научно-художественной книги — «Солнечное вещество». В предисловии к публикации этой книги в Горьковском альманахе «Год восемнадцатый» Маршак писал о жизненной необходимости и общих целях научно-художественной литературы. Бронштейна увлекла задача раскрыть внутренний смысл и драматизм жизни науки для тех, кому эта жизнь понятна не более, чем фильм или даже радиоспектакль на неизвестном языке. Последующие две книжки «Лучи икс» и «Изобретатели радиотелеграфа» он написал уже почти без редакционной помощи. Хотя эти книги были адресованы юным читателям, о каждой из них можно сказать словами Ландау (из предисловия к переизданию «Солнечного вещества» в 1959 г.): «Она написана с такой простотой и увлекательностью, что читать ее, пожалуй, равно интересно любому читателю — от школьника до физика-профессионала».

Бронштейн относительно много времени уделял научно-популярной литературе, но его коллеги, не говоря уж о детских писателях и педагогах, вполне одобряли его деятельность. Во-первых, потому что он очень хорошо это делал, а во-вторых, потому, что необходимость настоящей популяризации науки ясно осознавалась ими в большой степени под влиянием самого Бронштейна.

Окружающая Матвея Петровича атмосфера уважения и любви в немалой степени определялась его собственной доброжелательностью. Если его остроумные реакции на происходящее и бывали порой довольно язвительны, то воспринимались обычно без обиды, поскольку в основе своей имели добрые чувства. Во время защиты одной диссертации он назвал обсуждаемый эффект чисто университетским и пояснил, что в средневековых университетах, где к всевозможным постулатам относились особенно бережно, главной целью диссертанта было не подвергнуть эти постулаты какой-либо опасности. Но это замечание нисколько не помешало ему вполне положительно оценить уровень диссертационной работы.

Впрочем доброжелательность Бронштейна имела естественные «границы применимости». В частности, за этими границами находились весьма активные деятели, которые стремились подчинить развитие физики натурфилософским построениям. Симпатии не вызывали также те физики, которые, не поспевая за развитием науки, ответственность за это возлагали на саму физику. В 1931 г. вышел том энциклопедии со статьей «Эфир», по содержанию запаздавшей на несколько десятилетий. Ее автор, маститый физик, обвинял теорию относительности в махизме и других смертных грехах. По этому поводу, при активном участии Бронштейна, автору была послана фототелеграмма (незадолго до того появившийся вид почтовой связи). На фототелеграмме был изображен автор статьи, роящийся в груде мусора, из которой торчали некие предметы с надписями «теплород», «флогистон» и т. п. В руках автора был изображен предмет с надписью «эфир» и имелось пожелание дальнейших успешных поисков (подобные выступления, конечно, не делали жизнь Бронштейна проще). При этом следует иметь в виду, что сам Бронштейн вовсе не был «ура-релятивистом». Он (как, кстати, и Эйнштейн) глубоко понимал и обоснованность и необоснованность идеи эфира; достаточно ознакомиться с его статьей 1929 г. «Эфир и его роль в старой и новой физике».

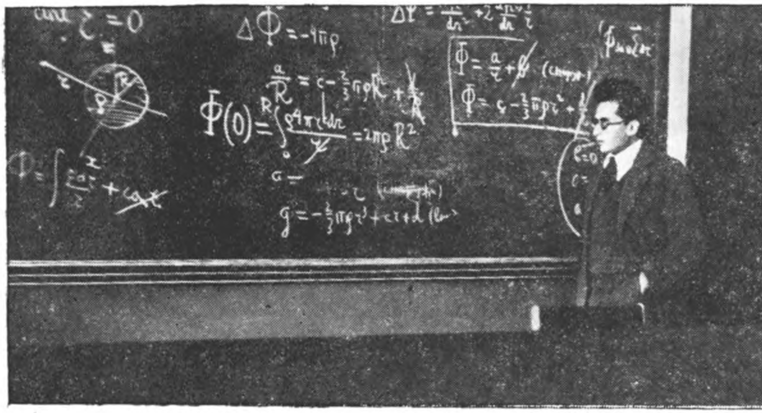
И наконец, перед тем как перейти к описанию научных работ, приведем слова писателя К. И. Чуковского [44и]:

«За свою долгую жизнь я близко знал многих знаменитых людей: Репина, Горького, Маяковского, Валерия Брюсова, Леонида Андреева, Станиславского, и потому мне часто случалось испытывать чувство восхищения человеческой личностью. Такое же чувство я испытывал всякий раз, когда мне доводилось встречаться с молодым физиком М. П. Бронштейном. Достаточно было провести в его обществе полчаса, чтобы почувствовать, что это человек необыкновенный. Он был блистательный собеседник, эрудиция его казалась необъятной. Английскую, древнегреческую, французскую литературу он знал так же хорошо, как и русскую. В нем было что-то от пушкинского Моцарта — кипучий, жизнерадостный, чарующий ум».

2. Теория гравитации в работах Бронштейна. Первые работы Бронштейна, связанные с теорий гравитации, с ОТО, были посвящены космологии и астрофизике. В 1931 г. в УФН был опубликован обширный (60 страниц) обзор Бронштейна «Современное состояние релятивистской космологии». Появление этого обзора было вполне своевременным, поскольку открытый в 1929 г. закон Хаббла стал по существу первым наблюдательным фактом космологического характера, открывшим возможность для превращения космологии в физическую теорию. В статье 24-летнего автора с ясностью, особенно существенной для читателей того времени, излагались основы ОТО, постановка космологической задачи и рассматривались основные космологические модели. Эта статья имела важное значение для истории космологии в нашей стране и осталась в памяти даже тех физиков, вошедших в науку в начале 30-х годов, чья деятельность прямо не касалась космологии *.

* Статья 1931 г. была первой, в которой Бронштейн имел дело с ОТО. И до этой статьи и после нее его физические интересы вовсе не исчерпывались только фундаментальными вопросами. Взаимодействие излучения с веществом, фи-

В этой статье не высказывается принципиальных сомнений в возможности построения космологической теории, основанной только на ОТО. В последующих же работах, посвященных космологии, такие сомнения являются одним из основных элементов. Бронштейн пытается обосновать утверждение: «объяснение вселенной в целом в рамках существующих физических теорий не-



Матвей Петрович Бронштейн
во время лекции по теории гравитации

возможно», поскольку «все существующие физические теории симметричны по отношению к обоим направлениям времени», а «та часть истории вселенной, которую мы знаем, не обладает симметрией по отношению к обоим направлениям времени» [21д, с. 195, 213]. Он имел в виду прежде всего термодинамическую выделенность направления времени.

В связи с этим Бронштейн значительное внимание уделял вопросу о границах применимости физических теорий. Бо́льшую часть работы [21д] составляет раздел «Отношение физических теорий друг к другу и к космологической теории». Свой анализ Бронштейн иллюстрировал схемой, изображенной на рис. 5.1. При этом

зика твердого тела, астрофизика, физика атмосферы, космология, релятивистская квантовая теория, космические лучи, ядерная физика, квантование гравитации, квантовая электродинамика — таково разнообразие областей, к которым относятся работы Бронштейна. С начала 30-х годов в ФТИ начали проводиться работы в новых направлениях: физика полупроводников и физика ядра. Бронштейн сразу же включился в эти исследования. О значении работ Бронштейна по физике полупроводников говорит уже то, что Ученый совет ФТИ предложил ему (на заседании 10 мая 1935 г.) представить для защиты докторской диссертации работу «Теория полупроводников» (ученая степень кандидата физико-математических наук была присвоена Бронштейну без защиты диссертации за работы по астрофизике).

естественным образом возникал вопрос и о границах области применимости ОТО. Однако никакого определенного ответа в этой статье Бронштейн не получил, хотя в ней и фигурирует (правда не в связи с вопросом о границах применимости ОТО) в качестве универсальной постоянной величина $(\hbar G/c^3)^{1/2}$, т. е. планковская длина. Бронштейн считал, что подлинная космологическая теория «должна увенчать здание физической теории вообще», позволяя вычислить все безразмерные величины, характеризующие состоя-

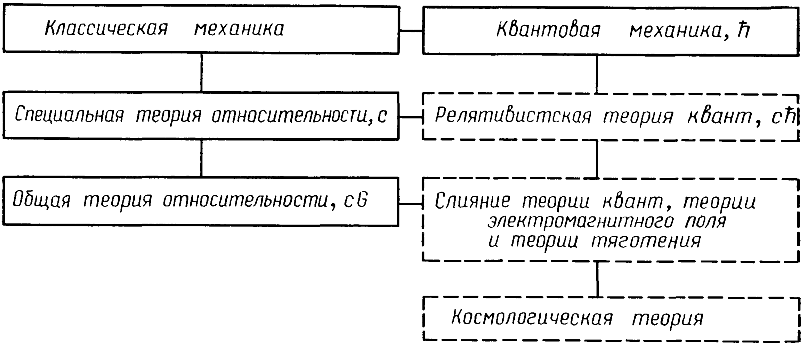


Рис. 5.1. Отношение физических теорий друг к другу и к космологической теории, «сплошные прямоугольники изображают существующие теории в физике, а пунктирные соответствуют еще не решенным проблемам» [Бронштейн, 1934, с. 207, 210]

ние Вселенной. Эта (в некотором смысле экстремистская) точка зрения, как известно, не была принята, и космологи, не дожидаясь «полного завершения» физической теории, находят разумное оправдание своей деятельности в получении ответов хотя бы на некоторые вопросы космологического характера. Тем не менее Бронштейн поднял действительно фундаментальную проблему, связанную с радикальным отличием подхода к описанию Вселенной (уникального физического объекта, существующего в единственном экземпляре, с уникальной историей) и подхода к описанию других физических объектов (для которых могут реализовываться различные начальные условия и, соответственно, истории). Несмотря на все достижения современной космологии, эта проблема (называемая иногда проблемой начальных условий) до сих пор не получила подлинного решения.

О границах применимости ОТО Бронштейн упоминает также в 1935 г. в дополнении к русскому переводу книги Эйнштейна «Основы теории относительности»:

«Общая теория относительности должна рассматриваться как дальнейшее обобщение частной теории относительности, включающее и явление тяготения. В настоящее время трудно говорить о границах применимости ОТО. Однако следует подчеркнуть, что уравнения ОТО не являются вполне однозначным следствием из ее физических принципов. ...Поэтому вполне возможно, что ОТО, в ее существующей форме, является лишь предварительным наброском теории и что построение истинной теории тяготения должно быть связано с еще более глубоким преобразованием физических понятий, нежели то, которое достигнуто в общей теории относительности Эйнштейна».

Последняя фраза, возможно, уже отражает частично результаты работы по квантованию гравитации — обнаружение принципиальной ограниченности понятий римановой геометрии с учетом квантовых эффектов (см. § 5.4).

О том, как Бронштейн относился к самой возможности квантового обобщения ОТО, красноречиво говорят слова, которыми заканчивается его статья 1929 г. [21а] (эта статья, опубликованная в научно-популярном журнале «Человек и природа», была посвящена попытке Эйнштейна объединить гравитацию и электромагнетизм):

«Построение такой геометрии пространства и времени, из которой вытекали бы не только законы тяготения и электромагнитного поля, но и квантовые законы — вот величайшая задача, которая когда-либо стояла перед физикой».

Важное значение имела статья Бронштейна 1934 г. «К вопросу о релятивистском обобщении принципа неопределенности», посвященная привлекавшей в то время большое внимание проблеме измеримости электромагнитного поля. В 1931 г. Ландау и Пайерлс поставили под вопрос непротиворечивость и физический смысл понятия «поле в данной точке», одного из основных понятий в квантовой теории электромагнитного поля. В известной работе Бора и Розенфельда 1933 г. в результате тщательного анализа теория была реабилитирована. Развивая этот анализ, Бронштейн высказал мнение, что в будущей полной теории (описывающей как поле, так и частицы) станут невозможны неограниченно большие величины плотности заряда ρ, которые приходилось привлекать, чтобы обеспечить возможность сколь угодно точного измерения компоненты поля: «Принципиальная невозможность измерить с произвольной точностью поле в будущей релятивистской теории квант будет связана с принципиальным атомизмом материи, т. е. с принципиальной невозможностью беспредельно увеличивать ρ».

В то время (как, впрочем, и до сих пор) не было известно, в какой форме должен быть учтен «принципиальный атомизм материи»; сам характер и возможности будущей «релятивистской теории квант» представлялся очень неясно. (Бронштейн, как и другие, считал, например, что эта теория должна определить значение постоянной тонкой структуры теоретически.) Но, применяя аналогичные рассуждения в квантовой теории гравитации, Бронштейн привлек возникающие в ОТО естественным образом принципиальные ограничения плотности гравитационного заряда, т. е. массы (см. § 5.4).

Время сохранило в памяти физики несколько его работ, которые так или иначе относятся к гравитации. Специалисты по теории внутреннего строения звезд помнят о статье Бронштейна 1933 г., посвященной, в частности, гравитационному равновесию вырожденных звезд, в которой дано уравнение, учитывающее реальное изменение по радиусу степени релятивизма вещества звезды.

Принципиальное значение для космологии имела работа Бронштейна 1937 г. о возможности (точнее, о невозможности) спонтанного расщепления фотона [52, с. 124]. Как раз в тридцатые годы появились предположения о том, что красные смещения в спектрах удаленных галактик являются результатом не эффекта Допплера, связанного с расширением Вселенной, а «старения» фотонов, проходящих огромные межгалактические расстояния. (Одним из оснований для этой гипотезы были неувязки с заниженным тогда на порядок возрастом Вселенной.) Такое старение, или покраснение фотонов, как считалось, могло быть вызвано явлением спонтанного распада фотона на несколько фотонов меньшей (более красной) частоты. В работе Бронштейна такая возможность была отвергнута, во-первых, на основании общих и изящных соображений, связанных с принципом относительности, и, во-вторых, с помощью прямого квантово-электродинамического расчета, который при состоянии теории того времени был весьма сложен. В результате фундаментальнейший космологический факт получил надежное обоснование.

Однако наибольшим достижением Бронштейна стала выполненная им в качестве докторской диссертации работа по квантованию гравитации. Защита диссертации состоялась в ЛФТИ 22 ноября 1935 г. Оппонентами по диссертации выступали В. А. Фок и И. Е. Тамм, в дискуссии приняли участие Ю. А. Крутков, Я. И. Френкель и В. К. Фредерикс. Как отметил Фок, проведенное Бронштейном исследование — «первая работа по квантованию гравитационных волн, в которой дело доведено до получения физических результатов». Тамм в своем отзыве указал: «Нельзя не отметить чрезвычайную математическую сложность проблемы, которой посвящена диссертация. Успешное разрешение ее свидетельствует о значительном математическом искусстве автора. Только искусное использование специальных математических приемов сделало поставленную себе автором задачу вообще практически разрешимой» [10] (см. также [114а]).

О значении этой работы Бронштейна свидетельствует, в частности, ее включение в сборник важнейших работ в области теории гравитации, изданный к 100-летию со дня рождения Эйнштейна [5]. Впрочем важность полученных Бронштейном результатов была видна уже в те годы. Когда в 1936 г. на сессии АН СССР с отчетом о деятельности Физико-технического института выступил А. Ф. Иоффе, то среди важнейших научных достижений в разделе «теоретическая физика» было указано квантование гравитационного поля [95]. В научной характеристике Бронштейна, написанной несколько позже Л. И. Мандельштамом, С. И. Вавиловым и И. Е. Таммом, наряду с его достижениями в теории полупроводников и в ядерной физике отмечалось: «В своей докторской диссертации, публично защищенной им с большим успехом, М. П. Бронштейн разработал теорию квантования гравитационных волн, имеющую существенное значение для правильного понимания ряда основных положений квантовой электродинамики».

Результаты, полученные Бронштейном, были опубликованы в двух статьях [21з, и] (первая из которых является сокращенным вариантом второй). Речь в них идет о квантовании слабого гравитационного поля, однако один из важнейших результатов, сохранивший свое значение до нашего времени, состоит в общем анализе совместимости квантовых и общерелятивистских представлений (этот анализ будет рассмотрен отдельно).

Исходя из данной Гейзенбергом и Паули общей схемы квантования полей Бронштейн рассмотрел гравитацию в приближении слабого поля, когда можно не учитывать геометрический характер гравитационного поля и рассматривать его как поле симметричного тензора второго ранга в пространстве Минковского. Из рассмотрения квантованного слабого гравитационного поля он получил два важных физических следствия: 1) выражение для интенсивности гравитационного излучения, совпавшее в классическом пределе с формулой Эйнштейна, и 2) ньютоновский закон тяготения как следствие квантово-гравитационного закона взаимодействия.

Казалось бы, это всего лишь естественные требования принципа соответствия, которые могут только, самое большее, свидетельствовать о правильности способа квантования. Однако в действительности эти результаты имели принципиальное значение. Дело в том, что особое положение гравитационного поля, отождествление его с метрикой пространства-времени, вызывало по разным причинам сомнения в осуществимости синтеза квантовых и общерелятивистских идей. Достаточно сказать, что и в 60-х годах Л. Розенфельд высказывал мнение, что квантование гравитационного поля может оказаться бессмысленным, поскольку гравитационное поле имеет, возможно, чисто классическую макроскопическую природу [104б]. А ведь Розенфельд был первым, кто рассматривал квантование гравитационного поля не на словесном уровне [104а]. Мнение о «слишком особом» характере гравитационного поля, отделяющем это поле пропастью от других физических полей, было довольно распространенным (даже в настоящее время имеются сторонники этого мнения, хотя преобладает все же противоположная точка зрения). Не менее известной была тогдашняя позиция самого Эйнштейна, считавшего, если можно так выразиться, что от истинной, полной физической теории общую теорию относительности отделяет меньшее расстояние, чем квантовую теорию.

Исследование Бронштейна продемонстрировало глубокие связи классического и квантового (хотя и неполного) вариантов описания гравитации и, тем самым, свидетельствовало о возможности и необходимости квантового обобщения теории гравитации.

Кроме указанных двух результатов Бронштейна следует упомянуть также его замечание в статье 1937 г., посвященной спонтанному распаду фотона. Это замечание касается взаимных превращений фотонов и гравитационных квантов:

«Заметим, что общие свойства вероятности расщепления в единицу времени, выведенные выше с помощью принципа относительности, остаются справедливыми и в том случае, если в числе частей, на которые распадается фотон, имеются не только кванты света, но и гравитационные кванты (такие расщепления, разумеется, нисколько не противоречат законам сохранения). В настоящее время не существует удовлетворительной теории взаимодействия между светом и тяготением. Возможно, что будущая квантовая «единая теория поля» должна будет рассмотреть и такие превращения (полные или частичные) квантов электромагнитного поля в гравитационные кванты. «Nature seems to be delighted with transmutations» (Исаак Ньютон, «Оптика», вопрос 30)» [21к, с. 340].

5.4. «...ПРИНЦИПИАЛЬНОЕ РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКОЙ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИЕЙ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ»

Итак, общая идейная атмосфера, в которой находился и работал Бронштейн, и в особенности его размышления над космологической проблемой свидетельствуют о вполне мотивированном его обращении к проблеме квантования гравитации, которая на бронштейновской схеме (рис. 5.1) находится в прямоугольнике, предшествующем полной космологической теории. Возможно, конечно, что был и более непосредственный повод для выбора этой темы. Например, Я. И. Френкель, в тесном контакте с которым находился Бронштейн, писал в конце 40-х годов: «А. Эйнштейн был, вероятно, первым, кто указал на связь между гравитационными волнами и соответствующими частицами (в беседе с автором в 1925 г.). Подробное математическое исследование этого вопроса было опубликовано в нашей стране М. Бронштейном в 1936 г.» (цит. по [128а, с. 147]). Нет, впрочем, сомнений, что к 1935 г. Бронштейн был уже вполне самостоятельным физиком.

Статью о квантовании гравитации Бронштейн начинает с классической (неквантовой) теории слабого гравитационного поля.

(и, в частности, гравитационных волн) как малых возмущений псевдоевклидовой геометрии, когда метрический тензор g_{ik} может быть представлен в виде

$$g_{ik}=\delta_{ik}+h_{ik},$$

где δ_{ik} — метрика Минковского, а все величины h_{ik} малы по сравнению с единицей. В этом случае, как показал еще Эйнштейн в 1916 г., общие нелинейные уравнения ОТО сводятся к линейным уравнениям (с точностью до членов высшего порядка малости по h_{ik}):

$$\Box h_{ik}=\varkappa\left(T_{ik}-{}^1/{}_2\delta_{ik}T\right), \qquad (2)$$

где T_{ik} — тензор энергии-импульса, $\varkappa=16\pi G/c^2$, G — ньютоновская гравитационная константа, c — скорость света.

Затем, сконструировав подходящий для этого случая гамильтониан гравитационного поля, Бронштейн выписывает перестановочные соотношения в соответствии с общей схемой квантования полей Гейзенберга и Паули 1929 г.

Однако, прежде чем перейти к последовательному построению квантовой картины слабого гравитационного поля, Бронштейн обращается к вопросу, касающемуся синтеза квантовых и гравитационных представлений в общем случае, а не только в случае слабого поля. Проследим за его рассуждениями подробнее.

После краткого обсуждения перестановочных соотношений он пишет:

«Можно было бы думать, что здесь, как и в квантовой электродинамике, получается вполне последовательная квантово-механическая схема, содержащая величины, которые, правда, не всегда могут быть измеряемы с произвольно задаваемой точностью одновременно, но каждая из них может быть сколь угодно точно измерена в отдельности. ...Чтобы понять природу тех физических условий, которые могут сделать это утверждение недействительным, рассмотрим в качестве простейшего примера измерение величины [00,1], т. е. одной из скобок Кристоффеля [играющих, как известно, роль напряженности гравитационного поля. — *Г. Г.*]. Эта величина может быть измерена посредством пробного тела, движущегося со скоростью, бесконечно малой по сравнению со скоростью света» [21и, с. 214]. Действительно, как показывает Бронштейн, в этом приближении, если считать и гравитационное поле слабым, уравнение геодезической для координаты x^1

$$\frac{d^2x^1}{ds^2}+\Gamma^1_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}=0$$

переходит в уравнение

$$\frac{d^2x}{c^2dt^2}=\Gamma_{1,00}=\frac{\partial h_{01}}{c\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x}, \qquad (3)$$

здесь $x \equiv x^1$, $\Gamma_{1,00}$ — современное обозначение символа Кристоффеля [00,1], c — скорость света.

Для измерения значения $\Gamma_{1,00}$ среднего по объему V и за промежуток времени T (а как показали Бор и Розенфельд в 1933 г., в квантовой теории поля можно говорить только о такого рода измерениях) следует измерить компоненту p_x импульса пробного тела, имеющего объем V, в начале и в конце промежутка времени T, поскольку в рассматриваемом приближении

$$\Gamma_{1,00} = \frac{d^2x}{c^2dt^2} = \frac{p_x(t+T)-p_x(t)}{c^2\rho VT},$$

где ρ — плотность пробного тела. Поэтому если измерение импульса имеет неопределенность порядка Δp_x, то неопределенность

$$\Delta\Gamma_{1,00} \sim \frac{\Delta p_x}{c^2\rho VT}. \tag{4}$$

Неопределенность импульса Δp_x состоит из двух слагаемых: обычного квантово-механического члена $(\Delta p_x)_1 = \hbar/\Delta x$ (где Δx — неопределенность в координате) и «члена, связанного с полем тяготения, создаваемого самим измерительным прибором вследствие отдачи при измерении импульса». Второе слагаемое Бронштейн оценивает следующим образом. Уравнения (2) с учетом используемого приближения дают

$$\Box h_{01} = \varkappa T_{01} = \varkappa\rho v_x/c.$$

Если на отдельное измерение импульса затрачивается промежуток времени Δt (*при этом должно быть* $\Delta t \ll T$), то неопределенность величины h_{01}, связанная с неопределенностью скорости отдачи $v_x \sim \Delta x/\Delta t$, имеет порядок

$$\Delta h_{01} \sim \varkappa\rho \frac{\Delta x}{c\Delta t}(c\Delta t)^2 = \varkappa c\rho\,\Delta x\Delta t,$$

и согласно (3) неопределенность напряженности гравитационного поля

$$\Delta\Gamma_{1,00} \sim \varkappa\rho\Delta x.$$

Соответствующая неопределенность импульса, связанная с собственным гравитационным полем пробного тела, имеет тогда порядок

$$(\Delta p_x)_2 \sim c^2\rho V\Delta\Gamma_{1,00}\cdot\Delta t = c^2\varkappa\rho^2 V\Delta x\Delta t.$$

Таким образом, общая неопределенность импульса

$$\Delta p_x = (\Delta p_x)_1 + (\Delta p_x)_2 \sim \hbar/\Delta x + c^2\varkappa\rho^2 V\Delta x\Delta t. \tag{5}$$

Чтобы сделать эту неопределенность минимальной, нужно, как следует из (5), выбрать

$$\Delta x = (\hbar/\varkappa c^2\rho^2 V\Delta t)^{1/2}. \tag{6}$$

Тогда

$$(\Delta p_x)_{\min} \sim (\hbar \varkappa c^2 \rho^2 V \Delta t)^{1/2} ,$$

$$(\Delta \Gamma_{1,00})_{\min} \sim \frac{1}{c^2 T} \left(\frac{\hbar \varkappa c^2 \Delta t}{V} \right)^{1/2} . \tag{7}$$

Продолжительность измерения импульса Δt ограничивается снизу двумя условиями. Во-первых, должно быть $\Delta t > \Delta x / c$, чтобы скорость отдачи, вызванной измерением импульса, была меньше скорости света. Отсюда и из (6) следует

$$\Delta t > \tau_1 = (\hbar / \varkappa c^4 \rho^2 V)^{1/3} . \tag{8}$$

Во-вторых, из самого смысла измерения поля в объеме V следует, что величина Δx должна быть меньше размеров пробного тела: $\Delta x < V^{1/3}$. Учитывая (6), получим

$$\Delta t > \tau_2 = \hbar / c^2 \varkappa \rho^2 V^{5/3} . \tag{9}$$

Получив эти две нижние границы для Δt, Бронштейн отмечает, что отношение первой из них ко второй

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{c \varkappa \rho^2 V^2}{\hbar} \right)^{2/3} \equiv \left(\frac{c \varkappa m^2}{\hbar} \right)^{2/3} \tag{10}$$

«зависит от массы пробного тела, будучи совершенно ничтожной величиной в случае электрона и становясь величиной порядка 1 в случае пылинки, весящей сотую долю миллиграмма» [21и]. Для неопределенностей $\Delta \Gamma_{1,00}$ получаются соответственно две границы

$$(\Delta \Gamma_{1,00})_{\min 1} \gtrsim \frac{1}{c^2 T} \left(\frac{\hbar^2 \varkappa c}{\rho V^2} \right)^{1/3} ; \tag{11а}$$

$$(\Delta \Gamma_{1,00})_{\min 2} \gtrsim \frac{\hbar}{c^2 T \rho V^{4/3}} . \tag{11б}$$

Поскольку, как видно отсюда, для возможно более точного измерения $\Gamma_{1,00}$ в данном объеме V следует применять пробные тела возможно большой массы (плотности), то существенной становится только первая граница.

Бронштейн указывает, что предыдущие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям в квантовой электродинамике. При этом он ссылается на работу [21е] (см. § 5.3) и пишет: «Но на этом месте приходится принять во внимание обстоятельство, из которого обнаруживается принципиальное различие между квантовой электродинамикой и квантовой теорией гравитационного поля. Различие это заключается в том, что в формальной квантовой электродинамике, не учитывающей структуры элементарного заряда, нет никаких принципиальных причин, ограничивающих увеличение плотности ρ. При достаточно большой плотности заряда пробного тела точность измерения компонент электрического поля может быть сделана какой угодно. В природе, вероятно, существуют принципиальные ограничения плотности электрического заряда (не больше одного элементарного заряда на объем с линейными размерами порядка классического электронного радиуса), однако эти ограничения не учитываются формальной квантовой электродинамикой... Не то — в квантовой теории гравитационного поля: она должна считаться с ограничением, вытекающим из того, что гравитационный радиус пробного тела ($\varkappa\rho V$) не может превосходить его действительных линейных размеров

$$\varkappa\rho V < V^{1/3} \text{»}. \tag{12}$$

Если это учесть, то (1) дает «абсолютный минимум неопределенности»

$$\Delta\Gamma_{1,00} > \frac{1}{c^2 T}\left(\frac{\hbar^2\varkappa^2 c}{V^{4/3}}\right)^{1/3}.$$

Бронштейн, конечно, понимает, что этот «абсолютный предел вычислен очень грубо, потому что при достаточно большой массе измерительного прибора начнут, вероятно, играть роль отступления от принципа суперпозиции...», однако он считает, что «аналогичный результат сохранится и в более точной теории, так как он нисколько сам по себе не вытекает из принципа суперпозиции, а соответствует лишь тому факту, что в общей теории относительности не может существовать тел сколь угодно большой массы при заданном объеме. В электродинамике нет никакой аналогии этому факту...., вот почему квантовая электродинамика возможна без внутренних противоречий». Поскольку для гравитации эта трудность не может быть обойдена, Бронштейн приходит к фундаментальному выводу:

«Устранение связанных с этим логических противоречий требует радикальной перестройки теории и, в частности, отказа от римановой геометрии, оперирующей, как мы здесь видим, принципиально [не] * наблюдаемыми величинами — а может быть и отказа от обычных представлений о пространстве и времени и замены их какими-то гораздо более глубокими и лишенными наглядности понятиями. Wer's nicht glaubt, bezahlt einen Taler» **.

Именно так впервые были обнаружены пределы применимости общей теории относительности — неквантовой релятивистской теории гравитации.

---

* В тексте пропущено «не» — явная опечатка, сохраненная, к сожалению, и в сборнике [5], в котором помещена часть статьи М. П. Бронштейна.

** Немецкая фраза, которой Бронштейн (по-видимому, вместо восклицательного знака) заканчивает параграф статьи в ЖЭТФе, в буквальном переводе означает: «Кто этому не верит, тот платит талер». Эта фраза представляет собой измененное с помощью отрицания nicht идиоматическое выражение, которое, в свою очередь, означает: «Кто этому верит, с того талер за доверчивость».

Само существование таких пределов предвиделось и раньше — достаточно вспомнить замечание Эйнштейна 1916 г. о том, что квантовая теория должна модифицировать теорию гравитации, неудовлетворенность Эйнштейна тем, что «линейки и часы», используемые в построении ОТО, рассматривались безо всякого учета их микроскопического строения, упоминавшееся замечание О. Клейна 1927 г. и т. д. Однако все такие соображения имели логический или методологический характер. В отличие от этого бронштейновский анализ проведен на физическом, количественном языке.

Единственное, чего может не хватать современному читателю, так это явного указания на роль планковских величин, как квантовых границ области применимости ОТО. Однако неявно такие величины, конечно, у Бронштейна есть, поскольку в анализ вовлечены все три константы c, G, $\hbar$. Рассуждения Бронштейна легко дополнить так, чтобы планковские величины возникли и явным образом. Собственно одна такая величина — планковская масса — появилась уже в тексте Бронштейна. Это та самая «пылинка, весящая сотую долю миллиграмма», для которой неопределенности (8) и (9) имеют одинаковый порядок (в статье [21з] выписано даже явное выражение для планковской массы).

Чтобы планковские величины «проявились», можно, например, рассуждать так. Будем стремиться измерять напряженность гравитационного поля не только с наименьшей неопределенностью, но и в наименьшем возможном объеме (ведь в ОТО считается имеющим смысл понятие «поле в данной точке»). Тогда уже придется рассматривать обе границы (8) и (9), а не только первую из них. Для уменьшения неопределенности $\Delta\Gamma_{1,00}$ надо использовать максимально возможную плотность пробного тела; в силу (12) это

$$\rho = \varkappa^{-1} V^{-2/3}.$$

Тогда границы (8) и (9) превращаются в

$$\tau_1 = (c^{-4} \varkappa \hbar V^{1/3})^{1/3}, \tag{8a}$$

$$\tau_2 = c^{-2} \varkappa \hbar V^{-1/3}. \tag{9a}$$

По самому смыслу измерения напряженности, усредненной за промежуток времени T, должно выполняться, как уже отмечалось, условие $\Delta t \ll T$. Поэтому, при данном T следует стремиться к наименьшему возможному Δt. Так как τ_1 уменьшается с уменьшением V, а τ_2 растет, минимальное значение наибольшей из величин τ_1, τ_2 достигается при $\tau_1 = \tau_2$. Тогда

$$\tau_1 = \tau_2 = (c^{-3} \varkappa \hbar)^{1/2} = t_{\text{пл}}.$$

При этом соответствующие размеры пробного тела

$$l = V^{1/3} = (c^{-1} \varkappa \hbar)^{1/2} = l_{\text{пл}},$$

его масса

$$m = \rho V = (c^{-1}\varkappa^{-1}\hbar)^{1/2} = m_{\text{пл}},$$

и, наконец, минимальная неопределенность

$$(\Delta\Gamma)_{\min} = 1/cT.$$

Если же мы учтем, что неопределенность в измерении гравитационного поля следует оценивать по суммарному воздействию на пробное тело — работе напряженности на расстоянии порядка размеров тела $\Delta g \equiv \Delta\Gamma \cdot V^{1/3}$ (нетрудно понять, что эта же величина описывает неопределенность метрики), то получим

$$\Delta g = l_{\text{пл}}/cT.$$

Таким образом, область применимости классической теории гравитации ограничивается, действительно, планковскими величинами.

Вместе с тем, планковские величины ограничивают и применимость римановой непрерывной геометрии для описания свойств пространства-времени. Взаимосвязь проблемы квантования гравитации с применимостью классического пространственно-временного описания обнаружил впервые, как мы видели, М. П. Бронштейн в 1935 г. Если бы даже он и знал (планковскую) величину квантово-гравитационных границ применимости пространственно-временного описания, нелегко было в 30-е годы решиться говорить об этих границах. Величины 10^{-33} см и 10^{-5} г ($=10^{19}$ ГэВ) фантастически далеки от насущных для физики того времени величин ядерных масштабов 10^{-13} см и 1 ГэВ. Вот, например, характерное высказывание Гейзенберга 1930 г.: «Часто высказывается надежда, что квантовая теория после разрешения только что названных проблем [связанных с релятивистской формулировкой квантовой теории], может быть, снова будет в значительной степени сведена к классическим понятиям. Но даже поверхностный взгляд на развитие физики за последние тридцать лет показывает нам, что скорее, наоборот, можно ожидать еще более широких ограничений классического мира понятий. В добавление к изменениям нашего обыкновенного пространственно-временного мира, которые были потребованы теорией относительности и для которых характерна постоянная c и к соотношениям неопределенности квантовой теории, символом которых может служить планковская постоянная h, появятся еще другие ограничения, стоящие в связи с универсальными постоянными e, μ [масса электрона], M (масса протона)» [37, с. 79]. Это высказывание вполне отражало общественное мнение в физике 30-х годов. Если же в прогнозе Гейзенберга вместо e, μ, M подставить G, то едва ли это нашло бы сочувствие у кого-нибудь в те годы. В частности, потому, что тогда не было идей, которые могли хотя бы эскизно соединить величины 10^{-33} см и 10^{-13} см (такие идеи появились только совсем недавно). И тем не менее для замены набора c, h, e, μ, M на c, h, G, как следует из бронштейновского анализа, были веские причины.

Фундаментальный результат Бронштейна о принципиальной ограниченности понятий ОТО, обусловленной квантовыми эффектами, по-видимому, не был оценен в полной мере. Во всяком случае В. А. Фок, довольно подробно прореферировавший статью Бронштейна для центрального европейского реферативного журнала, ограничился лишь неопределенной фразой: «...развиты некоторые соображения об измеримости величины поля» [123а].

А на защите диссертации Фок высказался по этому поводу даже несколько критически. Выступив сразу после диссертационного доклада Бронштейна, он сказал:

«Работа М[атвея] П[етровича] — первая работа по квантованию гравитационных волн, в которой дело доведено до получения физических результатов. В работе Розенфельда, посвященной тому же вопросу, содержатся лишь общие математические результаты.

В работе М. П. проведено исследование гравитационных волн в инвариантном виде, и, далее, доведено до конца квантование. Большой интерес имеет здесь аналогия между волнами гравитационными и электромагнитными. Эта аналогия дала возможность использовать аппарат электродинамики, но, помимо этого факта, она представляет интерес с физической стороны. Уравнение Эйнштейна — нелинейные — представляют достаточно хорошее приближение. Здесь же, с одной стороны, использована нелинейная теория, затем проведена линеаризация и, наконец, квантование.

В электродинамике у нас пока нет нелинейной теории, обобщение на нелинейную лишь начинается. Работа М. П. представляет поэтому интерес в том отношении, что она может пролить свет на соотношение между линейной теорией и нелинейной.

Что касается вопроса об измерении гравитационного поля, то здесь опять имеется положение, аналогичное соответствующему положению в электродинамике. Введение гравитационного радиуса здесь может вызвать те же возражения, что и в электродинамике.

Результаты, полученные М. П., бесспорны, и поэтому я могу на этом закончить».

М. П. Бронштейн на это ответил:

«Аналогия между нелинейной теорией гравитации и нелинейной электродинамикой и теорией Борна — Инфельда мне представляется спорной. Именно, нелинейная электродинамика унитарна, а общая теория относительности не унитарна. Я не думаю, что из сравнения настоящей теории с общей теорией относительности можно вывести большие следствия» [10а].

Оценка ситуации Бронштейном была, несомненно, точнее. Он совершенно правильно указал на глубокое различие между нелинейной теорией гравитации (ОТО) и нелинейной электродинамикой

Борна — Инфельда. Это различие не сводится к унитарности, которую упомянул Бронштейн. (В те годы унитарной теорией поля называли теорию, в которой частица — это особая точка поля, а ее масса — энергия поля, связанная с особой точкой. При этом обычные теории назывались дуалистическими, поскольку в них понятия поля и частицы были независимыми [18, с. 717].)

Не менее важным было различие характеров нелинейности в ОТО и в теории Борна — Инфельда. Нелинейность ОТО в большой степени однозначна. Физическая причина этой нелинейности, как известно, — принцип эквивалентности. В то же время нелинейный лагранжиан теории Борна — Инфельда был «сделан руками»:

$$L_{\mathrm{BI}} = \varepsilon^{-1}(1 + \varepsilon L_{\mathrm{M}})^{1/2},$$

где L_{M} — обычный линейный, максвелловский лагранжиан, ε — малая константа. Сам тип нелинейности не следовал из каких-либо глубоких физических соображений. Теория Борна — Инфельда была нацелена специально на проблему бесконечной собственной энергии электрона, а лагранжиан выбирался так, чтобы этой проблемы не возникало уже на классическом уровне. При этом классический радиус электрона $r_e = e^2/mc^2$ появлялся только как характерное расстояние, начиная с которого поведение поля $E \sim e/(r^4 + r_0^4)^{1/2}$ существенно отклонялось от кулоновского; здесь $r_0 \sim r_e$.

Поэтому трудно согласиться с Фоком в том, что имеется аналогия между радиусом электрона, который появлялся в теории Борна — Инфельда (и который, по-видимому, имел в виду Фок), и гравитационным радиусом, существование которого связано с фундаментальным физическим фактом равенства гравитационной и инертной масс, или с теоретическим выражением этого факта — принципом эквивалентности.

К анализу пределов применимости ОТО, проведенному Бронштейном, нельзя предъявлять претензии в недостаточной строгости, так как вполне понятно, что точное описание области применимости ОТО мог бы дать только анализ, проведенный в рамках (пока еще не существующей) полной квантовой теории гравитации.

Следует заметить, что и в наше время проблема измеримости гравитационного поля так же, как и вопрос о гравитационном излучении атомных электронов, о котором говорил Эйнштейн, отнюдь не являются задачами прикладного значения. Однако, когда речь идет (по выражению Эйнштейна) о «внутреннем совершенстве» теории, физики имеют право рассматривать все не запрещенные самой теорией возможности. Поскольку в самой теории гравитации нет запретов на рассмотрение атома и квантовых систем вообще, то величина эффекта не имеет значения для анализа теории средствами самой теории. И анализ измеримости гравитационного поля — это, конечно, лишь некоторая форма проверки внутреннего совершенства теории *. Однако история физики показывает, что только теории высокого внутреннего совершенства достигали особенно значительного «внешнего оправдания», преобразуя технику и жизнь человеческого общества вообще.

Как известно, в настоящее время проблема построения квантовой теории гравитации не стоит изолированно от других важнейших проблем физики, а составляет, по-видимому, главную часть проблемы построения единой теории фундаментальных взаимодействий. Таким образом, путь, на который вступил Бронштейн, вел в самый центр исследований современной физики.

5.5. ПЛАНКОВСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ

На протяжении двух десятилетий, последовавших за работой Бронштейна, в области квантования гравитации было затишье. С конца 40-х годов начали, правда, появляться работы по каноническому квантованию общековариантных теорий поля [13б], однако в них не рассматривались ни вопрос об описании условий, при которых учет квантово-гравитационных эффектов стал бы необходим, ни вопрос о пределах применимости обычной схемы квантования к гравитационному полю. (При рассмотрении, например, космологического прошлого иногда считалось «особым», требующим учета квантовой теории тяготения, уже ядерное состояние вещества с плотностью $\sim 10^{14}$ г/см^3 [Иваненко, 1947].) И только в середине 50-х годов почти одновременно в нескольких работах и в разных обличьях появилась длина $l_0 = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ (при этом имя Планка и его работа 1899 г. вначале не упоминались).

В статье О. Клейна 1954 г. и в его докладе на Бернской конференции 1955 г. [64б, в] длина l_0 появилась как одна из естественных единиц при рассмотрении простейших гравитационной и кулоновской «планетных» систем, а также квантового соотношения $E = h\nu$. Однако более интересным было замечание Клейна о том, что длина l_0 соответствует *гравитационной границе области применимости спецрелятивистской квантовой теории.* К этому выводу он пришел следующим образом. Частица, представленная волновым пакетом в объеме λ^3, имеет энергию $\sim \hbar c/\lambda$ и массу

* Впрочем, Бронштейна занимало не только внутреннее совершенство теории. На защите В. К. Фредерикс задал ему вопрос: «В чем может сказаться физический эффект испускания гравитационных волн?» Ответ Бронштейна был краток: «Это может быть замечено, например, в замедлении вращения двойных звезд» [10а]. Эти слова (прозвучавшие, напомним, в 1935 г.) стоит сопоставить с первым считающимся достоверным хотя и косвенным свидетельством о существовании гравитационного излучения в 1979 г. Именно такой эффект был обнаружен в двойном радиопульсаре PSR 1913+16 (Taylor J. H. et al — «Nature», 1979, v. 277, p. 437).

$\sim\hbar/c\lambda$ (если $\lambda\ll\lambda_{\text{compt}}\equiv\hbar/mc$, т. е. если частица релятивистская). Тогда разность гравитационных потенциалов в центре и на краю волнового пакета $\Delta\varphi\sim G\hbar/c\lambda^2$ мало изменит метрику, только если $\Delta\varphi\ll c^2$ (поскольку компоненты метрического тензора $g_{ik}\sim 1+$ $+\varphi/c^2$), т. е. если $G\hbar/c\lambda^2\ll c^2$, или $\lambda\gg(G\hbar/c^3)^{1/2}=l_0$.

Длина l_0 возникла и в связи с проблемами физики элементарных частиц. Еще в 1947 г. М. А. Марков обратил внимание на то, что квантовоэлектродинамический «радиус» электрона $r_0\sim$ $\sim(\hbar/m_e c)\exp(-\hbar c/e^2)\sim 10^{-70}$ см оказывается на пятнадцать порядков меньше гравитационного радиуса электрона; таким образом, пренебрежение гравитационными эффектами оказывается незаконным [82а]. Величина $l=G^{1/2}\hbar/ce=\alpha^{-1/2}l_0$, практически близкая к планковской длине (отличающаяся от нее множителем, равным корню из постоянной тонкой структуры $\alpha=e^2/\hbar c$), появилась в работе Л. Д. Ландау, А. А. Абрикосова и И. М. Халатникова 1954 г. [71а, т. 2, с. 206] как *граница области, вне которой квантовая электродинамика не может считаться замкнутой теорией из-за необходимости учета гравитационного взаимодействия* (такая величина появляется при сравнении гравитационного взаимодействия двух ультрарелятивистских электронов Gm^2/r, где $m\sim p/c\sim\hbar/lc$, с их кулоновским взаимодействием e^2/r).

На это обратил внимание В. Паули, под редакцией которого в 1955 г. вышел сборник со статьей Ландау [71б]. При обсуждении доклада Клейна на Бернской конференции Паули предположил, что существует связь между неприменимостью традиционных методов для квантования гравитации (вследствие неопределенности на световом конусе) и известными проблемами расходимости в квантовой теории поля [91а; г, с. 201]. Это замечание, встретившее поддержку и других физиков, стимулировало интерес к теории квантовой гравитации.

Первой и наиболее известной среди работ, в которых был указан *квантово-гравитационный* смысл величины $l_0=(G\hbar/c^3)^{1/2}$, оказалась статья Дж. Уилера [1955] «Геоны». Основным объектом рассмотрения в этой статье были гравитационно-электромагнитные образования (геоны), которые представлялись как стоячая электромагнитная волна или пучок света, заключенные в тороидальном объеме и удерживаемые благодаря собственному гравитационному полю. В частности, Уилер поставил вопрос о диапазоне значений параметров, в котором геон может рассматриваться классически. Из размерных соображений он получил выражения для параметров геона через характерную величину действия A, константы c, G и азимутальное число n (количество длин волн в стоячей волне):

$$\begin{aligned}&\text{масса } m\sim n^{1/2}(Ac/G)^{1/2},\\ &\text{радиус } r\sim n^{1/2}(AG/c^3)^{1/2},\\ &\text{длина волны } \lambda\sim n^{-1/2}(AG/c^3)^{1/2},\end{aligned}\qquad(13)$$

плотность $\rho \sim nc^5/G^2A$,

величина электрического поля $E \sim (nc^7/G^2A)^{1/2}$ и т. д.

Затем Уилер последовательно рассматривает следующие ограничения на возможность классического описания:

1) действие $A \sim \hbar$, тогда из (13) следует $r \sim n^{1/2}10^{-33}$ см, $m_1 \sim \sim n^{1/2}10^{-5}$ г;
2) длина волны $\lambda \sim \hbar/mc$ (комптоновская длина волны электрона), тогда из (13) следует $m_2 \sim n\, 10^{18}$ г;
3) плотность $\rho \sim 10^{14}$ г/см^3 (ядерная плотность), тогда в силу (13) $m_3 \sim n\, 10^{35}$ г;
4) величина электрического поля $\sim E_{\text{кр}} = m^2c^3/e\hbar$ (поле, в котором могут рождаться электрон-позитронные пары), тогда в силу (13) $m_4 \sim n\, 10^{39}$ г.

Огромную величину m_4 (а не планковскую массу m_1) Уилер и принимает в качестве нижнего предела для классического геона.

Вместе с тем в статье Уилера содержатся также оценки флуктуаций гравитационного поля (метрики) Δg_{ik} в зависимости от характерных пространственных масштабов L. Используя фейнмановскую форму квантования (суммирование по траекториям), Уилер получает, что флуктуации метрики $\Delta g_{ik} \sim (G\hbar/c^3)^{1/2}L$ становятся существенными, когда $L \sim (G\hbar/c^3)^{1/2}$. Итак, длина $(G\hbar/c^3)^{1/2}$, как оказалось, соответствует *квантовым границам классической общей теории относительности*. Именно этот подход стал впоследствии наиболее популярным.

Ставшее сейчас общепринятым название «планковские величины» Уилер ввел несколько позже (впервые о Планке в этой связи было упомянуто в статье Мизнера и Уилера 1957 г. [119б, с. 219, с. 192]) *.

Таким образом, только в середине 50-х годов стало известно квантово-гравитационное значение планковских величин. Однако не следует думать, что для этого, действительно, было необходимо дожидаться фейнмановского способа квантования или даже просто завершенного аппарата квантовой механики. На самом деле характерные планковские масштабы для квантово-гравитационных явлений можно было обнаружить уже с помощью квантового постулата Бора 1913 г.

Действительно, рассмотрим простую систему, состоящую из двух точечных частиц массы m, связанных гравитационным взаимодействием и движущихся по круговой орбите радиуса r. Подчиним эту систему классической механике $ma = mv^2/r = Gm^2/(2r)^2$ и квантовому постулату Бора $2mvr = n\hbar$, $n = 1, 2, \dots$. Чтобы выяснить, при каких значениях параметров системы m и r ее описание должно существенно учитывать квантовые и релятивистские эффекты, нужно положить, что n достаточно близко к единице (ска-

---

* Как вспоминает Дж. А. Уилер (в письме автору от 10.2.1981), в 1955 г. он не знал о введенных Планком «естественных единицах».

жем, $1 \leqslant n \leqslant 2$) и скорость v достаточно близка к скорости света (скажем $c/2 < v < c$). Эти два неравенства в данном случае примут вид

$$c/2 < {}^1/_2 (Gm/r)^{1/2} < c,$$

$$1 \leqslant (Gm^3r)^{1/2}/\hbar \leqslant 2.$$

В результате получаем, что квантово-гравитационной области соответствует одновременная близость m и r к их планковским значениям (рис. 5.2).

Такой вывод до создания квантовой механики был бы не более «незаконным», чем указанные выше рассуждения Клейна и Уиле-

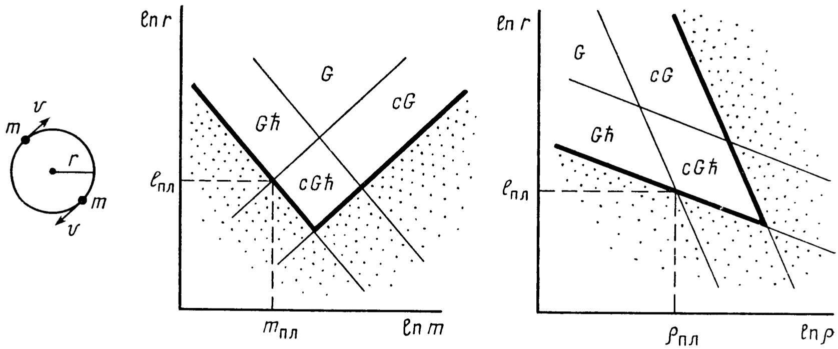


Рис. 5.2. Границы области квантово-гравитационных явлений ($cG\hbar$), полученные с помощью ньютоновского закона тяготения и квантового постулата Бора в координатах m, r и ρ, r (в логарифмической шкале). Точками обозначена область «невозможных» значений параметров, G — область ньютоновской теории тяготения, cG — область ОТО, $G\hbar$ — нерелятивистская квантово-гравитационная область (фиктивная из-за игнорирования всех негравитационных взаимодействий)

ра, поскольку точное установление границ применимости некоторой теории до создания более общей теории является, строго говоря, невыполнимой задачей. Однако реально исторически планковские границы квантово-гравитационной области были обнаружены спустя четыре десятилетия после того, как они могли быть обнаружены. Этот факт нельзя объяснить всего лишь малостью квантово-гравитационных эффектов; несмотря на внушительное расширение диапазона изучаемых экспериментальной физикой явлений по пространственным масштабам с 10^{-8} до 10^{-13} см (в 50-е годы) квантово-гравитационная длина 10^{-33} см по существу не приблизилась. Ведь и первый, эйнштейновский, аргумент о необходимости синтеза квантовых и гравитационных представлений опирался на рассмотрение количественно совершенно ничтожного гравитационного излучения атома (см. § 5.2).

Биография планковских величин дает интересный материал для размышлений о своевременности и несвоевременности научных открытий, о роли творческой личности в истории науки.

Но в настоящее время планковские величины имеют гораздо большее отношение к самой физике, чем к ее истории. Кроме проблем построения квантовой теории гравитации и базирующейся на ней космологии ранней Вселенной планковские величины упоминаются в связи с современной ситуацией в физике элементарных частиц. В центре внимания здесь находится, в частности, возможная нестабильность протона. Обсуждаемое время жизни протона $\sim 10^{39}$ с соответствует существованию элементарных частиц с необычайно большой массой $\sim 10^{16}\ m_p$, где m_p — масса протона. Чтобы обосновать неабсурдность такого рода величины, указывают прежде всего на значение массы $10^{19}\ m_p$. «Этот предел, — пишет С. Вайнберг [25б], — известен как планковская масса, так как Макс Планк в 1900 г. заметил, что эта масса естественным образом появляется при любой попытке комбинирования его квантовой теории с теорией гравитации. Приблизительно планковская масса эквивалентна энергии, при которой гравитационное взаимодействие между частицами становится сильнее, чем электрослабое или сильное взаимодействия. Чтобы избежать внутренних противоречий между квантовой механикой и общей теорией относительности, при энергии около 10^{19} протонных масс должны появиться некоторые качественно новые эффекты».

Начало приведенной цитаты, более чем вольно обращающееся с фактами истории физики, говорит об уместности описания реальных историко-научных контекстов, в которых возникала планковская масса. Как мы видели, Планк, вводя в 1899 г. массу $(c\hbar/G)^{1/2} \approx 10^{19}\, m_p$, не только не помышлял о комбинировании квантовой теории с теорией гравитации, но даже не подозревал, что обнаруженная им новая физическая константа приведет к появлению новой физической теории. При комбинировании квантовой теории с теорией гравитации и с указанем на «качественно новые эффекты» планковская масса появилась впервые в работе М. П. Бронштейна 1935 г. и, двадцать лет спустя, в работах Дж. Уилера и О. Клейна 1954 г. В том же 1954 году Л. Д. Ландау обратил внимание на то, что планковская энергия соответствует уравниванию гравитационного и электромагнитного взаимодействий.

В современной же физике все более крепнет убеждение, что участие планковских величин в квантовой гравитации, в космологии и в физике элементарных частиц будет следствием решения одной проблемы — построения единой теории всех фундаментальных взаимодействий. Как считается, планковская масса соответствует той области энергий, где интенсивности всех фундаментальных взаимодействий становятся сравнимы.

5.6. ИСТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И КОНСТАНТЫ c, G, $\hbar$

Для получения планковских величин в 1899 г. понадобились по существу только фундаментальные константы, а не какие-либо сложные теоретические конструкции. Только спустя много десятилетий выяснилась особая роль этих величин в теоретической физике. Поэтому рассмотрим внимательнее положение фундаментальных констант в структуре физики в ее историческом развитии.

Фундаментальные константы и их роль в физике привлекали внимание не только Планка. Так, например, Паули в статье 1936 г. [91г, с. 7] рассматривал тогдашнее состояние физики на основе анализа роли, которую играют в структуре физики константы c, G, $\hbar$.

Однако к нашему обсуждению гораздо большее отношение имеет статья, появившаяся в ЖРФХО в 1928 г. и сейчас почти не известная. Статья называлась «Мировые постоянные и предельный переход»; авторами ее были совсем еще молодые Г. Гамов, Д. Иваненко и Л. Ландау.

Статья начинается с чисто методического, казалось бы, вопроса о построении системы единиц. Авторы отметили, что есть два способа установления единицы измерения для какой-либо новой величины. Во-первых, можно задать эталон для этой величины произвольно. Во-вторых, пользуясь каким-либо законом, связывающим новую величину с уже известными и содержащим численный коэффициент, можно подобрать эталон так, чтобы этот коэффициент обратился в единицу. В первом случае получается новая мировая постоянная. Во втором случае число основных (произвольных) эталонов и число мировых констант остаются неизменными: «мы получаем лишь естественную (по отношению к предыдущим) единицу для измерения нашей величины».

Можно воспользоваться вторым способом и для уменьшения числа основных единиц, положив одну из мировых констант равной единице. Этот процесс авторы назвали редукцией. По их мнению: «Введение новых постоянных и редукция к меньшему числу отобразились в истории физики как смена теорий и их постепенное объединение».

Для полной редукции (т. е. доведения числа эталонов до нуля) необходимо использовать столько независимых мировых констант, сколько основных единиц содержит данная система единиц. Поскольку физических констант существует довольно много, а наиболее применяемой в физике является LMT-система размерностей, то возникает вопрос, какие три из всех констант следует выбрать. Авторы предлагают руководствоваться «двумя эвристическими положениями»: 1) степень общности теории, которую представляет данная константа, 2) проба постоянной на предельный переход. Второе положение соотносится с цепочкой «классическая теория — «вульгарная» теория — законченная теория».

В результате авторы приходят к выводу, что за «истинные» следует принять постоянные $\hbar$, c^{-1}, G. Тогда можно, следуя Планку (как отмечают авторы), перейти к физике без размерностей, получив «естественные» единицы для всех физических величин.

Такое рассмотрение приводит авторов к любопытному практическому выводу, касающемуся одной из важнейших для физики того времени проблем: «не имея еще теории электрона, можно, однако, на основании теории размерностей вывести некоторое заключение о характере этой теории». Так как $[e]=([\hbar][c])^{1/2}$, $[m]=([\hbar][c]/[G])^{1/2}$, то «обречены на неудачу часто производимые попытки построить теорию неквантового электрона в общей теории относительности» ($\hbar=0$; $c\neq\infty$, $G\neq 0$, откуда $e=0$, $m=0$).

Так кончается эта заметка в ЖРФХО, довольно странная для всех трех ее авторов. Ни у кого из них в более поздних работах не удается отыскать каких-либо «воспоминаний» об этой заметке *. Совершенно не характерна для них также ее «нерезультативность», методологичность. Пожалуй, естественнее всего было бы обнаружить среди авторов заметки того, ... кого там нет, но кто был в очень близких отношениях со всеми тремя молодыми теоретиками — М. П. Бронштейна **. Действительно, вспомним работы Бронштейна 30-х годов, о которых говорилось в § 5.3, его схему взаимоотношения физических теорий.

Дальнейшее развитие такого анализа принадлежит А. Л. Зельманову [1967], который, можно сказать, ввел в «пространство физических теорий» $cG\hbar$-систему координат. О его кубе теорий будет рассказано в § 8.1 в связи с рассмотрением эволюции взаимоотношений геометрии и физики.

Изменяющееся положение отдельных фундаментальных констант в структуре физики отражало историческое развитие физики в целом. Выражение «фундаментальная константа» имеет не вполне определенный смысл. Степень фундаментальности данной константы зависит от уровня развития физики, и даже в одно и то же время различные физики могут оценивать ее по-разному в зависимости от своих исследовательских программ, от собственных оценок ситуации в физике. Скажем, сейчас сторонник гипотезы о переменности гравитационной константы не признáет G фундаментальной константой, приверженец единой теории (в форме суперобъединения) может считать константу e не фундаментальной, в отличие от c, G, $\hbar$, а физик-«нетеоретик» может считать e и G одинаково фундаментальными. Так что отношение к некоторой константе зависит не только от ее прошлого и на-

---

* Гамов впоследствии даже исключил G из числа «истинных констант» [34, p. 157].

** В знаменитой «джаз-банд» кроме Джонни, Димуса, Дау (Гамова, Иваненко, Ландау) входил Аббат (Бронштейн) [76, с. 17—18].

стоящего (в структуре физики), но и от будущего, т. е. от прогноза ее роли в будущей теории.

Физические константы, включаемые обычно в таблицы «универсальных» или «фундаментальных» постоянных, имеют весьма различные биографии и играют различные роли в структуре физики. Их можно разделить следующим образом:

1) коэффициенты, связывающие различные единицы измерения;

2) параметры фундаментальных физических объектов, не сводимые к другим величинам с точки зрения *современной* физики;

3) постоянные, с помощью которых формулируются наиболее общие на данный момент (т. е. не сводимые к другим) физические теории, или законы природы.

Такое разделение констант на три типа имеет прежде всего исторический характер. Первый тип принадлежит прошлому. Однако входящие в него константы — свидетельства не только довольно произвольных метрологических реформ (отношение вершка к метру), но и грандиозных событий в истории физики, например, механический эквивалент тепла J, связывающий сейчас лишь две единицы энергии (джоуль и калорию), возник вместе с законом сохранения энергии и выяснением механической природы тепла. В соответствии с идеалом Единой теории удел констант типа 2 — быть сведенными к константам типа 3, а удел констант типа 3 — быть интегрированными в Единой теории. Наряду с идеалом Единой теории в современной физике обсуждается и возможность «случайного», вероятностного происхождения значений фундаментальных констант. Эта возможность, тесно связанная с так называемым антропическим принципом (см. § 8.2), не имеет еще научной формулировки. С «антропической» точки зрения из констант типа 2 и 3 должен быть выделен набор независимых (безразмерных) констант, величины которых придется считать случайными (в неизвестном пока смысле).

Однако всякое обсуждение физических констант приобретает определенность только после фиксации *системы измерений*. В систему измерений следует включать, во-первых, перечень физических величин, называемых основными и имеющих собственные независимые эталоны, и, во-вторых, совокупность операциональных, «измерительных» определений всех других физических величин с помощью основных *. Принципиальная неоднозначность системы измерений существует не только теоретически, но и проявилась реально исторически в установлении различных систем измерений.

Для анализа вопроса о фундаментальных константах полезно начать с «максимальной» системы единиц измерения, в которой

* Только после этого для каждой физической величины можно говорить о ее размерности (которая выражает зависимость численного значения данной величины от изменения величин основных единиц).

для каждой физической величины используется свой эталон и, соответственно, единица измерений. Затем с помощью современной структуры физической картины мира, но *не используя каких-либо привязок к конкретным физическим объектам и явлениям*, получаем минимальный набор основных физических величин и единиц измерения. Количество основных единиц зависело от уровня развития физики. Для ньютоновской механики оно было равно *трем* (исторически закрепилась *LMT*-система единиц как наиболее употребительная).

Один из важнейших этапов в развитии физики, завершившийся во второй половине 19 в., составило разрушение автономии отдельных областей физики: электричество, магнетизм, оптика, тепло. В результате такого объединения для классической физики в целом также оказалось достаточным *трех* основных единиц, в качестве которых можно (хотя и не обязательно) использовать механические — *LMT*. Более того, такая *трехразмерность* совокупности физических величин осталась в силе и после освоения квантово-релятивистской области физических явлений *.

Уже не раз подчеркивалась зависимость рассматриваемых вопросов от историко-научного времени **. В связи с экспериментальными открытиями и главным образом в связи с изменениями в теоретической физике менялся не только список физических постоянных, но и представление об их характере. Например, в 19 в. плотность какого-нибудь вещества (при заданных условиях) вполне могла считаться фундаментальной физической постоянной. Однако сейчас ясно, что, во-первых, такая величина, завися от изотопного состава, является функцией космологической и даже геологической истории, и, во-вторых, плотность отдельного изотопа может быть сведена (в принципе) к атомным константам.

Существенно изменилось также понимание физических констант, фундаментальных и с современной точки зрения. Такие константы вошли в физику в разное время и при весьма различных обстоятельствах: скорость света c (1676, О. Ремер), гравитационная константа G (1798, Г. Кавендиш), элементарный электрический заряд e (1874, Дж. Стоней), масса электрона m_e (1897, Дж. Дж. Томсон), постоянная Планка h (1899), ...

Факт трехразмерности совокупности всех физических величин, т. е. необходимость и достаточность трех основных единиц для

* Достаточность единиц классической макроскопической физики для всей физики в целом связана с той особой ролью, которую играет классическая физика в квантово-релятивистской физике. Эта роль, как известно, определяется тем, что всякая экспериментальная, измерительная установка в качестве выходного устройства должна иметь макроскопический объект [72 в].

** Эта зависимость подробно обсуждается в статье [75], выводы которой, впрочем, существенно отличаются от приводимых здесь; в частности, в этой статье константа G по положению считается в принципе не отличающейся от J (механического эквивалента тепла) и отличающейся от c и $\hbar$.

построения полной системы измерений, опирается на указанное выше ограничение — при построении системы измерений не использовать привязок к конкретным физическим явлениям и объектам. Если же это ограничение снять, то число основных единиц можно уменьшить (до нуля). Для этого следует потребовать, чтобы в данной системе измерений некоторые физические константы имели наперед заданное численное значение. Системы измерений, в которых произвол выбора основных единиц полностью исключен обращением в единицу некоторых констант, называются сейчас *естественными*. Из сказанного выше следует, что таких констант должно быть три. Еще до Планка в 1874 г. Дж. Стоней (1826—1911) предложил естественную систему единиц, основанную на константах c, G и e.

Доклад Стонея 1874 г., опубликованный в 1881 г. [113], известен главным образом тем, что в нем впервые появилась величина элементарного электрического заряда e. Однако для самого автора главным было построение системы физических единиц для Природы в целом. Отметив случайный, произвольный характер применяемых систем единиц и возможность использовать любые три независимые величины в качестве основных, Стоней заявил, что сама «Природа предоставляет нам три единицы», с помощью которых можно построить «подлинно натуральный набор физических единиц».

В качестве трех величин, характеризующих всю Природу, а не связанных с какими-то индивидуальными объектами, Стоней берет отношение электромагнитной и электростатической единиц электричества V (фактически скорость света c), гравитационную константу G и, наконец, характерное, не зависящее от рода вещества, количество электричества e, приходящееся на одну разорванную химическую связь в явлении электролиза (фактически заряд электрона). Заряд e Стоней вычисляет, исходя из величины фарадеевского электрохимического эквивалента и числа Авогадро [112]. Принимая c, G, e за основные единицы, Стоней получает (производные) единицы длины, времени и массы в виде

$$L = \frac{1}{\mathrm{XXXVII}}\ \text{м},\ T = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\mathrm{XLV}}\ \text{с},\ M = \frac{1}{\mathrm{VII}}\ \text{г}.$$

Изобретательство Стонея, как мы видим, проявилось не только в том, что он придумал слово «электрон», ставшее образцом для названий элементарных частиц, но и ввел непривившееся обозначение для чисел вида 10^n. В «нормальных» обозначениях натуральные единицы Стонея имели бы величину

$$L_{\text{st}} = 10^{-37}\ \text{м},\ \boldsymbol{T}_{\text{st}} = {}^1/_3\cdot 10^{-45}\ \text{с},\ M_{\text{st}} = 10^{-7}\ \text{г}.$$

Стоней рассчитывал, что предлагаемая им метрологическая реформа должна помочь в более глубоком исследовании физических явлений. Этого не произошло. Ни его, ни планковская системы единиц сами по себе пользы не принесли. Лишь после того как был обнаружен квантово-гравитационный смысл планковских величин, они вошли в оборот науки.

Планковский набор c, G, $\hbar$ вначале не имел никаких преимуществ перед набором Стонея c, G, e. Только после создания ОТО и квантовой теории стал ясен всеобщий характер постоянных c, G, $\hbar$. Среди постоянных, с помощью которых формулируются наиболее общие на сегодняшний момент (т. е. не сводимые к другим) теории, константы c, G, $\hbar$ выделяются тем, что они участвуют в теориях, которые с *собственной* точки зрения не могут игнорироваться при рассмотрении *любого* явления с достаточно большой точностью (см. § 5.1) *. Именно такие константы естественно назвать *универсальными* (производя эпитет от слова Universe).

Поскольку трех универсальных констант c, G, $\hbar$ уже достаточно для построения естественной системы измерений, в которой все единицы измерения имеют фиксированную (планковскую) величину, можно было бы предположить, что других универсальных (в указанном смысле) констант больше уже не появится. Это предположение означает по существу возможность некоторого завершения фундаментальной теоретической физики (уже в статье Гамова, Иваненко, Ландау появились слова «Представим себе законченную (!) физику»). Этот прогноз, связанный с весьма элементарными соображениями, интересно сопоставить с действительно возникшим в последнее время прогнозом такого рода, основания для которого выходят далеко за пределы размерностных рассмотрений (см. § 8.1).

КРАТКИЕ ИТОГИ ГЛАВЫ 5

Понятие размерности и факт 3+1-мерности пространства-времени приобретают вполне определенный смысл только в рамках целостной геометрической модели пространства-времени. Наиболее общая работоспособная модель такого рода, имеющаяся в арсенале современной теоретической физики, — риманова геомет-

---

* К таким теориям не относится, например, электродинамика, поскольку она не запрещает существование электромагнитно нейтральных объектов.

Выделенность констант c, G, $\hbar$ впрочем, может не иметь абсолютного смысла. (Как уже говорилось, обсуждаемые в этом параграфе вопросы относятся не столько к самой по себе физической реальности, сколько к структуре и эволюции теоретической физики, описывающей эту реальность.) Если, например, будет построена Единая теория, объединяющая все взаимодействия (см. § 8.1), то в ней должны быть получены и соотношения типа

$$e = C_e e_{\text{пл}}, \quad m_e = C_{m_e} m_{\text{пл}} \text{ и т. д.}$$

с коэффициентами C_e, ..., являющимися результатом теории; и тогда константа e могла бы считаться не менее универсальной, чем c, G, $\hbar$.

рия общей теории относительности. Поэтому вопрос о границах «области определения» факта 3+1-мерности сопряжен с вопросом о границах применимости геометрической модели ОТО. Такие границы, порожденные необходимостью квантового обобщения теории гравитации, характеризуются планковскими величинами.

Планковские величины появились в 1899 г. сразу же вслед за новой фундаментальной константой h. Их рождение, имевшее чисто метрологический характер, оказалось преждевременным.

В 1916 г. вскоре после создания ОТО Эйнштейн на основе качественных аргументов (связанных по существу с его космологическими представлениями) указал на необходимость квантового обобщения новой теории гравитации.

Первое существенное продвижение в этом направлении сделал в 1935 г. М. П. Бронштейн. Он не только построил квантовую теорию гравитации в приближении слабого поля (допускающего негеометрический подход), но и обнаружил квантовые границы применимости ОТО и вместе с тем квантовые границы классического геометрического описания.

Только в середине 50-х годов был обнаружен троякий физический смысл планковских величин, характеризующих гравитационные границы релятивистской квантовой теории, границы области уравнивания фундаментальных взаимодействий и квантовые границы ОТО. Все эти три аспекта объединились в современной программе единой теории всех фундаментальных взаимодействий. Однако квантово-гравитационный смысл планковских величин вполне мог быть обнаружен уже на базе боровской модели атома 1913 г.

Фундаментальность планковских $cG\hbar$-величин связана с универсальностью констант c, G, $\hbar$, т. е. с тем, что эти константы с точки зрения теории имеют отношение ко всякому физическому явлению. В универсальности констант c, G, $\hbar$ Планк был уверен уже в 1899 г., однако эта уверенность имела субъективный характер. Лишь после создания ОТО и квантовой механики универсальность c, G, $\hbar$ стала явной. Но, впрочем, и сейчас универсальность c, G, $\hbar$ нельзя считать абсолютной, она зависит от методологических установок. Только если единой теорией станет $cG\hbar$-теория, универсальность этих констант станет вполне обоснованной, но вместе с тем тривиальной.

Уже Бронштейн осознал фундаментальный характер квантово-гравитационных границ, глубокое отличие перехода «ОТО — квантовая гравитация» от подобного перехода для электромагнитного поля. Впоследствии оснований для такого мнения только прибавилось. Для современной физики особенность квантовой гравитации проявляется, в частности, в том, что считается наиболее вероятным построение квантовой теории гравитации не самой по себе, а как органической части теории, объединяющей все взаимодействия (см. § 8.1).

Однако и независимо от таких конкретных замыслов квантово-гравитационные $cG\hbar$-границы являются одновременно, как показал впервые Бронштейн, границами применимости классической (неквантовой) геометрической модели свойств пространства-времени и, в частности, его числа измерений.

Общая литература к главе 5: [21, 30в, 53, 54в, 80, 86, 119]

Глава 6

ПРОБЛЕМА РАЗМЕРНОСТИ И МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

В центре внимания предыдущей главы был тот факт, что синтез квантовых и общерелятивистских представлений невозможен без радикальной концептуальной перестройки физической геометрии. В этой главе мы постараемся учесть характер квантово-релятивистских ограничений для поиска подходящего математического языка описания размерностной структуры пространства-времени.

Наиболее развитые математические структуры, предназначаемые обычно для описания свойств пространства, — метрическая и топологическая. В математике топологическая структура как более общая находится в иерархии структур на более глубоком уровне и может считаться более фундаментальной, чем метрическая. В физике, однако, взаимоотношения метрической и топологической структур приобретают существенно другой характер.

6.1. ЛОКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И ИДЕЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ДЛИНЫ

Наиболее общая на сегодняшний день геометрическая модель, претендующая на описание пространственно-временной структуры физической реальности, — 3+1-мерное риманово многообразие. Математически это, напомним, означает, что у любой точки пространства-времени имеется окрестность, топологическая структура которой в точности совпадает со структурой четырехмерного евклидова пространства. Другими словами, считается, что известно «все» о локальной структуре пространства-времени, до сколь угодно малых расстояний и промежутков времени. То, что такое предположение — сильная идеализация, было ясно уже создателю ОТО — Эйнштейну (см. гл. 3). Разумеется, идеализация — необходимый элемент построения всякой физической теории, а оправданность данной идеализации подтвердилась достижениями ОТО.

И все же события, происшедшие в физике после создания ОТО, привели к серьезным сомнениям в применимости математической модели пространства-времени ОТО на достаточно малых расстояниях.

Представление о дискретности физических величин (энергии, позже момента импульса), присущее квантовым идеям уже на самом раннем этапе их развития, могло индуцировать предположения о дискретности таких физических величин, как пространственные координаты и время. Пуанкаре, как мы помним (см. § 2.4), пришел к атомам времени; в духе релятивистского мировоззрения дискретность времени должна была бы сопровождаться и дискретностью пространства. Однако такое предположение оказалось бы слишком прямолинейной аналогией. При создании квантовой механики в середине 20-х годов стало ясно, что нерелятивистская квантовая теория вполне обходится евклидовой моделью пространства.

Только объединение квантовых и релятивистских представлений выявило конкретные физические соображения, которые довольно определенно указывали на недостаточность обычной евклидовой непрерывной модели пространства. Наиболее простой и наглядной формой такого рода соображений был следующий мысленный эксперимент по измерению положения электрона.

Предположим, мы измеряем координату электрона, облучая его электромагнитными волнами с длиной волны λ (или, что эквивалентно, фотонами с импульсом $p=\hbar/\lambda$ и энергией $\hbar c/\lambda$). В результате такого рода измерений, как известно уже из оптики, координата электрона может быть измерена с неопределенностью, не меньшей $\Delta x \sim \lambda$. Желая увеличить точность измерения координаты электрона, мы должны уменьшать длину волны λ (т. е. увеличивать энергию фотона $\hbar c/\lambda$). А теперь выпустим квантовое — фотонное — понимание света из скобок, учтем релятивистскую эквивалентность массы и энергии $E=mc^2$ и квантовую возможность рождения частиц. Тогда получим, что, как только энергия фотона превысит удвоенную массу покоя электрона, в процессе измерения координаты данного электрона начнут рождаться пары из электрона и позитрона, разделенные в силу принципа неопределенности характерным расстоянием $\lambda_c = \hbar/m_e c$ — комптоновской длиной волны электрона. А поскольку рожденный электрон ничем не отличается от исходного (принцип тождественности) и рожденный позитрон может аннигилировать с исходным электроном, то получаем нижний предел для локализации *точечного* (в силу СТО) электрона

$$\Delta x > \hbar/m_e c \approx 10^{-11} \text{ см}.$$

Но что же это за точка, которую можно локализовать только в достаточно большом объеме? И что такое тогда вообще точка, если в физике нет объектов, которые могли бы моделировать* это понятие с произвольной точностью?

Но это всё, можно сказать, демонстрационные рассуждения. Большее внимание теоретиков привлекали другие формы кванто-

* Чаще говорят о математических моделях физических явлений, но можно, конечно, говорить и о физических моделях математических структур.

во-релятивистских конфликтов с классической моделью пространства-времени, прежде всего нелокализуемость электромагнитного поля (см. § 5.3) и проблемы расходимостей *. В результате широко распространилось убеждение, что создание подлинной квантово-релятивистской теории «приведет к существенному видоизменению понятия пространства-времени (а не только понятия поля) в областях размером $\hbar/mc$ и соответственно $\hbar/mc^2$» [Паули, 1977 (1933), с. 190].

Такие обстоятельства привели к появлению в разных вариантах гипотез дискретного пространства и элементарной, минимальной длины [31]; в различных теоретических построениях появлялась некоторая постоянная, имеющая размерность длины, которая должна была ограничить область применения классической модели пространства-времени, так называемая *фундаментальная длина* [Блохинцев, 1970; Киржниц, 1973; Марков, 1958; Тамм, 1975, т. 2].

И до настоящего времени проблема фундаментальной длины — установление границ применимости классического пространственно-временного описания — сохранила свое принципиальное значение [Гинзбург, 1980, 1981]. Однако за прошедшие десятилетия существенно изменились и сама проблема фундаментальной длины и отношение к ней.

Конфликты квантово-релятивистских построений с классической моделью пространства находили решения, которые хотя и считались многими лишь временным выходом, но позволяли справляться с конкретными физическими задачами. Так, в частности, рассмотренная выше нелокализуемость элементарной частицы «ликвидировалась» предположением $m \to \infty$, нелокализуемость электромагнитного поля — предположением $\rho \to \infty$ (где ρ — плотность пробного электрического заряда). Хотя подобные физические объекты и не известны, эти предположения оправдывались тем, что сама теория не запрещала их существования (в то же время было ясно, что такие запреты должны были стать существенным элементом будущей теории). Расходимости в теории поля были преодолены методом перенормировок, который, впрочем, также многим (в частности и своим авторам) не казался вполне удовлетворительным решением.

Таким образом, конкретные кандидатуры на роль фундаментальной длины (классический радиус электрона e^2/mc^2, комптоновская длина волны нуклона $\hbar/Mc$, радиус слабого взаимодействия и т. д.) отвергались как в результате экспериментов, проверяющих квантовую электродинамику на все меньших расстояниях, так и в результате прогресса в теории, в частности построения

* Проблемы расходимостей возникли по существу еще в классической релятивистской теории поля (расходимость собственной энергии электрона), но в квантовой теории они приобрели особенно нетерпимый характер.

перенормируемой единой теории электромагнитных и слабых взаимодействий.

Только восходящие к Бронштейну соображения о квантово-гравитационных пределах применимости римановой геометрии и соответствующая длина $l_{пл} = (\hbar G/c^3)^{1/2}$ (см. гл. 5) остаются незыблемыми. Длина $l_{пл}$ и считается сейчас наиболее вероятной величиной для фундаментальной длины [Гинзбург, 1981].

Однако для нас сейчас важна не вся в целом сложная структура проблемы фундаментальной длины. Для анализа соотношения метрических и топологических структур в связи с поисками физически реализуемого понятия размерности нам достаточно самого существования некоторой «фундаментальной» длины, характеризующей предел применимости обычных пространственно-временных представлений.

6.2. ФИЗИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ И ТОПОЛОГИЯ. СООТНОШЕНИЕ МЕТРИЧЕСКИХ И ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Поскольку на сегодняшний день наиболее развитое и общее представление о размерности существует в топологии, то, казалось бы, вопрос о размерности пространства должен задаваться Природе на топологическом языке. Так иногда и предполагается, при этом говорится о топологической структуре реального физического пространства и о топологическом определении размерности (см., например, [87, с. 108, 140]).

Однако, даже не рассматривая конкретные модели, легко понять, что само предположение о существовании фундаментальной длины несовместимо с признанием топологической модели физического пространства более глубокой, чем метрическая. Действительно, ввести понятие фундаментальной длины невозможно на языке топологии, не знающем никаких длин*. Как уже говорилось в гл. 4, подлинно физическое отношение к факту трехмерности пространства должно включать установление границ области физических явлений, в которой этот факт имеет место. Если такая граница существует, то принцип соответствия в применении к проблеме размерности пространства предполагает наличие некоторого масштаба, относительно которого можно будет говорить о размерности пространства в макро- и микромасштабах. Таким образом, приходим к неизбежности использования *метрического* языка в определении размерности физического пространства.

Несоответствие между топологическими представлениями о размерности и требованиями физического «здравого смысла»

* Физически бессмысленным также становится исходное для топологии понятие точки и основное топологическое соотношение «точка p принадлежит замыканию множества M».

можно продемонстрировать и следующим, более конкретным образом.

Факт 3+1-мерности пространства-времени в результате эренфестовского анализа и его развития получил надежное обоснование для физических явлений достаточно больших пространственно-временных масштабов. В то же время, как уже говорилось, в физике имеет основание предположение о дискретности пространства-времени для достаточно малых масштабов [14а, 31, 61а]. Конечно, для того чтобы обсуждать такую дискретность с полным правом, нужно реализовать общую концепцию дискретности математически определенным образом. Среди выдвигавшихся теоретических конструкций были довольно изощренные (например, модель с искривленным импульсным пространством, в которой дискретность пространства-времени означала дискретность спектра операторов пространственно-временных координат). Для наших целей достаточно будет понимать довольно неопределенный термин «дискретность»* как «меньшая размерность» (меньшая, чем 3+1; например, нульмерность) **. При этом «большие» и «малые» масштабы как раз может разделять новая константа — фундаментальная длина.

Однако в рамках топологических представлений о размерности пространства невозможно даже моделировать подобную ситуацию, т. е. согласовать 3+1-мерную («в большом») и возможную дискретную («в малом») структуры пространства и учесть возможность изменения размерности при изменении масштаба явления. Чтобы показать это, рассмотрим несколько простых математических моделей дискретного пространства, на физическую искусственность которых пока не будем обращать внимания.

Пусть множество D_0^3 (a) — бесконечная кубическая решетка с шагом a в трехмерном евклидовом пространстве E^3, т. е. множество точек с координатами (k_1a, k_2a, k_3a), где k_i — целые числа. С точки зрения физического здравого смысла можно было бы ожидать, что множество D_0^3 (a) при достаточном малом a (или точнее, при рассмотрении подмножеств D_0^3 (a), достаточно больших по сравнению с a) достаточно хорошо приближалось бы по свойствам — и, в частности, по размерности — к E^3. Кажется очевидным, что всякое множество точек, достаточно плотно заполняющих n-мерное пространство E^n, должно проявлять (в больших масштабах) n-мерность ***. Однако на каком математическом языке можно выразить этот «очевидный факт»? Только не на то-

---

* Выражение «дискретная топология» имеет вполне определенное математическое значение [60, с. 61], которое, однако, не имеет физической интерпретации.

** Другая упоминаемая иногда возможность — потеря смысла понятия размерности на малых расстояниях [Мизнер, Торн, Уилер, 1977, т. 1, с. 40].

*** Обычный в физике переход от совокупности материальных точек к непрерывной среде имеет по существу такой же характер.

пологическом. Действительно, с точки зрения топологии подобное утверждение бессмысленно. Три основных определения размерности в топологии ind, Ind, dim (совпадающие даже для более широкого класса математических пространств, чем евклидовы пространства, многообразия и любые их подмножества) по существу относятся к «сколь угодно малой» окрестности точки и не могут «заметить» переход через какой-то выделенный масштаб a. В силу этих определений размерность пространства $D_0^3(a)$ равна нулю независимо от величины a.

Аналогичным образом можно рассмотреть модели пространства, образованные совокупностью параллельных друг другу прямых или плоскостей в E^3, плотность расположения которых характеризуется расстоянием a — $D_1^3(a)$ и $D_2^3(a)$. И в этих случаях вместо ожидаемого (с точки зрения физического здравого смысла) перехода от 3-мерности пространства $D_n^3(a)$ «в большом» к n-мерности «в малом» топологические определения дают сразу, независимо от величины a, n-мерность пространства $D_n^3(a)$. В гл. 3 были введены пространства $E^{3(\mathrm{rat})}$ и $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$. Эти пространства с физической точки зрения кажутся вообще неотличимыми от E^3. Однако с топологической точки зрения $E^{3(\mathrm{rat})}$ нульмерно, а $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$ одномерно.

Рассмотренные простые примеры свидетельствуют, что в рамках топологических представлений невозможно придать смысл приведенному выше утверждению о зависимости размерности от масштабов явления. И мы опять приходим к необходимости ввести понятие размерности на метрическом языке.

В обычной математической иерархии структур метрический язык менее фундаментален, чем топологический. Однако метрический язык в физике вовсе не обязан сводиться к обычному понятию метрического пространства (это, впрочем, следует уже из того, что пространственно-временная структура, рассматриваемая теорией относительности, не есть метрическое пространство, так как в ОТО естественным образом возникает только знаконеопределенная двухточечная функция, не подчиняющаяся и неравенству треугольника). Можно лишь предполагать, что этот новый метрический язык должен как-то обобщать понятие интервала ОТО.

Но может быть не только топологическая, но и всякая другая математическая формализация понятия размерности не в состоянии удовлетворить указанному выше пожеланию физического здравого смысла? Как мы увидим, возможность реализовать идею размерности пространства, зависящей от масштабов, существует. Прежде чем описать такую возможность, рассмотрим внимательнее, как реально действующие в физической теории представления о числе измерений соотносятся с топологическим подходом к размерности.

Создание общей теории относительности не требовало математических моделей пространства, более общих, чем многообразие, и представлений о размерности, более общих, чем количество координат. Даже в современной физике не видно никакой реальной альтернативы координатному описанию, которое позволяет рассматривать поведение полевой системы: изменение полевых функций от точки к точке представляется с помощью производных по пространственно-временным координатам. Понятие размерности многообразия имеет, конечно, топологическую природу (поскольку требуется локальное топологическое соответствие пространству E^n). Однако никакой необходимости в общих топологических определениях размерности в случае многообразия нет, так как сама структура многообразия предполагает предварительное задание определенной размерности. Иногда при изложении ОТО размерность пространства-времени вводят в духе индуктивного топологического определения [Мизнер, Торн, Уилер, 1977, с. 39], но в случае риманова пространства — математической модели пространства-времени ОТО — такое определение может играть роль лишь математического украшения.

Топологический подход к размерности стал бы необходим, если бы развитие физики (и в первую очередь осуществление полного синтеза ОТО и квантовой теории) привело к отказу от рассмотрения метрической структуры пространства и к принятию в качестве основного объекта изучения его топологических свойств; в этом случае обращение к топологическим определениям размерности было бы неизбежно. Однако в настоящее время ничто не говорит о возможности такого хода событий *; в частности, не видно величин, которые могли бы играть в этом случае роль динамических переменных, описывающих состояние и эволюцию физической системы — пространства-времени. Поэтому для квантового обобщения эйнштейновской теории пространства-времени желательно скорее обобщение понятий многообразия, метрической и координатной структуры пространства (понятия интервала и метрического тензора g_{ik}) и отказ от локальной структуры пространства, тождественной структуре E^4. Тогда понятие размерности могло бы остаться связанным с понятием «количество координат», но только координаты уже понимались бы в обобщенном смысле, а не в смысле координат на многообразии.

Физика по существу навязывает параметрическое представление о размерности пространства. Это проявилось, как мы видели, еще в работах Пуанкаре (гл. 2). И действительно, «работающие» физические понятия — число степеней свободы, количество динамических переменных в уравнениях движения, количество компо-

---

* Этому нисколько не противоречит все более активное использование в современной теоретической физике методов дифференциальной топологии, или топологии многообразий.

нент физического поля и т. д. — говорят о необходимости реализовать именно параметрическое представление о размерности, или, лучше сказать, о *числе измерений* пространства. Это представление действительно было бы связано с «количеством измерений», необходимых для описания состояний физической системы.

Топологическим определениям размерности предшествовало параметрическое определение: размерность фигуры — это минимальное число параметров, с помощью которых можно «перенумеровать» все точки данной фигуры. Параметрическое определение имеет несомненное преимущество — ясный физический смысл (число степеней свободы и т. п.), но имеет и «недостаток» — математическую некорректность. Как показал еще в 1877 г. Г. Кантор (см. гл. 2), если способ параметризации ничем не ограничивать, то реализовать параметрический подход к размерности нельзя (все точки квадрата оказалось возможным перенумеровать с помощью *одного* параметра). Топология (применительно к многообразию) по существу ограничивает способ параметризации взаимной однозначностью и непрерывностью. Но это не единственный возможный тип ограничения. Если считать заданной метрическую структуру пространства, то способ параметризации точек пространства можно ограничить требованием, чтобы сами параметры имели метрический смысл. При этом метрику, как уже говорилось, вовсе не обязательно понимать в узком смысле — как знакоопределенную двухточечную функцию, подчиняющуюся неравенству треугольника (см. § 3.1).

В § 6.4. будет дано общее определение размерности, основанное на этой идее, т. е. реализующее параметрическое представление с помощью метрической структуры. Это определение удовлетворит требованиям, о которых говорилось ранее в этом параграфе, требованиям, индуцированным идеей фундаментальной длины.

Однако прежде рассмотрим взаимоотношение проблемы расходимостей (одного из главных источников гипотез о локально-неевклидовой структуре пространства) с понятиями размерности и метрики.

6.3. МЕТРИКА, МЕРА, РАЗМЕРНОСТЬ И ПРОБЛЕМА РАСХОДИМОСТЕЙ

Четыре понятия, перечисленные в заголовке, как мы увидим, действительно связаны, и эта связь позволит еще с одной стороны взглянуть на возможность того, что размерность пространства в различных физических ситуациях может быть различна, и на математический язык, выражающий такое различие.

Уже не раз подчеркивалось, что факт $3+1$-мерности пространства-времени является фундаментальным, надежно обоснованным физическим фактом. Однако реальный анализ обоснованности этого факта (впервые проделанный Эренфестом) сразу же выявляет необходимость указывать область физических явлений, в которой 3+1-мерность можно считать незыблемой. Границы этой области в простейшем случае могут отмечаться указанием характерных значений физических величин (расстояний, энергий и т. п.).

Поэтому факт 3+1-мерности сам по себе нисколько не подрывает стремления наделить пространство дискретной структурой. Одним из главных источников такого стремления были проблемы расходимостей. Расшифровывая понятие дискретности как меньшую (чем 3+1) размерность в малых масштабах на фоне 3+1-мерности в больших масштабах, следовало бы выяснить, что может дать переход к меньшей размерности для проблемы расходимостей.

Расходящиеся величины в квантовой теории поля имеют вид интегралов, которые расходятся при импульсах, стремящихся к бесконечности, или соответственно при расстояниях, стремящихся к нулю. Способы регуляризации таких неопределенных интегральных выражений, т. е. способы извлечения из них вполне определенных конечных выражений, и составляют метод перенормировок. Анализ перенормируемости квантовой электродинамики в зависимости от числа измерений пространства [30б] дает ограничение на размерность сверху: теория перенормируема, только если размерность пространства $\leqslant 3$.

Иллюстрировать чувствительность проблемы расходимостей к размерности можно уже в рамках классической теории поля (кстати говоря, расходимости собственной энергии электрона в классической и квантовой электродинамике имеют, по-видимому, один и тот же характер [28]).

Будем рассматривать точечный элементарный заряд — «электрон» — как предел однородного распределения заряда e по шару радиуса a при $a \to 0$. Напомним, что точечность элементарной частицы связана с простыми релятивистскими соображениями [Ландау, Лифшиц, 1973, с. 65]. Принимая, что лагранжиан для электродинамики в n-мерном евклидовом пространстве E^n (точнее, в $n+1$-мерном пространстве Минковского M^{n+1}) имеет тот же вид, что и в трехмерном (см. § 4.2),

$$L = F_{ik}F^{ik} + j_k A^k, \tag{1}$$

получаем n-мерные уравнения Максвелла. В частности, для рассматриваемой ситуации

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \tag{2}$$

где плотность заряда $\rho \sim e/a^n$ (здесь и далее опускаем геометрические коэффициенты типа величин поверхности и объема n-мерного шара единичного радиуса). Из (2) получаем

$$E = \frac{e}{a^n} r \text{ при } r < a,$$
$$E = \frac{e}{r^{n-1}} \text{ при } r > a. \tag{3}$$

Собственной энергией распределения заряда назовем энергию электромагнитного поля, заключенного внутри сферы радиуса a:

$$U_n(a) = \int\limits_{r \leqslant a} E^2 \, d^n x. \tag{4}$$

Легко видеть, что

$$U_n(a) = \frac{e^2}{a^{n-2}}. \tag{5}$$

Переходя к пределу $a \to 0$, получим, что при $n > 2$ точечный заряд обладает бесконечной собственной энергией, при $n < 2$ — нулевой и только при $n = 2$ — конечной собственной энергией. Так что если потребовать конечность собственной энергии электрона, то «придется» признать, что пространство внутри электрона должно быть двухмерным.

Конечно, рассмотренный простой пример не может претендовать на слишком серьезное к нему отношение. Дело не только в том, что используется простейшая математическая модель пространства — E^n, и при этом оставляется без ответа вопрос: как пространство E^2, «имеющееся» внутри электрона, сшивается с E^3 вне его (впрочем, принципиальная возможность подобной сшивки будет показана в § 6.4). Важнее то, что рассмотрение ведется не на квантово-релятивистском языке.

Однако несмотря на простоту приведенного примера он может оказаться проявлением гораздо более общей взаимосвязи между понятиями метрики, меры и размерности. Сама операция интегрирования (необходимая для выражения проблемы расходимостей), в общем случае имеющая вид

$$\int\limits_{\Omega} f \, d\mu(\omega),$$

предполагает известным понятие меры $\mu(\omega)$, заданной для достаточно обширной совокупности подмножеств пространства Ω. Потребности физики до сих пор вполне удовлетворялись интегрированием по евклидову пространству E^n, где никаких проблем с определением меры и интеграла нет (точнее говоря, эти проблемы давно решены). Однако если бы пришлось обратиться к математическим моделям пространства с локально не евклидовой структурой, то тогда соответствующие проблемы возникли бы.

Понятие меры, вообще говоря, не связано ни с метрикой, ни с топологией. Однако в 1919 г. Ф. Хаусдорф ввел понятие p-мерной меры, которая может быть построена в произвольном метрическом пространстве исходя только из его метрики. Мера Хаусдорфа дает возможность ввести понятие так называемой хаусдорфовой размерности, которая может быть и не целым числом, но оказывается связанной и с топологической размерностью. Попытка использовать понятие хаусдорфовой размерности в физике будет упомянута ниже, а прежде опишем саму конструкцию p-мерной меры Хаусдорфа.

Понятие меры Хаусдорфа основано на том очень наглядном соображении, что объем n-мерного тела можно оценить, взяв его характерный размер в степени n. Если же размерность тела не известна заранее, то можно найти число n, т. е. «правильную» степень, в которую надо возвести размер тела, чтобы получить его объем, или меру. Для этого нужно перебрать различные значения n; «правильное» будет обладать тем свойством, что n-мерный объем тела будет равен сумме n-мерных объемов частей, на которые тело разбивается (и любые достаточно мелкие разбиения тела дадут достаточно близкие величины суммарного объема). «Характерным» размером множества A в общем метрическом пространстве может быть только его диаметр $\operatorname{diam} A$ — наибольшее расстояние между точками, принадлежащими A,

$$\operatorname{diam} A = \sup \rho(x, y); \quad x, y \in A.$$

Приведем точное определение p-мерной меры Хаусдорфа [46, с. 140; 56, с. 341; 99].

Пусть A — множество в метрическом пространстве, p — произвольное неотрицательное число (не обязательно целое). Для каждого $\delta > 0$ рассмотрим совокупность всевозможных разбиений множества $A = \bigcup A_k$, таких что $\operatorname{diam} A_k < \delta$ для каждого k, и получим величину

$$m_p(A;\ \delta) = \inf \sum_k [\operatorname{diam} A_k]^p. \tag{6}$$

p-мерной мерой Хаусдорфа множества A называется величина

$$m_p(A) = \lim_{\delta \to 0} m_p(A;\ \delta). \tag{7}$$

Нетрудно показать, что мера Хаусдорфа $m_p(A)$ не вырождается, т. е. не обращается в 0 или ∞, самое большее для одного значения p, при этом $m_q(A) \geqslant m_p(A)$, если $q < p$. *Хаусдорфовой размерностью* множества A называется наибольшее число p, такое, что для всякого $q < p$ мера $m_q(A) = \infty$.

Хаусдорфова размерность является, как мы видим, метрическим понятием, но существует ее связь с топологической размерностью [46]: если рассматривать все метрики на множестве A, индуцирующие одну и ту же топологию, то нижняя граница хаусдорфовой размерности для всех этих метрик совпадает с топологической размерностью A.

В работе [Крамер, Нильсен, Цзе, 1974] была сделана попытка использовать конструкцию, близкую к идее хаусдорфовой размерности, в физике элементарных частиц. Авторы предложили понятие размерности адронного вещества $d(\rho)$, зависящей от масштаба, для описания экспериментов по глубоко неупругому рассеянию на адронах. Размерность $d(\rho)$ вводится следующим образом. Пусть $N(\rho, M)$ — наименьшее количество шаров радиуса ρ, необходимое для полного покрытия части пространства, занимаемого некоторым объектом M (адроном). Тогда

$$d(\rho, M) \equiv -\frac{d \ln N(\rho, M)}{d \ln \rho}. \tag{8}$$

Масштаб ρ в этом определении размерности* сопоставляется «разрешающей способности прибора», исследующего адрон — длине волны падающего фотона, передаваемому импульсу. При этом адрон рассматривается как объект в трехмерном пространстве E^3, а функция $d(\rho)$ должна описывать динамические размерностные свойства адрона (в частности, «нульмерность» партонной структуры при больших передачах импульса и «одномерный» струнноподобный характер при малых). Оставляя неприкосновенной трехмерную евклидову (до сколь угодно малых расстояний) модель самого пространства, такой подход имеет в определенном смысле феноменологический характер. Дальнейшего развития он не получил.

Вернемся теперь к проблеме расходимостей, для самого выражения которой как уже говорилось, необходимы понятия интеграла и меры. Понятие меры Хаусдорфа применимо для любой метрической структуры пространства (в том числе и для локально не евклидовой), однако в общем случае (т. е. не в E^n) мера Хаусдорфа существенно отличается от меры Лебега, с помощью которой строится понятие интеграла в E^n. Прежде всего мера Хаусдорфа — полуаддитивная мера [131], и для нее обычное построение операции интегрирования автоматически провести нельзя. Однако в математике известны определения понятия интеграла (в том числе от неограниченной функции) для меры более общего типа, чем лебегова, в частности для полуаддитивной меры [43]. Такое понятие интеграла могло бы оказаться полезным для проблемы размерности в связи с тем, что размерность евклидовых пространств E^n просто связана с локальной сходимостью или расходимостью интегралов от расстояния (до фиксированной точки, находящейся в области интегрирования): размерность про-

---

* Основанное на такой же идее (в пределе $\rho \to 0$) математическое понятие метрической размерности — метрический порядок — ввели еще в 1932 г. Л. С. Понтрягин и Л. Г. Шнирельман [46, с. 210].

странства равна наименьшему числу k, для которого интеграл $\int\limits_0^{r_0} r^{-k}\, dV$ расходится, или, что эквивалентно,

$$\dim \mathrm{E}^n = \sup\left\{k\colon \int\limits_0^r r^{-k}\, dV < \infty\right\}. \qquad (9)$$

Можно ли локальную расходимость интегралов в квантовой теории поля воспринимать как указание на изменение размерности пространства при переходе к малым расстояниям, или здесь имеется только поверхностная аналогия? Ответить на этот вопрос в настоящее время невозможно, и сразу же видны основные два препятствия.

Во-первых, применяющиеся до сих пор геометрические модели физического пространства и, в частности, считающиеся наиболее глубокими топологические представления о размерности, как мы уже видели, не дают возможности даже моделировать подобную ситуацию — изменение размерности пространства при изменении масштабов явления. Это препятствие не кажется непреодолимым. И размерность $d(\rho)$, упомянутая в настоящем параграфе, и понятие размерности, которое будет введено в следующем параграфе, и подход к размерности, сопоставляющий координатам физические поля, о котором будет говориться в § 8.4, — все это свидетельствует, что нет принципиальных ограничений для математического выражения идеи изменяющейся размерности. (Хотя, конечно, от этих предварительных построений до настоящей теории еще далеко, и, кроме того, сама по себе математическая реализуемость сложной, «неевклидовой» размерностной структуры пространства еще не делает ее реальной.)

Второе препятствие носит уже физический характер. Что могут означать слова «при переходе к достаточно малым расстояниям»? Какая величина фундаментальной длины * может разделять малые и большие расстояния? Как уже говорилось, на сегодняшний день глубокие теоретические основания занять место фундаментальной длины есть только у квантово-гравитационной планковской длины $l_{\text{пл}} = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ (см. гл. 5). Но какая связь может быть у этой величины, содержащей гравитационную константу, с расходимостями чистой электродинамики? Возможность такой связи стала особенно ясной в результате событий, происшедших в теоретической физике в последние примерно полтора десятилетия **. Успехи калибровочных теорий поля привели к по-

* Любой другой характерный масштаб — массу, энергию и т. д. — можно свести к длине с помощью фундаментальных констант c, $\hbar$.

** Связь электромагнетизма и гравитации казалась несомненной в период поисков «единой теории поля» (20—30-е годы). Однако отсутствие решающих успехов и обнаружение новых взаимодействий привели затем к мнению, что строению единой теории электромагнитного и слабого взаимодействий (тем самым «чистая» электродинамика, строго говоря, вообще исчезает). Строится калибровочная теория сильного взаимодействия, и появились веские основания для полного объединения всех четырех фундаментальных взаимодействий, включая гравитацию [Салам, 1980; Окунь, 1981] (см. также § 8.1). Так что не исключено, что проблемы расходимостей, которые сейчас «обезвреживаются» перенормировкой, в будущей единой теории будут решены более фундаментальным образом *.

А теперь обратимся к самой возможности построить математическую модель пространства-времени, в которой размерность могла бы зависеть от величины пространственно-временной области.

6.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ, ОСНОВАННОЕ НА МЕТРИКЕ

Как известно, риманово многообразие (пространство-время ОТО) можно описывать с помощью двухточечной симметричной вещественной функции

$$I(P, P') = \left(\int_P^{P'} ds \right)^2, \quad ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{10}$$

где интеграл берется по геодезической, соединяющей точки P и P'; это описание эквивалентно обычному описанию с помощью метрического тензора g_{ik} [Синг, 1963] (см. также § 3.1). Дальнейшее построение основывается на обобщении именно интегральной величины $I(P, P')$, которую будем называть *интервалом.* Именно эта функция описывает всю метрическую структуру пространства-времени. В дальнейшем для краткости будем употреблять термин «пространство», имея в виду прежде всего индефинитную метрику (т. е. пространство-время), хотя основные определения сохраняют смысл и для пространства с дефинитной метрикой **.

гравитация и электромагнетизм, по выражению Паули, «не могут быть объединены, ибо бог положил им быть разъединенными» [106а, с. 14].

* Нередко подчеркивают пропасть в семнадцать порядков, разделяющую доступную современной физике величину 10^{-16} см и планковскую длину 10^{-33} см, чтобы поставить под сомнение возможность столь далекой экстраполяции. Однако следует отметить, что успешность такой экстраполяции не была бы беспрецедентной в истории физики. Законы электромагнетизма, сформулированные в прошлом веке на экспериментальном материале с характерными расстояниями не менее 1 см, как известно, оказались справедливыми по существу вплоть до расстояний 10^{-16} см.

** Современная математика, называя метрическим пространством множество с определенной на нем двухточечной вещественной неотрицательной функцией, удовлетворяющей неравенству треугольника (М. Фреше, 1906), игнорирует тот факт, что в релятивистской физике естественным образом возникает знаконеопределенная двухточечная функция, не удовлетворяющая неравенству треуголь-

Напомним тот геометрический факт, с обобщением которого связано предлагаемое понятие размерности: в евклидовом (псевдоевклидовом) n-мерном пространстве необходимо зафиксировать ровно n точек, чтобы с помощью расстояний (интервалов) до этих точек задать положение любой другой точки пространства. Такое задание на самом деле двузначно, поскольку задаются в общем случае две точки, симметричные относительно гиперплоскости, содержащей все зафиксированные n точек.

И еще одно замечание, прежде чем перейти к самому определению размерности. Нет никаких сомнений, что если и будет построена настоящая, т. е. имеющая физическую интерпретацию модель пространства-времени с меняющейся (в зависимости от ...?) размерностью, то эта модель должна органически включать в себя квантовые идеи. В этой книге нет претензий на построение такой модели; есть лишь материал, который может оказаться в этой связи полезным. Дальнейшее изложение проводится без участия, так сказать, некоммутирующих величин (хотя, конечно, само предположение о локальной дискретности пространства подсказывается, как уже говорилось, квантово-релятивистскими соображениями). Учитывая сказанное, мы не будем пытаться скомпенсировать «неквантовый» язык излишней аксиоматичностью и полнотой описания.

Итак, назовем пространством множество точек W с заданной на нем симметричной вещественной функцией — **и н т е р в а л о м** $I(P, P')$; $P, P' \in W$. Другие свойства функции $I(P, P')$ пока не будем уточнять. Достаточно считать, что обычная евклидова метрика, интервал в пространстве Минковского и их римановские обобщения обладают этими свойствами.

Основным для дальнейшего будет понятие базиса в множестве M, являющемся частью пространства W. Приведем (в порядке усиления) три возможных определения базиса.

Совокупность принадлежащих M точек $\{b^k\}$, $k=1, 2, ..., n$, образуют **б а з и с** в M, если

1) для любой совокупности из n чисел $\{i^k\}$ множество точек P, принадлежащих M и таких, что $\{I(P, b^k)\} = \{i^k\}$, содержит не более двух точек.

2) для любой точки $P \in M$ существует функция $\gamma_{P,M}$ от n непрерывных и одной дискретной (двухзначной) переменных, такая, что для любой точки $Q \in M$

$$I(P, Q) = \gamma_{P,\ M}(..., I^k(Q), ..., \sigma) \tag{11}$$

(здесь введено обозначение $I^k(Q) \equiv I(Q, b^k)$).

ника, — интервал (Г. Минковский, 1907). Математическое рассмотрение подобных «релятивистских» метрических пространств не обязательно должно сводиться к обобщению понятий метрики Фреше и интервала теории относительности в одном понятии. Скорее можно предположить, что «неслучайные» свойства интервала должны быть использованы существенным образом.

3) существует функция Γ_M от $2n$ непрерывных и двух дискретных (двухзначных) переменных, такая, что для любой пары точек $P, Q \in M$

$$I(P, Q) = \Gamma_M(..., I^k(P), ..., \sigma(P); \ ..., I^k(Q), ..., \sigma(Q)). \qquad (12)$$

Фигурирующие в определениях 2 и 3 функции от числовых аргументов γ и Γ описывают геометрию пространства. Наибольшие аналитические возможности дает определение 3. Это определение будет использовано в гл. 7 для описания размерностной структуры пространства-времени ОТО. Там же будет указан явный вид функции Γ для пространства Минковского (после устранения произвола во взаимном расположении точек базиса).

Введя понятие базиса, можно назвать *физической размерностью* множества M ($\varphi \dim M$) минимальное количество точек базиса в M. Таким образом, если множество M является n-мерным, то каждой точке из M можно приписать $n+1$ число: n расстояний до опорных точек базиса и дискретный параметр $\sigma = \pm 1$, показывающий, в какой стороне от «гиперплоскости»

$$\Pi(I^1, \ldots, I^n) \equiv \Gamma(I^1, \ldots, I^n, +1; I^1, \ldots I^n, -1) = 0, \qquad (13)$$

определяемой базисом, находится точка. И наоборот, каждому такому набору из $n+1$ числа соответствует не более одной точки, принадлежащей M *.

Следует отметить, что в определениях 2 и 3 не обязательно подразумевается, что интервал — число (а не оператор, например). Это позволяет надеяться на возможность квантового варианта такого определения размерности. В квантовом варианте роль базиса мог бы выполнять полный набор метрических операторов $\hat{I}(P, Q)$. В перестановочных соотношениях, определяющих некоммутативные свойства алгебры операторов, могла бы появиться постоянная Планка.

Чтобы рассматривать модели локально нульмерных («абсолютно» дискретных) пространств, лишенных метрических симметрий, определение размерности следует обобщить. Для этого можно определить размерность множества M с точностью до δ как характеристику класса всех его δ-деформаций (т. е. всех множеств, полученных из M изменением расстояния между любыми точками

---

* С помощью понятия базиса можно указать существенное различие между дефинитной и индефинитной метриками. Рассмотрим пространство E^n с определенными в нем обычной евклидовой метрикой и интервалом Минковского. В случае евклидовой метрики ни одна совокупность достаточно малых чисел (расстояний до точек данного базиса) не соответствует никакой точке. Для интервала же, напротив, всякая совокупность достаточно малых по модулю чисел (интервалов до точек базиса) соответствует некоторой точке.

не больше, чем на δ). Можно также потребовать, чтобы базисов с данным количеством точек было достаточно много.

Для того чтобы иметь возможность говорить о свойствах пространства W в малых (больших) масштабах, введем (в качестве размеров пространственно-временной области M) *пространственный* и *временной диаметры* M, как наибольшее положительное (пространственно-подобное) и наименьшее отрицательное (времени-подобное) значения интервала $I(P, Q)$ для всех пар точек P, Q, пробегающих M,

$$(\mathrm{Diam}_s M)^2 = \sup I(P, Q);$$
$$(\mathrm{Diam}_t M)^2 = -\inf I(P, Q); \tag{14}$$
$$P, Q \in M.$$

Введем также общий *пространственно-временной диаметр* множества M:

$$\mathrm{Diam}\, M = \max\{\mathrm{Diam}_s M,\ \mathrm{Diam}_t M\}. \tag{15}$$

Эти величины вполне естественны, так как следует рассматривать взаимовлияние всех событий, участвующих в некотором физическом явлении (должны быть малы по сравнению с фундаментальной длиной все попарные интервалы между событиями, участвующими в некотором явлении, а не только интервалы до какого-то одного события).

Множество точек, удаленных от некоторой фиксированной точки на интервал, не больший по модулю некоторой величины (на плоскости это «четыреххвостая» фигура, ограниченная гиперболами), некомпактно и неограничено в том смысле, что в нем есть пары точек, удаленных друг от друга на сколь угодно большой интервал (см. рис. 3.1). Если же потребовать, чтобы любая пара точек множества была разделена интервалом, не большим по модулю некоторой величины a^2, то такое множество будет уже компактным и ограниченным (если в нем есть хотя бы две точки, разделенные ненулевым интервалом) *. Максимальным множеством такого рода в $n+1$-мерном пространстве Минковского является цилиндр — произведение n-мерного шара радиуса $a/2$ на интервал: $B^n(a/2) \times (0, a)$, а также всякая фигура, полученная из этого цилиндра с помощью произвольного «преобразования Лоренца». В случае дефинитной метрики любое такое максимальное множество — это, конечно, шар радиуса $a/2$ (см. рис. 3.2) **.

---

* Множество событий, лежащих на каком-то одном световом луче, вырождено, но оно же и физически нереально («в любом взрыве осколки разлетаются в разные стороны»).

** О возможности ввести топологию в риманово пространство с помощью системы окрестностей, состоящей из всех таких максимальных множеств, говорилось в гл. 3.

Введенных понятий достаточно, чтобы вернуться к обсуждавшимся в § 6.2 локально дискретным моделям пространства $D_k^3(a)$, $E^{3(\mathrm{rat})}$, и $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$.

Легко убедиться непосредственно, что согласно введенному определению размерности $\varphi\,\mathrm{dim}$ пространство $D_k^3\ (a)$ в больших масштабах (по сравнению с a) 3-мерно, а в малых — k-мерно; пространства $E^{3(\mathrm{rat})}$ и $\bar{E}^{3(\mathrm{rat})}$ 3-мерны независимо от масштаба.

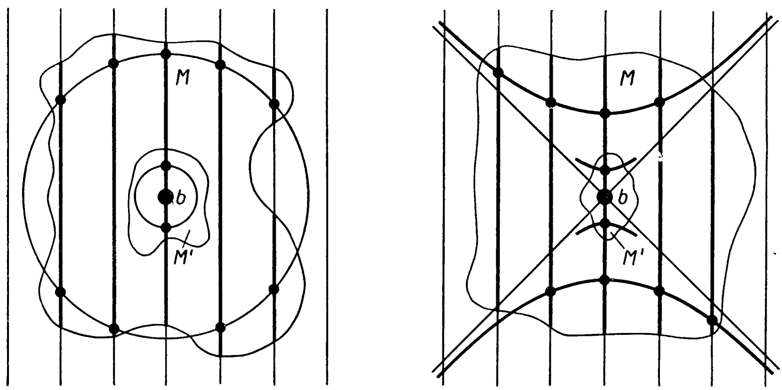


Рис. 6.1. Базис, состоящий из одной точки, в «пространстве», образованном на плоскости параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние l. Слева — евклидова метрика, справа — псевдоевклидов интервал. Множество M двумерно $(D(M)>l)$, множество M' одномерно $(D(M')<l)$

Точнее выражаясь, можно записать для $M \subset D_k^3\ (a)$:
если $\mathrm{Diam}\, M > a$, то $\varphi\,\mathrm{dim}\, M = 3$;
если $\mathrm{Diam}\, M < a$, то $\varphi\,\mathrm{dim}\, M = k$.

Ясно, что аналогичные соотношения имеются для $D_k^n\ (a)$ при любом n и $k<n$ как для дефинитной метрики, так и для интервала (рис. 6.1).

Таким образом, продемонстрирована возможность математически определенным образом говорить о пространстве, в котором размерность области зависит от ее размеров.

В заключение параграфа сделаем замечание, касающееся конструктивности введенного определения размерности.

С понятием конструктивности и близким понятием операциональности связаны, как известно, фундаментальные физико-математические понятия — конструктивность в математике [81, 127, 137] и наблюдаемость в физике [4].

Только после доказательства Брауэром в 1911 г. негомеоморфности евклидовых пространств E^k и E^n при $k \neq n$ появились действительные математические основания для широкого использования понятия размерности (вне рамок линейных структур). Даже современное доказательство этой теоремы никак нельзя назвать простым (см. [3, 46]). И тем не менее свойство n-мерности в случае многообразий и тем более евклидовых пространств E^n было настолько интуитивно очевидно, что математики до доказательства Брауэра на протяжении более полувека уверенно пользовались представлением об n-мерности пространства. Сложность топологического доказательства связана с тем, что гомеоморфизм в случае E^n может быть устроен очень сложно, а доказательство Брауэра должно было исследовать *все* гомеоморфизмы E^n в E^k.

С другой стороны, для евклидова пространства действует хорошо известное понятие линейной размерности. Доказательство линейной n-мерности E^n по «степени» очевидности и конструктивности вполне соответствует интуитивному различию E^n с разными значениями n. Доказательство n-мерности в смысле введенного определения ($\varphi \dim \mathrm{E}^n = n$) не менее очевидно и конструктивно, однако в отличие от понятия линейной размерности определение $\varphi \dim$ применимо и в гораздо более общем случае.

КРАТКИЕ ИТОГИ ГЛАВЫ 6

Физическое обоснование факта 3+1-мерности пространства-времени предполагает по существу, что «область определения» этого факта зависит от уровня развития и теоретического, и эмпирического компонентов физики. Поэтому приходится считаться с возможностью, что свойство 3+1-мерности нельзя экстраполировать неограниченно, в частности, на сколь угодно малые пространственно-временные масштабы. С другой стороны, возникновение квантово-релятивистской физики привело к представлению о существовании фундаментальной длины как предела применимости классического геометрического описания (т. е. евклидовой модели, все свойства которой заданы, разумеется, сразу для всех масштабов). Для некоторых величин, претендовавших на роль фундаментальной длины, со временем обнаружились причины, чтобы отказаться от такой роли; однако квантово-гравитационная длина $l_{\text{пл}} = (G\hbar/c^3)^{1/2}$ сохранила свои права.

Гипотеза фундаментальной длины обычно сочеталась с представлением о локально дискретной структуре пространства-времени. Если понимать дискретность как меньшую размерность, то приходим к представлению о размерности пространства-времени, зависящей от масштабов явления. В пользу такой возможности говорит и то, что проблема расходимостей — один из главных идейных источников гипотезы фундаментальной длины — весьма чувствительна к значению размерности.

Анализ возможностей топологического и метрического языков для описания размерностной структуры пространства-времени при учете указанных обстоятельств приводит к следующему. В рамках чисто топологических представлений зависимость размерности от масштаба невозможно даже моделировать. В то же время с помощью метрической структуры пространства-времени можно построить такое понятие размерности, которое придает вполне определенный смысл утверждению об отличии размерности в больших (по сравнению с характерной величиной) и малых пространственно-временных масштабах.

Это понятие, основанное на идее метрической зависимости, подразумевает параметрический подход к определению размерности, имеющий глубокие физические корни: в физике размерность пространства-времени выступает по существу не сама по себе, а как основание для понятия числа степеней свободы. Однако предлагаемое понятие размерности предполагает не произвольный способ параметризации (неудовлетворительность чего показал известный контрпример Кантора), а способ параметризации, осуществимый с помощью внутренней метрической структуры пространства-времени.

Общая литература к главе 6: [7, 14а,б, 55, 61а, 82, 114]

Глава 7

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ОПИСАНИЯ

В предыдущей главе предложен метрический подход к понятию размерности. Этот подход в отличие от топологического, как показано, соответствует характеру квантово-релятивистских ограничений на геометрическое описание. Введенное понятие размерности основано на идее метрической зависимости и по существу реализует параметрическое представление о размерности на метрическом языке.

В данной главе будет показана жизнеспособность этого понятия размерности для случая римановой модели непрерывного пространства-времени, которую использует релятивистская теория тяготения и пространства-времени — ОТО. Плодотворность метрического подхода к размерности в непрерывном случае свидетельствует в пользу самого подхода.

Понятие размерности риманова пространства, как уже говорилось в гл. 3, связано с понятием системы координат. Особенно явную форму эта связь приобретает, если размерность выражать на метрическом языке (§ 3.2). В данной главе мы сосредоточим внимание на связи понятий размерности, метрики, системы координат и системы отсчета. При этом, как мы увидим, рассматриваемая связь органически включает в себя и фундаментальный вопрос о симметриях пространственно-временного описания.

Глава построена следующим образом. Сначала мы кратко напомним статус симметрии пространства-времени в СТО, подчеркивая моменты, важные для дальнейшего изложения. Затем рассмотрим вопрос о соответствии между геометрией Минковского и римановой геометрией. И, наконец, предложим подход к симметриям пространственно-временного описания, пригодный для общего риманова пространства. Этот подход основан на размерностной однородности, т. е. на том факте, что размерность риманова пространства одна и та же во всех его точках. Если выразить размерностную однородность на метрическом языке, то в случае общей 4-мерной римановой геометрии приходим к понятию 10-параметрической квазигруппы, обобщающей группу Пуанкаре. Структура этой квазигруппы порождается метрическим устройством данного риманова пространства, а мера ее неассоциативности определяется степенью метрической неоднородности данного пространства.

7.1. ДЕСЯТЬ СИММЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И ЧЕТЫРЕХМЕРНОСТЬ

Понятие симметрий пространства-времени имеет долгую историю*. Уже в определениях и аксиомах ньютоновских «Начал» неявно содержатся все десять пространственно-временных симметрий. Однако в эпоху классической механики «геометрические» симметрии — однородность и изотропность пространства — казались принципиально отличающимися от «физических» симметрий, которым подчиняется описание механического движения и которые составляют принцип относительности Галилея. Только после создания специальной теории относительности и ее геометрической основы — пространства Минковского — стал ясен единый характер чисто геометрических симметрий и пространственно-временных симметрий, воплощенных в принципе относительности.

Понятие симметрии пространства-времени может быть выражено по-разному в зависимости от математического языка, используемого в физической теории. При описании полевой системы с помощью принципа стационарного действия физическая система характеризуется набором полевых функций $\{u_a(x)\}$, $a=1, ..., r$, зависящих от пространственно-временных координат $x=\{x^i\}$, $i=1, ..., n$ (размерность пространства-времени n оставим пока произвольной), и лагранжианом

$$L=L(u_a(x),\ \partial_i u_a(x),\ \partial_i\partial_k u_a(x)),\quad \partial_i\equiv\partial/\partial x^i, \tag{1}$$

зависящим от полевых функций и их производных. Динамику системы определяет действие — интеграл от L по области пространства-времени Ω

$$\mathcal{A}[u(x), \Omega]=\int\limits_{\Omega}\mathcal{L}\,dx, \tag{2}$$

а именно, уравнения движения порождает принцип стационарного действия

$$\delta\mathcal{A}=0. \tag{3}$$

Если, например, лагранжиан зависит от производных u_a не старше второй, уравнения движения (условия равенства нулю первой вариации действия $\mathcal{A}$) имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial u_a}-\partial_i\frac{\partial L}{\partial u_{a,i}}+\partial_i\partial_k\frac{\partial L}{\partial u_{a,ik}}=0. \tag{4}$$

С помощью понятия действия легко описать свойство симметрии пространства-времени. Если для некоторого преобразования координат

$$x'^i=X^i(x) \tag{5}$$

---

* О понятии симметрии см. обстоятельное исследование В. П. Визгина [27в].

и определенным образом соответствующего ему преобразования набора полевых функций

$$u'_a(x') = U_a(u_b(x)) \tag{6}$$

величина действия не меняется

$$\mathscr{A}[u_a(x), \Omega] = A[u'_a(x'), \Omega'],$$

то говорят, что для данной физической системы (1) имеется *симметрия*, или инвариантность относительно преобразований (5), (6). Если преобразование (5) (и соответственно (6)) зависит от набора s непрерывных параметров ω^A, $A = 1, ..., s$,

$$x'^i = X^i(x;\ \omega^A), \tag{5*}$$

то говорят о непрерывной s-параметрической симметрии (обычно предполагается, что нулевым значениям параметров $\omega^A = 0$ соответствует тождественное преобразование).

Так можно говорить о пространственно-временной симметрии *данной* физической системы. С историко-методологической точки зрения представление о *симметрии пространства-времени* * становится физически оправданным по существу только тогда, когда появляется уверенность, что данной симметрии подчиняются *все* (замкнутые) физические системы, поскольку свойства пространства-времени извлекаются из поведения всевозможных физических систем.

Однако на языке уже развитой физической теории симметрии пространства-времени описываются и самостоятельно, геометрически (точнее, хроногеометрически). При этом никакие свойства конкретных физических систем не используются; наоборот, геометрические требования ограничивают динамику системы, вид лагранжиана (1) и трансформационные свойства полевых функций (6).

Таким результатом развития теории стала геометрическая модель пространства-времени специальной теории относительности — пространство Минковского. Это — четырехмерное многообразие с метрикой (интервалом) между *любыми* двумя точками P, Q

$$I(P, Q) = \sum_{i=1}^{3} (\Delta x^i)^2 - (\Delta x^0)^2, \tag{7}$$

где $\Delta x^i = x^i(P) - x^i(Q)$. Естественная линейная структура в этом многообразии и скалярное произведение, определяемое формулой (7), дают возможность описать симметрии пространства-времени Минковского как линейные преобразования, оставляющие инвариантным выражение для интервала. Совокупность таких

---

* Мы будем применять этот термин и для дорелятивистской эпохи.

преобразований симметрии представляет собой 10-параметрическую непрерывную симметрию пространства-времени (если исключить дискретные симметрии, соответствующие отражениям координатных осей). В этой совокупности преобразований вводится групповая структура, образующая 10-параметрическую группу Пуанкаре. Отметим для дальнейшего, что преобразования группы Пуанкаре можно рассматривать как всевозможные преобразования, переводящие одну ортонормированную четверку векторов (базисных векторов, орторепера) в другую.

А теперь подчеркнем простое, но важное для нас обстоятельство: десятипараметричность группы Пуанкаре, наличие десяти независимых непрерывных пространственно-временных симметрий, определяется непосредственно значением размерности пространства-времени, а не специальным видом его метрической структуры; это видно уже из того, что десять симметрий имеются также у пространства-времени классической механики, метрическая структура которого принципиально отличается от метрической структуры пространства Минковского. Проще всего эту связь можно обнаружить, вернувшись от хроногеометрического языка к физическому. Обратимся к принципу относительности, геометрическим воплощением которого при дополнительном условии существования фундаментальной скорости и является пространство-время Минковского. Но нам достаточно даже галилеевского принципа относительности, который предполагает отсутствие фундаментальной скорости и, следовательно, предполагает возможным определение абсолютной одновременности событий.

Принцип относительности в традиционном понимании означает неизменность законов природы относительно выбора инерциальной системы отсчета. В классической механике систему отсчета можно представить как совокупность трех абсолютно твердых стержней, пересекающихся под прямыми углами (и порождающих декартову систему координат), и часы. Так что в классической механике законы природы инвариантны (симметричны) относительно следующих преобразований декартовой системы координат и времени $t, x, y, z \to t', x', y', z'$:

изменение начала отсчета времени (1 параметр Δt),

смещение системы координат параллельно самой себе (3 параметра $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$),

повороты системы координат (3 параметра — например, углы Эйлера),

переход к движущейся инерциальной системе отсчета (3 параметра — компоненты относительной скорости $\mathbf{V}$).

Другими словами можно сказать, что семейство всех инерциальных декартовых систем отсчета характеризуется десятью непрерывными параметрами. Этот факт сохраняет силу и в СТО. Легко видеть, что число 10 определяется значением размерности пространства-времени.

Отметим три важных для дальнейшего обстоятельства.

Во-первых, недоумение может вызвать словосочетание «декартова система отсчета» (а не координат). Но дело в том, что десятипараметричность симметрий пространства-времени проявляется явным образом только при рассмотрении класса одинаково, стандартно устроенных систем отсчета. Декартовость — это, конечно, только одна из возможных стандартизаций систем координат; можно было бы рассматривать с таким же успехом класс сферических или цилиндрических координат. Необходима только максимально жесткая стандартизация сама по себе.

Следует отметить, что 10-параметричность группы симметрий пространства-времени в СТО имеет вовсе не единственное представление, связанное с преобразованиями в классе всех инерциальных систем отсчета. Такое представление, соответствующее принципу относительности в традиционном понимании, является, как подчеркивается А. А. Логуновым [77], лишь одним возможным представлением того фундаментального факта, что пространство-время описывается геометрией Минковского. При этом имеется неоднозначность не только чисто пространственного характера, упомянутая выше (возможность использовать координаты декартовы, сферические, цилиндрические и т. д.), но и пространственно-временного. В [77] сформулирован обобщенный принцип относительности, согласно которому в СТО для любой системы отсчета (инерциальной или *неинерциальной*) можно построить 10-параметрическую совокупность физически эквивалентных ей систем отсчета.

Во-вторых, логически неудовлетворительным должно выглядеть смешанное (преднамеренно) употребление выражений «система координат» и «система отсчета». Разделение этих понятий возможно в классической механике и в СТО, но в случае римановой геометрии, введенной ОТО, плодотворно, как будет показано, как раз слияние этих представлений в понятие «система отсчета координат».

И, наконец, следует отметить, что в случае пространства Минковского существует чисто геометрическое описание его симметрий, обходящееся без класса стандартных систем координат. Это — группа движений, т. е. отображений пространства-времени на себя, сохраняющих интервал. При этом десять независимых симметрий воплощаются в десяти векторных полях Киллинга. Подчеркнем, что это лишь один способ представления симметрий пространственно-временного описания, неприменимый непосредственно уже к ньютоновскому пространству-времени, которое нельзя описать римановой геометрией. Только из-за того, что обычно отождествляют пространственно-временные симметрии с симметриями самого пространства-времени, очевидным кажется, что в общем случае риманова пространства, искривленного в каждой точке по-разному, никаких пространственно-временных симметрий быть не может. Однако в дальнейшем мы покажем, что упомянутое отождествление не обязательно, и предложим подход, выявляющий десять пространственно-временных симметрий с помощью совокупности стандартных систем координат в произвольном римановом пространстве.

В заключении параграфа напомним, что в классической механике и в специальной теории относительности существование привилегированного 10-параметрического семейства инерциальных систем отсчета проявляется в существовании десяти пространственно-временных интегральных законов сохранения. Эта связь законов сохранения и симметрий теории составляет содержание (первой) теоремы Нетер *, которая составляет наиболее фундаментальную основу для получения законов сохранения в достаточно развитой теории. Эта теорема устанавливает связь между симметриями теории (инвариантностью ее действия) и законами сохранения этой теории: каждой однопараметрической симметрии (т. е. каждой однопараметрической совокупности преобразований переменных теории, оставляющих инвариантным действие) соответствует свой закон сохранения.

Напомним формулировку первой теоремы Нетер [15, 27а].

Пусть физическая система характеризуется набором полевых функций $\{u_a(x)\}$, $a=1, 2, \ldots, r$, зависящих от пространственно-временных координат $x=\{x^i\}$, $i=1, \ldots, n$ (размерность пространства-времени n оставляем пока произвольной). Динамика системы описывается лагранжианом L (1) и действием $\mathcal{A}$ (2), т. е. интегралом от L по (n-мерной) области пространства-времени Ω. Уравнения движений (4) порождает принцип стационарного действия (3).

Пусть теперь имеется некоторая s-параметрическая совокупность гладких преобразований координат (для «бесконечно малых» величин параметров $\Delta\omega^A$, $A=1, \ldots, s$)

$$x'^i = x^i + X^i{}_A \Delta\omega^A \tag{8}$$

и соответствующих преобразований полевых функций

$$u'_a(x') = u_a(x) + \Psi_{aA}\Delta\omega^A; \tag{9}$$

величины $X^i{}_A$ и Ψ_{aA} отражают структуру рассматриваемой совокупности преобразований и свойства набора полевых функций $\{u_a\}$.

И пусть, наконец, величина действия $\mathcal{A}$ не меняется при совместном действии преобразований (8) и (9):

$$\mathcal{A}(u_a(x); \Omega) = \mathcal{A}(u'_a(x'); \Omega'). \tag{10}$$

Тогда, как утверждает теорема Нетер, из лагранжиана L, полевых функций u_a, величин $X^i{}_A$, Ψ_{aA} и их производных могут быть построены величины

$$\Theta^i_A = \Theta^i_A(L, u_a, X^i_A, \Psi_{aA}), \tag{11}$$

для которых при соблюдении уравнений поля (4) справедливы s тождеств

$$\partial_i\Theta^i_A = 0, \; A = 1, \ldots, s. \tag{12}$$

* Подробное рассмотрение теоремы Нетер на фоне развития общей взаимосвязи «симметрия — сохранение» см. в книге [27а].

Равенства (12) называются *законами сохранения в дифференциальной форме.* Причина такого названия состоит в следующем. Равенства (12), проинтегрированные по некоторой области пространства-времени Ω, ограниченной гиперповерхностью $\partial\Omega$, в силу теоремы Гаусса эквивалентны соотношениям

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \Theta^i_A d\sigma_i = 0, \qquad (13)$$

которые называются *интегральными законами сохранения.*

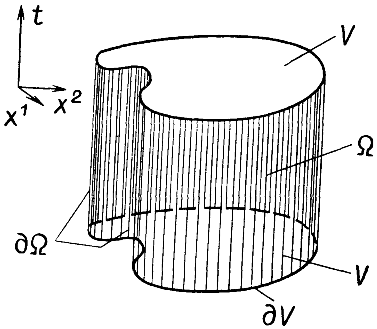
Соотношения (13) действительно можно интерпретировать как законы сохранения. Для этого рассмотрим пространство-время Минковского (или Ньютона),

Рис. 7.1. 2+1-мерная иллюстрация взаимоотношения дифференциальных и интегральных законов сохранения

$$\partial_i\Theta^{iA} = 0 \Rightarrow \int\limits_{\Omega} \partial_i\Theta^{iA}\, d\Omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \oint\limits_{\partial\Omega} \Theta^{iA}\, d\sigma_i = 0;$$

$$\oint\limits_{\partial\Omega} \Theta^{iA}\, d\sigma_i = \int\limits_V \Theta^{0A}\, dV + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\partial V} \Theta^{\alpha A} ds_\alpha$$



и в качестве области Ω выберем четырехмерный цилиндр, у которого нижнее и верхнее основания соответствуют трехмерному объему V в моменты времени t_1 и t_2 (рис. 7.1). Тогда соотношения (13) превращаются в запись баланса

$$C_A(V, t_2) - C_A(V, t_1) = \int Q_A\, dt, \qquad (14)$$

где

$$C_A(V, t) \equiv \int\limits_V \Theta^0_A dV, \qquad (15)$$

$$Q_A(\partial V, t) \equiv \oint\limits_{\partial V} \Theta^\alpha_A dS_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (16)$$

т. е. изменение величины C_A в объеме V равно потоку плотности этой величины через поверхность ∂V, ограничивающую объем V.

Если же удалять поверхность ∂V на бесконечность по пространственным координатам и предполагать, что поля $u_a(x)$ (вместе с Θ^α_A) на бесконечности обращаются в нуль (замкнутая система), то получим *закон сохранения* в «чистом» виде:

$$C_A(t_2) = C_A(t_1), \qquad (17)$$

при этом интегрирование в (15) производится по всему трехмерному пространству.

Соотношения (14), (17) и оправдывают название «законы сохранения» для равенств (12) и (13), которым они эквивалентны. Как подчеркивал Эйнштейн: «Опыт вынуждает нас искать такой дифференциальный закон, который был бы эквивалентен и н т е г р а л ь н ы м законам сохранения импульса и энергии» [141, т. 1, с. 651].

Законы сохранения энергии, импульса, момента импульса для любой замкнутой системы в классической механике и в СТО соответствуют симметриям пространства и времени, а именно инвариантности теории относительно трансляций, поворотов системы отсчета и переходов от одной инерциальной системы отсчета к другой, т. е. однородности и изотропности пространства-времени.

Теорема Нетер прямо показывает, что эти интегральные законы сохранения определяются именно свойствами пространства-времени, а не специфическими свойствами физических систем (хотя, разумеется, конкретный вид сохраняющихся величин $\Theta^i{}_A$ определяется и лагранжианом L, т. е. специфическими свойствами рассматриваемой системы). Отсюда становится понятным всеобщий характер законов сохранения в классической механике и в СТО. Это же дает основание законы сохранения энергии, импульса, момента импульса называть *пространственно-временными законами сохранения.* Чтобы подчеркнуть единое происхождение этих законов сохранения, их можно было бы называть также *законами сохранения энергии-импульса-момента*, хотя в классической механике 10 сохраняющихся величин естественно раскладываются на $1+3+3+3$, а в СТО — на $4+6$ величин.

7.2. ПРИНЦИП СООТВЕТСТВИЯ И ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СИММЕТРИИ

С точки зрения истории науки принцип соответствия — важнейший методологический принцип, которому должно подчиняться развитие науки. Именно этот принцип отражает историческую преемственность в развитии научного знания, его кумулятивный рост. Но если требования принципа соответствия в общем виде представляются вполне очевидными, то конкретное построение соответствия между теориями составляет каждый раз специальную задачу, решение которой жизненно необходимо для утверждения новой, более общей теории. Соответствие может строиться по разным направлениям: по количественному описанию, по структуре понятийного аппарата в целом и в отдельных его частях. Установление соответствия между двумя теориями (старой и новой) состоит из двух компонент. Во-первых, надо очертить область явлений, допускающих описание обеими теориями; по существу это означает установление области применимости старой теории. Во-вторых, надо найти путь (или пути) от концептуального аппарата новой теории к старой; надо составить, так сказать, «старо-новый словарь». Эта задача очень непроста, поскольку концептуальные структуры сравниваемых теорий в наиболее интересных случаях различаются на очень глубоких уровнях. Кроме того в «старо-новый словарь» не попадают многие «слова» как нового, так и старого языков — они оказываются непереводимыми. Поэтому особая роль предназначена «словам», имеющим смысл в обеих теориях и занимающих сходное положение в их структурах. К таким «словам» относится размерность пространства-времени.

Выявление связи между понятийными аппаратами двух теорий в духе принципа соответствия включает в себя анализ соответствия между физическими и математическими составляющими этих теорий. Ограничиваясь чисто геометрическим аспектом, мы рассмотрим понятие пространственно-временной симметрии в пространстве Минковского, являющемся геометрической основой СТО, и в произвольно искривленном псевдоримановом пространстве, к которому привела релятивистская теория тяготения.

Согласно обычной точке зрения, в общем случае риманова пространства невозможно говорить о его симметриях, потому что в разных точках оно искривлено по-разному, а симметрии возникают только тогда, когда кривизна подчиняется каким-то условиям (в частности, максимальная возможная симметрия имеется в пространстве постоянной кривизны). Однако такие специальные случаи, имеющие меру нуль в множестве всевозможных римановых геометрий, не могут представлять особого интереса для теории, которая геометрию заранее не ограничивает.

Говоря о том, что понятие пространственно-временной симметрии в произвольной римановой геометрии теряет смысл, ссылаются иногда на закономерность подобного отмирания старых понятий при развитии науки. Например, переход от классической механики к квантовой привел к отмиранию понятия (наблюдаемой) траектории частицы. Однако в квантовой механике почти сразу было показано, *как* (в духе принципа соответствия) понятие траектории может стать оправданным. В случае же симметрий в римановом пространстве ситуация совсем другая. Не известен путь, реализующий принцип соответствия, к пространственно-временным симметриям в случае малых отклонений геометрии от плоской (островная конфигурация, о которой иногда говорят в связи с этим и которая обладает симметриями «на бесконечности», не исчерпывает всех возможностей, так как кривизна может быть мала глобально, но без евклидовости на бесконечности; например случай кривизны очень большого, но конечного радиуса). Каковы те общие понятия и структуры, имеющиеся в римановой геометрии, которые могли бы перейти в структуру симметрий геометрии Минковского? Ответ на этот вопрос необходим независимо от отношения к возможности ввести понятие симметрии в римановой геометрии.

Нетривиальность соответствия между геометрией Минковского и римановой геометрией ясно видна из следующего обстоятельства, подчеркиваемого А. А. Логуновым. Часто можно встретить слова о том, что в достаточно малой области риманова пространства справедлива геометрия Минковского. Однако это утверждение, понимаемое буквально, разумеется, неверно. Ведь геометрическая характеристика риманова пространства — тензор кривизны или его инварианты — имеет локальный характер, т. е. определена в точке, и никакое уменьшение области пространства не может эту характеристику изменить, в частности, обратить ее в нуль, соответствующий геометрии Минковского.

Чтобы утверждение о локально-лоренцевском, локально-плоском характере геометрии малой области риманова пространства приобрело смысл, оно должно быть сформулировано с помощью величин, относящихся к области в целом, величин типа d^2/R^2, где d — размеры области, а R — радиус кривизны; одна из простейших величин такого рода — разность суммы углов треугольника и 2π, зависящая от величины треугольника. Во всяком случае ясно, что искомое описание должно использовать метрический язык.

С точки зрения принципа соответствия вопрос может быть поставлен так: что в ОТО можно поставить в соответствие 10-параметрической группе Пуанкаре, списывающей и по существу эквивалентной геометрии пространства Минковского? Разумеется, не группу всех гладких преобразований координат, и не только потому, что она ∞-параметрична (хотя и этого достаточно), но и потому, что такую же группу можно ввести в пространстве Минковского в СТО.

Локально плоский характер геометрии пространства-времени в ОТО обычно не связывается с представлением о группе Пуанкаре как пределе некоторой структуры, определенной в общем римановом пространстве (см., напр., [Мизнер, Уилер, Торн, 1977]), несмотря на то что наиболее плодотворное для физики понимание геометрии пространства Минсковского основано на свойствах группы Пуанкаре. Считается, что в общем римановом пространстве, не имеющем симметрий движения, нельзя естественным образом определить конечно-параметрическое семейство преобразований координат [Траутман, 1967] (а имеет смысл говорить лишь о ∞-параметрической группе всех гладких преобразований координат). Однако это мнение основано на отождествлении симметрий пространства с его движениями. Как будет видно из дальнейшего, пространственно-временные симметрии можно сопоставить не только движениям пространства, но и перемещениям наблюдателя, т. е. надлежащим образом определенной системы отсчета.

В случае однородного пространства, и в частности в СТО, известны два подхода к преобразованиям в пространстве, называемые *активным* и *пассивным* *, которые по существу эквива-

---

* Ср. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1970, с. 362.

лентны. Согласно активной точке зрения система координат не меняется, а переносится в пространстве рассматриваемая геометрическая или физическая система, например область, в которой не равны тождественно нулю лагранжиан и полевые функции, входящие в выражение для действия. Несколько иначе активную точку зрения можно выразить так: наблюдатель (система отсчета) стоит на месте, а перемещается все пространство вместе со всем, что в нем находится. Согласно пассивной точке зрения пространство со всем своим содержимым находится на месте, а перемещается наблюдатель (система отсчета). В результате каждой из этих процедур меняются координаты в рассматриваемой области пространства, причем различие между активным и пассивным подходами невозможно даже выразить во «внутренних» терминах, т. е. не предполагая еще какое-то объемлющее пространство.

В общем римановом (произвольно искривленном) пространстве активный подход неосуществим: в общем случае пространство не может перемещаться «по себе», и невозможно достаточно сложную систему (например, уже систему из $n+2$ точек в n-мерном пространстве) переносить без внутренних изменений (в указанном примере — без изменений расстояний между точками). Однако пассивный подход — перемещение наблюдателя, т. е. системы отсчета, надлежащим образом определенной, — вполне реализуем и приводит, как мы увидим, для n-мерного риманова пространства к $n(n+1)/2$-параметрической совокупности преобразований координат, обладающей к тому же квазигрупповой структурой, обобщающей структуру группы Пуанкаре.

Но прежде чем перейти к соответствующему построению, рассмотрим вкратце вопрос о системах отсчета, который неразрывно связан с вопросом о пространственно-временных симметриях.

Довольно распространенное нежелание специально рассматривать понятие системы отсчета в римановом пространстве-времени было бы оправдано, если бы физический интерес представляли только скалярные, не зависящие от системы отсчета, величины, однако это, как известно, не так.

Связь симметрий пространства-времени с понятием системы отсчета, как указывалось, существует уже в СТО. Действительно, наличие пространственно-временных законов сохранения в СТО связано с инвариантностью действия относительно преобразований из группы Пуанкаре, связывающих различные инерциальные системы отсчета. С математической точки зрения в пространстве Минковского выбирается совокупность стандартных систем координат, которые допускают физическую интерпретацию в виде систем отсчета, так как координаты здесь порождаются вполне определенной процедурой.

Смешивание понятий системы отсчета и системы координат в ОТО, справедливо критикуемое [100], имеет тем не менее реальные основания в том, что с точки зрения физики система отсчета — это прежде всего конкретный способ установления координат точек пространства-времени. В дальнейшем будет использоваться именно такое представление о системе координат, жестко сцепленной с системой отсчета. Это представление мы закрепим в выражении *«система отсчета координат»*.

В СТО инерциальные системы отсчета сопоставляются обычно декартовым системам координат в пространстве Минковского. Конечно, пространство-время в СТО можно описывать в любых координатах (сферических, цилиндрических и т. д.), но при получении законов сохранения ограничиваются лишь декартовыми системами. Обязательно ли такое ограничение? Ограничение классом стандартных систем координат обязательно, только тогда возникает 10-параметрическая $(10=n(n+1)/2$ при $n=4)$ группа преобразований, описывающая симметрию пространства-времени в СТО (однородность и изотропность), но не обязательно именно декартовыми. Можно использовать и ограничение только сферическими координатами или любым другим классом стандартных, т. е. одинаково определенных, координат. Каждый такой класс координат пригоден для описания симметрии пространства-времени в СТО.

В СТО инерциальные системы отсчета координат называют привилегированными, имея на то веские и хорошо известные причины. Представление о классе привилегированных систем отсчета координат (вообще говоря весьма неоднозначное [39а]) в ОТО будем связывать лишь с возможностью *общего, стандартного и конструктивно описанного*, т. е. физически реализуемого, *способа введения координат*. В этом смысле классов «привилегированных» систем отсчета координат может быть и несколько, хотя по существу эти классы должны быть изоморфны.

Необходимость в предварительном ограничении, стандартизации способа описания вполне естественна. Чтобы выявить инвариантные свойства какого-то объекта, нужно разным наблюдателям изучать его с максимальным возможным ограничением на произвол в средствах исследования. Все наблюдатели, находящиеся в различных состояниях, должны руководствоваться стандартной методикой, чтобы в результате исследования были зафиксированы свойства объекта, а не различных методик, или, точнее, чтобы нестандартность методик не затушевывала свойства объекта.

Поэтому, переходя к римановой геометрии, нужно будет выяснить вопрос о возможности определить класс в достаточной мере стандартных систем отсчета координат и, чтобы удовлетворить принципу соответствия, этот класс в общем случае 4-мерного риманова пространства должен образовать 10-параметрическую совокупность.

7.3. ПОДХОД К СИММЕТРИЯМ В РИМАНОВОЙ ГЕОМЕТРИИ, ОСНОВАННЫЙ НА МЕТРИЧЕСКОМ ПОНЯТИИ РАЗМЕРНОСТИ (НЕФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ)

1. Начнем с простого вопроса: почему в СТО существует именно десять независимых (непрерывных) пространственно-временных симметрий? Нетрудно получить ответ: потому что пространство-время имеет четыре измерения. Действительно, в n-мерном пространстве-времени Минковского имеется n независимых трансляций по n осям и $C_n{}^2=n(n-1)/2$ независимых поворотов, всего $n+n(n-1)/2=n(n+1)/2$ независимых преобразований симметрий. Если $n=4$, то $n(n+1)/2=10$.

Именно таково происхождение 10-параметричности группы Пуанкаре, описывающей симметрии пространства-времени в СТО. Эта группа, как и всякая группа, может мыслиться чисто алгебраически, но для физиков группа Пуанкаре срослась с одним из своих представлений — линейным представлением в 3+1-мерном пространстве Минковского M^{3+1}. Это представление образуют все возможные линейные преобразования, переводящие одну декартову систему координат M^{3+1} в другую или сохраняющие метрическую структуру — выражение для интервала

$$(\Delta s)^2=-c^2(\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2.$$

Подчеркнем, что это представление группы Пуанкаре — лишь одно из возможных и, как мы увидим, не самое удобное для обобщения на риманово пространство R^{3+1}.

В специальной теории относительности количество симметрий метрической структуры пространства-времени определяется значением его размерности. При этом само понятие размерности может пониматься как размерность линейного пространства. Понятие размерности линейного пространства достаточно для построения конечно-параметрической (в n-мерном случае — $n(n+1)/2$-параметрической) совокупности систем координат, или, в физической интерпретации, совокупности инерциальных систем отсчета в СТО.

Теперь перейдем к римановой геометрии ОТО. Напомним, что мы хотим и в произвольном n-мерном римановом пространстве указать естественную $n(n+1)/2$-параметрическую совокупность систем отсчета координат.

Наглядное и кажущееся решающим возражение против такого намерения состоит в том, что наличие естественной конечно-параметрической совокупности преобразований координат должно отражать какую-то симметрию пространства-времени, какое-то свойство, не меняющееся от точки к точке. А в произвольно, т. е. в каждой точке по-разному, искривленном пространстве такого свойства быть, казалось бы, не должно.

Читатель этой книги, однако, вполне подготовлен к тому, чтобы сразу увидеть недостаточность такого возражения (не зря же слово «размерность» употребляется в этой книге чаще, чем во многих других). Действительно, в произвольно искривленном пространстве-времени ОТО есть свойство, не меняющееся от точки к точке — это *размерность пространства-времени.* С точки зрения, выделяющей в физической теории динамические и абсолютные элементы [Траутман, 1966], можно сказать, что в ОТО не вся структура пространства-времени полностью является динамическим элементом, остается и абсолютный элемент — размерность пространства-времени.

Задача автора теперь состоит в том, чтобы превратить это тривиальное, на первый взгляд, наблюдение в развернутый подход. В этом параграфе мы ограничимся неформальным описанием, точные определения вводимых понятий и конструкций см. в § 7.4.

Прежде всего ясно, что понятие размерности линейного пространства, на котором основана связь законов сохранения с размерностью в СТО, неприменимо для искривленного риманова пространства ОТО (если не ограничиваться строго локальным описанием). В то же время топологическое понятие размерности, которое обычно кладут в основу описания многообразия, для наших целей оказывается слишком грубым, так как оно, в частности, игнорирует метрическое устройство пространства-времени, являющееся как раз основной структурой для ОТО.

Поэтому нужно ввести понятие размерности на метрическом языке [Горелик, 1978]. В основу положим понятие интервала (или мировой функции) $I(P, P')$ между двумя точками пространства-времени P и P'. Такое описание пространства-времени, как известно [Синг, 1963], эквивалентно обычному описанию с помощью метрического тензора g_{ik}, или интервала ds между двумя бесконечно близкими точками

$$I(P, P') = \left(\int\limits_{P}^{P'} ds \right)^2, \quad ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{18}$$

здесь интегрирование ведется по геодезической, соединяющей точки P и P' (см. также § 3.1).

Фиксирование в пространстве какой-то одной точки b^1 задает на этом пространстве функцию $f(P) = I(P, b^1)$. Фиксирование в n-мерном пространстве n точек $\{b^i\}$, $i = 1, \ldots, n$, образующих базис (точные определения см. в § 7.4), порождает некоторую систему координат — каждой точке пространства P ставится в соответствие n чисел $I(P, b^i)$. Эти координаты, вводимые с помощью метрики пространства, можно назвать *метрическими*, или *I-координатами.* В 4-мерном пространстве Минковского базис — это любые четыре точки в общем положении, т. е. не лежащие в одной двумерной плоскости. Понятие размерности, которое мы будем использовать, и связанные с ним конструкции опираются на обобщение такого геометрического факта:

в евклидовом (псевдоевклидовом) n-мерном пространстве необходимо зафиксировать ровно n точек, чтобы с помощью расстояний (интервалов) до этих точек задать положние любой другой точки пространства.

Такое задание на самом деле двузначно (задаются две точки, симметричные относительно гиперплоскости, определяемой точками базиса), однако это не меняет существенно ситуацию.

Всю метрическую структуру данного риманова пространства R^n мы будем описывать с помощью одной функции Γ от $2n$ переменных. Эта функция задает интервал между любыми двумя точками R^n через интервалы от этих точек до точек базиса:

$$I(P, P') = \Gamma(..., I(P, b^i), ...; ..., I(P', b^i), ...), \quad i = 1, ..., n.$$

Рассмотрим совокупность всех систем метрических координат, порожденных всевозможными базисами. Поскольку каждая такая система координат полностью определяется положением точек, образующих базис, то для перехода от одной системы координат к другой достаточно задать положение нового базиса $\{b'^i\}$ по отношению к старому $\{b^i\}$, т. е. n^2 чисел $I(b'^i, b^k)$; $i, k = 1, ..., n$. Эти n^2 чисел можно представить в виде матрицы $n \times n$.

Однако не все эти n^2 параметров существенны. Для того чтобы исключить «координатные» эффекты полностью, нужно способ введения системы координат сделать максимально жестким, но, разумеется, все еще пригодным для произвольного искривленного пространства-времени. Для этого следует использовать только стандартные, полностью *нормированные* базисы, фиксируя, например, интервалы между точками базиса так, чтобы они совпадали по величине с интервалами в пространстве Минковского между началом координат и концами пространственных ортов, т. е. между точками (0000), (0100), (0010), (0001) в декартовых координатах.

Использование нормированных базисов исключает $n(n-1)/2$ параметров, поскольку считаются заданными $C_n^2 = n(n-1)/2$ интервалов между точками базиса. Таким образом, совокупность базисов (или систем метрических координат) характеризуется $n(n+1)/2$ параметрами (в 4-мерном случае — 10-ю параметрами, т. е. так же, как группа Пуанкаре). Если же зафиксировать положение одной из точек базиса, то придем к $n(n-1)/2$-параметрической совокупности систем координат (в 4-мерном случае — 6-параметрической, так же, как группа Лоренца).

Построенный класс систем отсчета координат можно назвать классом привилегированных систем координат в смысле, указанном в § 7.2. Действительно, все входящие в этот класс системы координат устроены одинаково и могут быть введены в произвольно искривленное пространство.

2. С введенной $n(n+1)/2$-параметрической совокупностью базисов, или систем отсчета координат, можно связать естественным образом *квазигрупповую структуру*. Для этого зафиксируем некоторый базис b_0 (нижний индекс будет нумеровать базисы). Тогда любой другой базис соответствует некоторой матрице $n\times n$. Последовательность перехода от базиса b_0 к базису b_1 и затем от b_1 к b_2 эквивалентна переходу от b_0 сразу к b_2 — это дает возможность определить групповое произведение двух матриц (оно, конечно, не совпадает с обычным произведением двух матриц, а определяется метрической структурой пространства-времени, т. е. функцией $I(p, p')=\Gamma(I(P, b);\ I(P', b))$). Если матрица B задает переход от базиса b_0 к базису b_1, то обратной (в групповом смысле) матрицей естественно назвать транспонированную матрицу B^{T}, которая задает переход от b_1 к b_0. Так определенные операции произведения и взятия обратного элемента приводят в пространстве R^n к $n(n+1)/2$- и $n(n-1)$-параметрическим квазигруппам, которые можно назвать *квазигруппами Пуанкаре* $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ и *Лоренца* $q\mathscr{L}\mathrm{R}^n$.

Математическое понятие группы давно уже стало в различных областях физики привычным рабочим понятием. Квазигруппа — объект для физики новый. Основное отличие квазигруппы от группы — *неассоциативность* закона умножения, т. е. для трех элементов квазигруппы A, B, C в общем случае $(AB)C\neq A(BC)$. Как алгебраический объект квазигруппа известна в математике уже около полвека [12]. Однако только в последние годы обнаружилась значительная роль, принадлежащая квазигруппам в дифференциальной геометрии [Сабинин, 1981]. Неассоциативность — та цена, которую приходится платить за переход от изучения высокосимметричных пространств (например, пространств постоянной кривизны) к изучению пространств, кривизна которых может меняться от точки к точке произвольным образом.

Простейший пример непрерывной однопараметрической квазигруппы на плоскости порождает кривая с отмеченной точкой. Пусть некоторая кривая пересекается любой окружностью (с центром на самой кривой) только в двух точках. Зададим на этой кривой направление и зафиксируем некоторую точку O на кривой. Квазигруппу образуют перемещения от точки O по кривой, если (в аддитивной записи) сумму двух перемещений определить следующим образом: перемещение $(a)\,\widehat{+}\,(b)$ — это результат последовательного перемещения по кривой из выделенной точки O сначала на расстояние a, затем на расстояние b, но при этом расстояние измерять не вдоль кривой (это была бы группа), а по плоскости (см. рис. 7.2).

Только в частных — симметричных — случаях прямой или окружности эта квазигруппа становится группой. Поэтому приближение формы кривой к прямой или окружности «приближает» квазигруппу к группе.

Вернемся теперь к введенной квазигруппе $q\mathcal{P}\mathrm{R}^n$. На первый взгляд может показаться, что никакой неассоциативности здесь быть не должно. Действительно, рассматривается совокупность специальных систем координат и переходы внутри этой совокупности. Но совокупность всех систем координат в R^n порождает группу произвольных гладких преобразований координат $\mathcal{E}\mathrm{R}^n$,

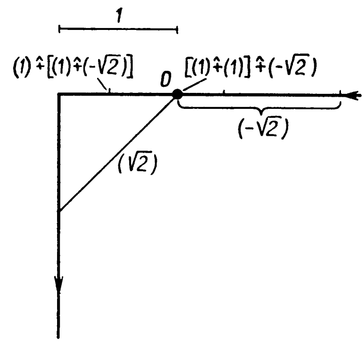


Рис. 7.2. Пример однопараметрической непрерывной квазигруппы — перемещения по ориентированной кривой с выделенной точкой. В аддитивной записи перемещение $(a)\hat{+}(b)$ — результат последовательного перемещения из выделенной точки O на расстояние a (расстояние измеряется по плоскости, а не вдоль кривой) и затем на расстояние b. Для кривой, изображенной на рисунке

$$[(1)\hat{+}(1)]\hat{+}(-\sqrt{2})=(0)\neq$$
$$\neq(1)\hat{+}[(1)\hat{+}(-\sqrt{2})]=(2-\sqrt{2})$$

операция умножения в которой, разумеется, ассоциативна. Поэтому кажется, что и совокупность систем координат, порождающая $q\mathcal{P}\mathrm{R}^n$ и являющаяся лишь частью всех систем координат, должна давать ассоциативную структуру. Однако следует помнить, что групповая структура определяется не столько совокупностью составляющих ее элементов, сколько операцией произведения. Когда говорят, что преобразования в совокупности произвольных систем координат в R^n образуют группу (или псевдогруппу [Кобаяси, Номидзу, 1981]) $\mathcal{E}\mathrm{R}^n$, то подразумевают, что групповое произведение — это обычная суперпозиция функций: если $x_1=f_1(x)$, $x_2=f_2(x)$, $x_3=f_3(x)$, где $f_3=f_2f_1$, то это означает, что $x_3=f_2(f_1(x))$. Таким образом, групповое произведение в $\mathcal{E}\mathrm{R}^n$ не связано с метрической структурой конкретного пространства R^n.

В отличие от этого произведение в $q\mathcal{P}\mathrm{R}^n$ определяется именно с помощью метрической структуры данного пространства R^n конкретно, с помощью функции Г, описывающей геометрическое устройство данного пространства R^n. После фиксирования некоторого базиса b_0 произведения (в $q\mathcal{P}\mathrm{R}^n$) преобразований координат AB и $(AB)C$ также будут суперпозициями, но произведение $A(BC)$ настоящей суперпозицией уже не будет, поскольку произведение BC мы должны вычислять, исходя из базиса b_0, а не из базиса, в который перешел бы базис b_0 под действием преобразования A. Иначе говоря, неассоциативность $q\mathcal{P}\mathrm{R}^n$ для произвольно искривленного пространства R^n связана с тем, что из-за неоднородности пространства результат произведения двух преобразований базиса зависит от положения исходного базиса.

Так что квазигруппа $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ и группа $\mathscr{E}\mathrm{R}^n$, вообще говоря, не связаны отношением включения. Только в случае однородного пространства неассоциативность $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ исчезает и она становится конечномерной подгруппой бесконечномерной группы $\mathscr{E}\mathrm{R}^n$.

3. Введенная для общего риманова пространства R^n квазигруппа $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ в случае пространства Минковского изоморфна группе Пуанкаре, т. е. $q\mathscr{P}\mathrm{M}^n=\mathscr{P}^n$. Действительно, каждое преобразование из группы Пуанкаре в стандартном линейном представлении взаимно-однозначно соответствует некоторому преобразованию пространственных ортов (0100), (0010) и (0001). Каждому набору пространственных ортов взаимно-однозначно соответствует базис, образованный началом ортов и их концами. И каждое преобразование ортов взаимно-однозначно соответствует преобразованию базиса.

В пространстве Минковского совокупность преобразований одного базиса в другой, выраженных через взаимные расстояния (интервалы) точек, составляющих базисы, образует представление группы Пуанкаре, но представление нелинейное. Оно выглядит сложнее обычного линейного, но зато допускает обобщение на случай искривленного пространства.

С помощью введенных понятий можно придать смысл в духе принципа соответствия уже упоминавшемуся утверждению о локально-лоренцовском (плоском) характере пространства-времени в ОТО. Для этого нужно рассматривать квазигруппу базисов с нормировкой, соответствующей точкам (0000), ($0a00$), ($00a0$), ($000a$) в пространстве Минковского, при $a\to 0$.

4. Итак, искомая $n(n+1)/2$-параметрическая совокупность преобразований систем координат, или (помня о необходимости физической интерпретации) систем отсчета координат, построена в произвольно искривленном римановом пространстве-времени, причем эта совокупность, как оказалось, обладает квазигрупповой структурой.

Обычно считается, что математическим выражением симметрии является группа, однако общее представление о симметрии допускает и более общие математические реализации. Например, не видно причин, чтобы не называть симметрией совокупность преобразований, допускающую последовательное проведение преобразований (замкнутость относительно произведения), содержащую единичное преобразование и для каждого преобразования имеющую обратное. Но это и есть квазигруппа. Требование ассоциативности (превращающее квазигруппу в группу) кажется не более обязательным для описания симметрии, чем требование коммутативности (выполняемое только для простейших симметрий).

Но какую же симметрию произвольно искривленного пространства R^n описывает квазигруппа $q\mathscr{P}R^n$? Обычно конечно-параметрическая симметрия пространства понимается как симметрия движения, т. е. как наличие свойства, не меняющегося при определенных перемещениях в пространстве. В случае произвольно искривленного пространства, казалось бы, не существует каких-либо инвариантных его свойств. Однако в действительности такое свойство есть — это размерность пространства-времени (одна и та же во всех его точках). Инвариантной величиной является также интервал между любыми двумя точками пространства-времени. Описание размерностной однородности пространства-времени на метрическом языке и приводит к квазигруппе $q\mathscr{P}R^n$. Другими словами можно сказать, что квазигруппа $q\mathscr{P}R^n$ представляет *симметрию описания* пространства R^n наблюдателем (системой отсчета координат, «сделанной» из четырех — в 4-мерном случае — точек пространства-времени с фиксированными интервалами между ними), или, точнее, взаимосогласованность пространственно-временных описаний одной и той же физической системы разными, но стандартными наблюдателями (системами отсчета координат). В тех случаях, когда пространство R^n имеет p-параметрическую симметрию движения, это должно отражаться в существовании в квазигруппе $q\mathscr{P}R^n$ p-параметрической подквазигруппы, которая является группой.

Однако не противоречит ли использование специальных, «привилегированных» (в совершенно определенном и указанном в § 7.2 смысле*) систем отсчета принципу общей ковариантности, лежащему, как обычно считается**, в основе ОТО?

Среди требований, предъявляемым к допустимым понятиям в ОТО, нередко выдвигалось требование общековариантности соответствующих конструкций, возможности использовать *произвольные координаты* [Петров, 1963, с. 125, 146]. Сознание убежденного релятивиста всегда сопротивлялось отступлением от об-

* Напомним, что классом «привилегированных» систем отсчета координат здесь считается всякая совокупность стандартных систем координат, т. е. одинаково определяемых с помощью внутренней метрической структуры пространства-времени и допускающих введение в произвольно искривленное пространство-время. Вовсе не требуется, чтобы такой класс был один. В E^3, например, подобные классы образовывали бы совокупность всех декартовых систем координат, совокупность всех сферических систем координат и т. д. В произвольном римановом пространстве, кроме используемого в этой главе класса «привилегированных» систем отсчета координат — совокупности всех систем I-координат (порожденных всевозможными четырехточечными базисами), можно указать и другие подобные классы систем отсчета координат: римановы (нормальные) координаты, координаты Ферми и т. д. (см. § 3.2). Системой отсчета координат в римановом пространстве можно называть конструкцию, состоящую из: 1) точки пространства-времени, 2) четырех ортонормированных векторов в этой точке и 3) осуществимого в произвольном пространстве-времени способа арифметизации, выраженного с помощью только внутренних метрических понятий.

** Мы не будем здесь обсуждать горячую и долгую полемику, связанную со смыслом и значением общей ковариантности (см. [Франкфурт, 1968; Гинзбург, 1979; Фок, 1979]).

щей ковариантности, усматривая в этом (как правило, не без оснований) опасность для основ ОТО. Однако, даже если не говорить о смешении понятий системы отсчета и системы координат (см. § 7.2), следует подчеркнуть, что по сути ОТО требует только, чтобы построение, ведущее к некоторому понятию, было осуществимо для *произвольной геометрии* (не известной *до* задания характеристик вещества, заполняющего пространство-время).

Как мы уже могли убедиться, вопрос о пространственно-временных симметриях неразрывно связан с вопросом о системах отсчета (жестко сцепленных с понятием системы координат и поэтому называемых системами отсчета координат). Нельзя говорить об инвариантности какого-либо объекта, не позаботившись заранее о стандартности, «калибровке» приборов, исследующих этот объект (в нашем случае искривленное пространство-время, заполненное вещество).

Когда в СТО говорят о любых системах отсчета, то при этом всегда (молча или вслух) подразумевают «любые инерциальные декартовы системы координат». Поэтому и в римановом пространстве-времени нужно искать ограничение на системы отсчета, «равномощное» ограничению инерциальности и декартовости в СТО. Системы отсчета в римановой геометрии, конечно, также должны иметь возможность быть «любыми»: если система отсчета связывается как-то с некоторой пространственно-временной структурой, то должна иметься возможность связывать систему отсчета с любой такой же структурой, находящейся в любом другом месте пространства-времени. При этом, разумеется, остается возможность использовать произвольные координаты (эта возможность, впрочем, имеется уже в СТО). Только понятие системы отсчета должно математически отображаться более «материальной» и конкретной конструкцией, чем физически эфемерное понятие произвольной системы координат.

Итак, противоречит ли использование специальных систем отсчета координат принципу общей ковариантности? Нисколько. Для описания искривленного (как, впрочем, и плоского) пространства допустимы, действительно, любые координаты. Однако постановка задачи, нацеленная на выявление симметрий пространственно-временного описания, предполагает стандартизацию, ограничение систем координат. Такая стандартизация неоднозначна, но обязательна.

Допустимость произвольных преобразований координат непосредственно связана с самой математической моделью пространства-времени в ОТО. Риманово многообразие в общем случае имеет топологически сложную структуру и не может быть покрыто одной картой. Никакая спецификация координат не может отменить этот факт.

В связи с этим следует сделать замечание по поводу «области определения» введенных понятий. Эта область определения в общем случае может быть не глобальной, а *полуглобальной*, т. е. все введенные понятия определены по отношению к конечным областям пространства-времени. Поэтому в общем случае квазигруппу $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ следует считать локальной [Сабинин, 1981], или, лучше сказать, полуглобальной, чтобы подчеркнуть, что речь идет не только о самой точке и о касательном пространстве. Поскольку в основе нашего построения лежит понятие интервала между конечно удаленными точками, или мировая функция, то существуют также известные [Синг, 1963] ограничения, связанные с тем, что для некоторых пар точек может существовать несколько геодезических, соединяющих их, а для некоторых пар точек — ни одной. Однако эти ограничения не могут уменьшить область определения до меньших, чем полуглобальные, размеров.

В заключение параграфа перечислим основные элементы предлагаемого подхода к симметриям в римановом пространстве-времени:

1) существенное использование метрической структуры пространства-времени, выраженной через интервал $I(P, P')$ между конечно удаленными точками P и P';

2) размерность пространства-времени описывается на метрическом языке с помощью понятия базиса (набора из четырех опорных точек);

3) в непосредственной связи с понятием размерности вводится класс систем отсчета метрических координат, который после стандартизации обнаруживает структуру $4(4+1)/2$-параметрической квазигруппы, обобщающей группу Пуанкаре на случай искривленного пространства.

Указанные элементы необходимы для подхода в целом. Некоторые изменения возможны только при выборе способа стандартизации систем метрических координат (могут по-другому фиксироваться внутрибазисные интервалы или даже может использоваться другая структура системы отсчета координат), однако совершенно необходимо, чтобы координаты были метрическими, т. е. порождались метрикой пространства-времени.

7.4. РАЗМЕРНОСТЬ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА R^n И КВАЗИГРУППА ПУАНКАРЕ $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$

1. Понятие размерности, выраженное на метрическом языке, и метрические координаты. Как известно, описание римановой геометрии с помощью метрического тензора g_{ik}, или интервала ds между двумя «бесконечно близкими» точками, эквивалентно описанию с помощью интервала $I(P, P')$ между двумя (конечно удаленными) точками P и P'

$$I(P, P') = \left(\int_{P}^{P'} ds\right)^2, \tag{20}$$

где интегрирование ведется по геодезической, соединяющей точки P и P' [Синг, 1963]. В дальнейшем основной будет именно функция $I(P, P')$.

Рассмотрим в пространстве (в дальнейшем для краткости пространством называется псевдориманово пространство-время) некоторое множество M (область пространства либо все пространство). Совокупность принадлежащих M точек $b=\{b^k\}$, $k=1, \ldots, n$, назовем *базисом* в M, если существует функция Γ от $2n$ непрерывных и двух дискретных (двузначных) переменных, такая, что для любой пары точек $P, P' \in M$

$$I(P, P') = \Gamma(\ldots, I(P, b^k), \ldots, \sigma(P); \ldots, I(P', b^k), \ldots, \sigma(P')), \tag{21}$$

или, в краткой записи,

$$I(P, P') = \Gamma(I(P, b);\ I(P', b)). \tag{21a}$$

Функция Γ описывает геометрию пространства. Минимальное число точек в базисе как раз и является *размерностью* области M.

Каждой точке можно приписать $n+1$ число: n интервалов до «опорных» точек базиса и дискретный параметр $\sigma = \pm 1$, показывающий, в какой стороне от гиперповерхности, определяемой базисом, находится точка; и наоборот, каждому такому набору из $n+1$ числа соответствует не более одной точки. Гиперповерхность, определяемая базисом, задается уравнением

$$\Gamma(I^1, \ldots, I^n, +1;\ I^1, \ldots, I^n, -1) \equiv \Pi(I^1, \ldots, I^n) = 0 \tag{22}$$

(в случае плоского пространства это — гиперплоскость, проходящая через точки базиса).

Каждый базис $b=\{b^k\}$ порождает некоторую систему отсчета координат — каждой точке пространства P ставится в соответствие n чисел $x^k = I(P, b^k)$. Координаты, порождаемые метрикой пространства, естественно назвать *метрическими*. Использование метрических координат — существенный элемент вводимых конструкций.

Вообще говоря, для данного базиса $\{b^k\}$ не любому набору чисел $\{I^k\}$ отвечает некоторая точка пространства P, такая, что $I(P, b^k) = I^k$. Соответствующее уточнение существенно зависит от типа метрики: для дефинитной метрики, например, любая совокупность достаточно малых чисел не соответствует никакой точке пространства. Для рассматриваемой же здесь индефинитной метрики, наоборот, любая совокупность достаточно малых чисел соответствует некоторой точке пространства. На границе области допустимых значений метрических координат находятся точки, удовлетворяющие уравнению $\Pi(I^1, \ldots, I^n)=0$, и, в частности, сами точки базиса.

Положение базиса b_1 по отношению к базису b_2 (нижние индексы будут отличать один базис от другого) описывает матрица

$$B^{ik}(b_1, b_2) \equiv I(b_1^i, b_2^k). \tag{23}$$

Каждый базис можно характеризовать матрицей внутрибазисных интервалов

$$B^{ik}(b, b)=I(b^i, b^k). \tag{24}$$

В дальнейшем будем использовать только стандартные, *нормированные* базисы, для каждого из которых

$$B(b, b)=B_0=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В пространстве Минковского матрица B_0 отвечает базису, образованному точками (0000), (0100), (0010) и (0001); здесь выбрана сигнатура метрики $(-+++)$, обобщение на $n\neq4$ очевидно. При рассмотрении перехода к малым областям пространства следует использовать базисы, для которых $B(b, b)=a^2B_0$, и затем устремлять $a\to0$.

При использовании нормированных базисов в матрице $B(b, b_0)$ независимыми оказываются только $n(n+1)/2$ из n^2 элементов (например, B^{ik} при $i\leqslant k$), остальные определяются из условий нормированности с помощью функции Γ, фигурирующей в определении базиса и задающей геометрию пространства. Например, элемент $B^{10}(b, b_0)=I(b^1, b^0{}_0)$ определяется из уравнения $1\equiv I(b^1, b^0)=$ $=\Gamma(I(b^1, b_0); I(b^0, b_0))$ и т. д.

Таким образом, нормированные базисы (и, следовательно, системы отсчета координат, порожденные всевозможными нормированными базисами) образуют $n(n+1)/2$-параметрическую совокупность.

2. Квазигруппа Пуанкаре. С совокупностью базисов можно следующим образом связать квазигрупповую структуру. Зафиксируем некоторый базис b_0; с ним связана функция Γ_0 определенного вида. Отметим, что задание функции Γ_0 для базиса b_0 приводит к вполне определенному виду Γ_1 для базиса b_1. Индекс у функции Γ в дальнейшем будем опускать, поскольку ее аргументы указывают явно, к какому базису она относится.

Рассмотрим совокупность матриц $n\times n$. Определим групповое произведение матриц B_1 и B_2 следующим образом: будем считать, что матрица B_1 задает переход от базиса b_0 к b_1, а матрица B_2 — от b_1 к b_2. Произведением матриц B_1 и B_2 назовем матрицу B, задающую переход от b_0 к b_2. Элементы этой матрицы определяются соотношением

$$B^{ik} \equiv I(b_2^i,\ b_0^k) = \Gamma(I(b_2^i,\ b_1);\ I(b_0^k,\ b_1)). \tag{26}$$

Таким образом, порождаемое функцией Γ (т. е. геометрией) произведение матриц B_1 и B_2 можно записать в виде

$$B = B_1 \otimes B_2 = \Gamma(B_2;\ B_1^{\text{т}}), \tag{26a}$$

здесь $B^{\text{т}}$ — транспонированная матрица B, а сама запись показывает: для того чтобы найти элемент матрицы B^{ik}, являющейся групповым произведением матриц B_1 и B_2, нужно в качестве аргументов Γ взять i-тую строку матрицы B_2 и k-тый столбец B_1.

Определим теперь операцию взятия *обратного элемента*. Если матрица B задает переход от базиса b_0 к b_1, то обратным элементом $(B)^{-1}$ естественно назвать матрицу перехода от b_1 к b_0, т. е.

$$(B)^{-1} = B^{\text{т}} \tag{27}$$

(во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что верхний индекс «—1» обозначает обратный элемент именно в групповом смысле, а не в смысле обычной матричной алгебры). Роль *единицы* выполняет матрица B_0, имеющая вид (25).

Введенные операции произведения и обратного элемента для совокупности нормированных базисов определяют структуру $n(n+1)/2$-параметрической квазигруппы с единицей [12, 79], которая становится группой в случае однородных пространств, когда функция Γ — одна и та же для всех базисов. Элементами этой квазигруппы можно считать матрицы $n \times n$, у которых задаются элементы B^{ik} при $i \geqslant k$; с учетом и дискретных (двузначных) параметров σ эти матрицы имеют размер $n \times (n+1)$, при этом $(n+1)$-й столбец занимает двузначные параметры σ. Эту квазигруппу, действующую на римановом пространстве R^n и обобщающую группу Пуанкаре $\mathscr{P}^n$ (см. п. 3), обозначим $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ и назовем **квазигруппой Пуанкаре.**

3. Случай пространства Минковского. Рассмотрим теперь, чему соответствуют введенные конструкции в пространстве Минковского, т. е. в спецрелятивистском пределе. С каждым базисом свяжем систему декартовых координат: b^0 — начало координат, $b^{1,2,3}$ — концы пространственных ортов, т. е. $b^0 = (0000)$, $b^1 = (0100)$, $b^2 = (0010)$, $b^3 = (0001)$. В случае пространства Минковского (как и для других однородных пространств) функция Γ универсальна, т. е. одна и та же для любого нормированного базиса. Нетрудно найти ее явный вид:

$$I(P,\,P') = -(x^0 - x'^0)^2 + \sum_{k=1,2,3} (x^k - x'^k)^2 = \Gamma_M(I(P,\,b);\ I(P',\,b)) =$$
$$= -\left[\sigma\left(\frac{1}{4}\sum_{k\neq 0}(I^0 - I^k + 1)^2 - I^0\right)^{1/2}\Big|_P^{P'}\right]^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\sum_k\left[(I^k - I^0)\,\Big|_P^{P'}\right]^2, \qquad (28)$$

здесь $I^k = I(\cdot,\ b^k)$, $\sigma = \pm 1$, используется обозначение
$$f\,\Big|_P^{P'} = f(P') - f(P).$$

Лоренцевскому преобразованию (переходу к системе отсчета, движущейся со скоростью v вдоль оси x^1) соответствует матрица

$$B(b',\,b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & B^{11} & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (29)$$

где $B^{11} = 2(1 - \operatorname{ch}\psi)$, а ψ — известный угловой параметр
$$\operatorname{ch}\psi = (1 - v^2)^{-1/2}.$$

Поскольку в общем римановом пространстве изменение положения только одной точки базиса описывается матрицей вида (29), то там можно *определить* преобразование Лоренца, связав его с матрицей (29).

Нетрудно убедиться, что произведение (26) двух матриц вида (29), порождаемое функцией (28), соответствует релятивистскому закону сложения скоростей.

В случае пространства Минковского M^n группа $q\mathscr{P}M^n$ изоморфна группе Пуанкаре, поскольку преобразование как из группы Пуанкаре (определяемой обычным образом), так и из $q\mathscr{P}M^n$ однозначно определяется заданием нового положения трех пространственных ортов, либо, что то же самое, начальной и конечных точек этих ортов. Ясно также, что подгруппа группы $q\mathscr{P}M^n$, образованная всеми преобразованиями, оставляющими неподвижной одну точку базиса b^0, изоморфна однородной группе Лоренца. Эти обстоятельства оправдывают названия: квазигруппа Пуанкаре $q\mathscr{P}R^n$ и квазигруппа Лоренца $q\mathscr{L}R^n$.

Хотя группу Пуанкаре обычно представляют как совокупность преобразований координат, оставляющих инвариантным выражение $(\Delta s)^2 = -(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2$, ее с тем же правом можно представить и как совокупность преобразований координат, оставляющих инвариантным выражение (28).

4. О пространственно-временных законах сохранения в ОТО *. Наличие конечно-параметрической совокупности преобразований координат в римановой геометрии, казалось бы, побуждает перенести в ОТО связь между десятипараметрической симметрией и законами сохранения, которая в специальной теории относительности осуществляется теоремой Нетер. Однако в действительности для этого нет оснований. Как уже подчеркивалось, пространство Минковского — геометрическая основа СТО — специальный, вырожденный случай общей римановой геометрии, а в вырожденном случае могут сливаться свойства, «расщепляющиеся» в общем случае. Декартовы системы координат в пространстве Минковского выделены сразу в двух смыслах — в геометрическом и в физическом. Глубокая физическая выделенность инерциальных систем отсчета и физически вполне операциональная суть пространственно-временных координат в СТО нашли свое выражение в геометрической выделенности декартовых координат в пространстве Минковского. В общем римановом случае ситуация отличается принципиально. Использованные в построении квазигрупповой структуры l-координаты образуют весьма специальный класс координат, о выделенности, о привилегированности которого, вполне аналогичной привилегированности инерциальных систем отсчета в классической механике и в СТО, говорить нельзя.

Сама по себе конечнопараметричность некоторой совокупности преобразований координат, хотя она и может быть формально «подставлена» в теорему Нетер, конечно, не может привести к подлинным законам сохранения. Если мы, например, в римановом пространстве зафиксируем некоторую систему координат и затем рассмотрим все системы координат, получаемые из исходной всевозможными преобразованиями Пуанкаре, то придем к 10-параметрическому семейству систем координат. Действие ОТО $\int R\sqrt{-g}\,dx$, инвариантное относительно произвольных гладких преобразований координат, инвариантно, конечно, и относительно преобразований внутри полученного 10-параметрического семейства систем координат. Эта инвариантность в соответствии с теоремой Нетер формально сразу же приводит к десяти «законам сохранения». Однако ясно, что эти «законы сохранения» не имеют права на такое название.

К этому следует добавить, что l-координаты, хотя и могут быть введены в пространстве Минковского, приводят к очень громоздкому выражению для метрики (28), не поддающемуся физической интерпретации.

---

* Этот пункт появился в результате обсуждения с В. И. Денисовым.

КРАТКИЕ ИТОГИ ГЛАВЫ 7

Предлагаемый подход к симметриям в римановом пространстве основывается на следующих обстоятельствах.

Трудность (или даже невозможность) введения понятия симметрии в общем римановом пространстве связывается иногда с тем, что в теории, основанной на римановой геометрии, все характеристики пространства-времени утрачивают абсолютный смысл и становятся динамическими элементами теории. Однако в действительности и в римановой геометрии имеется абсолютный элемент — размерность, предполагаемая одной и той же для всех точек пространства-времени.

Такая размерностная однородность выражается симметрией квазигруппового характера, если размерностную структуру пространства-времени описывать на метрическом языке. В этом описании основную роль играет интервал между двумя точками пространства-времени. При этом четырехмерная геометрия пространства-времени задается функцией восьми переменных, выражающей интервал между двумя произвольными (полуглобально) точками через интервалы от этих точек до четырех фиксированных (базисных) точек.

Важный элемент развиваемого подхода — введение и использование понятия системы отсчета координат, жестко связывающего физическое представление о системе отсчета и математическое представление о системе координат. Это понятие дает возможность использовать координатные условия, по жесткости равномощные ограничению инерциальными декартовыми системами отсчета координат в специальной теории относительности. Тем самым, появляется возможность в общем n-мерном римановом пространстве (аналогично случаю геометрии Минковского) выделить из ∞-параметрической совокупности всех систем координат $n(n+1)/2$-параметрическую совокупность стандартно устроенных систем отсчета координат.

Описание размерности общего риманова пространства R^n с помощью его метрической структуры (с помощью понятия метрических координат) позволяет ввести квазигруппу $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$, размерность которой $n(n+1)/2$ точно так же связана с размерностью риманова пространства, как размерность группы Пуанкаре $\mathscr{P}^n$ связана с размерностью пространства Минковского M^n. В случае пространства Минковского введенная квазигруппа просто изоморфна группе Пуанкаре $q\mathscr{P}\mathrm{M}^n = \mathscr{P}^n$. Это дает возможность по-новому взглянуть на связь размерности пространства-времени с (пространственно-временными) законами сохранения энергии-импульса-момента в специальной теории относительности.

В проведенном построении существенным является выделение из совокупности всех систем отсчета координат таких (l-координат), которые весьма специальным образом определяются метрической структурой пространства. Выделенность этих координат имеет не физическое, а чисто геометрическое происхождение и этим принципиально отличается от выделенности инерциальных систем отсчета в СТО. В частности поэтому, нельзя говорить о том, что $n(n+1)/2$-параметрическая квазигруппа $q\mathscr{P}\mathrm{R}^n$ порождает нетеровски законы сохранения энергии-импульса-момента в произвольно искривленном пространстве-времени общей теории относительности.

Общая литература к главе 7: [8, 27, 44е, 92, 100, 117, 124, 139]

Глава 8

ПОНЯТИЕ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И СОВРЕМЕННАЯ ФИЗИКА

8.1. ОБ ЭВОЛЮЦИИ ВЗАИМООТНОШЕНИЙ ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКИ

Размерность пространства-времени — одно из наиболее глубоких понятий, используемых в геометрическом описании физической реальности. Однако математические модели пространства-времени, используемые в современной физике, вовсе не исчерпываются описанием размерностной структуры. Важнейшее изменение в понимании геометрической структуры фундаментальных взаимодействий, происходящее в последние годы, связано с понятиями калибровочной симметрии и расслоенного пространства. Именно с калибровочными теориями поля сейчас связываются наибольшие надежды на построение единой теории всех фундаментальных взаимодействий, включая и гравитацию. В такой теории должна найти свое место и планковская длина, которая, как мы видели, соответствует квантовым пределам применимости классической геометрии и, в частности, классической размерностной структуры пространства-времени.

Чтобы яснее увидеть положение квантово-гравитационной длины в современной теории, рассмотрим схематично эволюцию взаимоотношений геометрии и физики в целом.

Для истории этих взаимоотношений характерны две особенности: 1) геометрическая модель, лежащая в основе фундаментальных физических теорий, уже не раз обнаруживала свою недостаточность, ограниченную применимость; 2) каждая замена, обобщение * геометрической модели пространства-времени представляла собой геометризацию некоторого фундаментального физического факта.

Геометрию пространства-времени в ньютоновской физике (т. е. ньютоновские представления о пространстве и времени, соединен-

---

* Слово «обобщение» не может в данном случае употребляться без оговорок. В физике это понятие имеет специфический смысл. Развитие теории включает в себя одновременно и обобщение и специализацию, большую гибкость (общность) отдельных компонентов теории и большую жесткость (однозначность) конструкции теории в целом. Обобщение происходит только по отношению к количественным предсказаниям в конкретных задачах, а не по структуре теории. Принцип соответствия имеет довольно сложную структуру. Теоретическая физика — это иерархия моделей, относящихся друг к другу более сложно, чем частный случай к общему. При этом «устаревшие» модели, как правило, не утрачивают практического значения и остаются в арсенале физики.

ные с принципом относительности Галилея*) обозначим символом $E^3 \times T$. Ограниченность этой геометрической модели проявилась, как известно, в том, что в ней не смогла поместиться полная теория электромагнитного поля. Фундаментальный физический факт независимости (физически измеримой [77]) скорости света от системы отсчета означал необходимость заменить ньютоновские представления о пространстве и времени. Однако осознание подлинного геометрического смысла такой замены, геометризация факта постоянства скорости света произошли через два года после создания СТО. В результате появилась новая геометрическая модель пространства-времени — пространство-время Минковского M^{3+1}. Даже Эйнштейн убедился в необходимости геометрической интерпретации СТО не сразу, а только в процессе поисков релятивистской теории тяготения [Визгин, 1981].

Эти поиски, как известно, обнаружили ограниченность и самой геометрии Минковского. Переход к новой геометрической модели — пространству-времени Эйнштейна, или к псевдоримановой геометрии R^{3+1}, был связан с геометризацией еще одного физического факта — независимости движения тела в гравитационном поле от свойств тела. Этот факт, известный еще Галилею, Эйнштейн превратил в принцип эквивалентности, с помощью которого и была создана ОТО.

Изменение геометрического компонента физической теории, которое, по-видимому, происходит в настоящее время, еще не завершено в полной мере. Это изменение, связанное с глубокими идеями калибровочной симметрии и суперсимметрии, началось в некотором смысле с шага назад, поскольку исходным пунктом для обобщения стала геометрия Минковского M^{3+1}, но в то же время новая геометрия претендует на то, чтобы сделать два шага вперед и прийти к теории, включающей также квантовую гравитацию, т. е. претендует на квантовое обобщение псевдоримановой геометрии R^{3+1}**.

Геометрический аспект теории калибровочных полей представляет геометрия расслоенного пространства. Схематически новая геометрическая модель выглядит следующим образом. За основу берется структура пространства-времени Минковского M^{3+1}, однако каждая мировая точка (событие) теперь характеризуется не только тремя пространственными и одной временной координатами, но и значением некоторого набора из N полей (N может быть различным). Точкой пространства-времени является, таким обра-

* Именно включение в геометрию преобразований Галилея, перемешивающих пространственные и временную координаты, позволяет не считать излишней модернизацией термин «пространство-время» применительно к ньютоновской физике.

** Впрочем, поскольку квантовую теорию не удалось включить в рамки ОТО, говорить о шаге назад можно только применительно ко всему геометрическому арсеналу физики.

зом, N-мерное (внутреннее) пространство $S^{(N)}$. В этом пространстве задается некоторая группа симметрии, (калибровочные) преобразования которой связывают физически эквивалентные ситуации. Согласованность калибровочных преобразований обеспечивается заданием калибровочного векторного поля. Требование локально-калибровочной инвариантности теории достаточно для построения вполне определенной динамики поля [110]. Исторически первым примером калибровочной симметрии (считавшейся вначале чисто формальной) была неоднозначность величины электромагнитного потенциала. Геометрию калибровочной теории поля будем обозначать символом $M^{3+1}\times S^{(N)}$ (в этом символе отражена, конечно, не вся информация о теории: не указана калибровочная группа и т. д.).

На основе калибровочного подхода уже построена успешная теория электрослабых взаимодействий, разрабатывается теория сильных взаимодействий. И наконец, объединение калибровочного принципа с идеей суперсимметрии, как сейчас предполагается, должно привести к теории, объединяющей все четыре фундаментальных взаимодействия. Эта теория уже имеет название — супергравитация, хотя в настоящее время слово «супергравитация» обозначает скорее направление исследований, чем вполне определенную физическую теорию. С принятой нами геометрической точки зрения наиболее существенным элементом различных вариантов теории супергравитации является новая геометрическая модель — так называемое *суперпространство*. Эту геометрическую модель, объединяющую черты геометрии ОТО, т. е. R^{3+1}, и геометрии расслоенных пространств $M^{3+1}\times S^{(N)}$, можно обозначить символом $SR^{3+1+(N)}$.

Точка z в суперпространстве характеризуется координатами $z^{\Lambda}=(x^{\mu}, \theta^{\alpha})$, включающими и обычные пространственно-временные (бозе-) координаты x^{μ}, $\mu=1, \ldots, 4$ и антикоммутирующие (ферми-) координаты $\theta^{\alpha i}$, где $\alpha=1, \ldots, 4$ — спинорный индекс, а $i=1, \ldots, N$ — индекс внутренней симметрии (индексы αi объединяют в один $\alpha=1, \ldots, 4N$). Итак, разные координаты точки суперпространства $z^{\Lambda}=(x^{\mu}, \theta^{\alpha})$ подчиняются разным коммутационным соотношениям:

$$[x^{\mu}, x^{\nu}]=0,$$

$$\{\theta^{\alpha}, \theta^{\beta}\}=0.$$

Антикоммутирующие величины, образующие алгебру Грассмана, появляются естественным образом при описании спинорных полей, физически соответствуя принципу Паули для фермионов. Свойства грассмановых чисел существенно отличаются от обычных. В частности, $(\theta^{\alpha})^2=0$, и, следовательно, всякий одночлен степени большей, чем количество образующих в алгебре Грассмана, также обращается в ноль. Однако несмотря на это удалось построить дифференциальное и интегральное исчисления в грассмановом пространстве, дающие возможность рассматривать бозе- и ферми-случаи вполне аналогично (Ф. А. Березин).

Идея суперсимметрии позволила связывать друг с другом бозе- и ферми-поля. При этом естественным образом появлялись параметры полевых преобразований, имеющие как коммутирующий, так и антикоммутирующий характеры. Эти антикоммутирующие параметры впоследствии и превратились в θ-координаты суперпространства.

Геометрическая структура может вводиться в суперпространство не одним способом. Различные варианты теории супергравитации отличаются типом геометрии и тем, насколько полно геометризована теория, т. е. имеются ли в теории динамические переменные и соотношения негеометрического характера. Неединственность геометрической структуры, которой может быть снабжено обычное (не супер-) многообразие, известна давно. Кроме римановой геометрии, лежащей в основе ОТО, были построены (в частности, для целей единых теорий поля) геометрия с кручением, геометрия Вейля и др. Риманова геометрия сводится к метрическому тензору g_{ik}, который и описывает метрическую структуру и определяет закон параллельного переноса векторов. В более общих геометриях закон параллельного переноса задается с помощью величин (связностей), независимых от g_{ik}. Вместо метрического тензора может использоваться набор из n (в n-мерном случае) векторных полей, образующий в каждой точке многообразия локальный репер.

Сама по себе геометрия дает много возможностей для введения геометрической структуры в многообразие. Это относится и к супермногообразию. С этим произволом физикам пока не удалось справиться.

В качестве иллюстрации объединительных возможностей идеи суперпространства мы рассмотрим такой вариант теории, который не считается уже конкурентоспособным, но зато устроен довольно просто, аналогично ОТО (локальная суперсимметрия в суперпространстве).

Подлинно единый характер этого варианта теории состоит в том, что вся физика (и вся геометрия) в этой теории описывается одним суперполем $g_{\Lambda\Pi}(z)$ — метрическим тензором суперпространства

$$ds^2 = dz^\Lambda g_{\Lambda\Pi}(z) dz^\Pi .$$

Все физические поля (как фермионные, так и бозонные) появляются в теории следующим образом. Представим суперполе $g_{\Lambda\Pi}(z)$ в виде ряда по ферми-координатам θ^α. Этот ряд в силу антикоммутирующего характера координат θ содержит только конечное число членов

$$g_{\Lambda\Pi}(z) = \sum_{0}^{4N} g_{\Lambda\Pi\,\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)\,\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_n}$$

(все члены степени по θ, большей $4N$, тождественно обращаются в ноль). Коэффициенты разложения $g_{\Lambda\Pi\{\alpha\}}(x)$ как раз и являются физическими полями (бозе- или ферми- в зависимости от четности количества спинорных индексов α).

Калибровочной группой теории является группа общих преобразований координат в суперпространстве

$$z^\Lambda = z'^\Lambda + \xi^\Lambda(z).$$

Условие инвариантности метрики суперпространства ds^2 при таких преобразованиях приводит к вполне определенному закону преобразования суперполя $g_{\Lambda\Pi}$. Раскладывая векторное калибровочное суперполе $\xi^\Lambda(z)$ в (конечный) ряд

$$\xi^\Lambda(z) = \sum_{0}^{4N} \xi^\Lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)\,\theta^{\alpha_1}\ldots\theta^{\alpha_n},$$

получают все физические калибровочные преобразования $\xi^\Lambda_{\alpha_1\ldots\alpha_n}(x)$.

Аналогично римановой геометрии ОТО метрический супертензор $g_{\Lambda\Pi}$ порождает кривизну $R_{\Lambda\Pi}$. И наконец, вариационный принцип для действия

$$\mathcal{A}\,[g_{\Lambda\Pi}] = \int dz \sqrt{-g}\,[R + (4N - 2)\,\lambda],$$

где λ — суперкосмологическая константа, должен однозначно определить всю динамику теории (уже без участия негеометрических лагранжианов, как в ОТО).

Подчеркнем еще раз, что даже столь схематично описанные рамки для теории супергравитации отнюдь не являются общими для всех попыток построения этой теории.

Подведем итог сказанному с помощью схемы сменяющихся геометрических моделей (рис. 8.1):

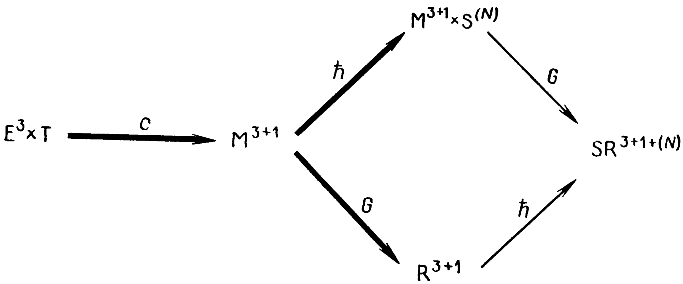


Рис. 8.1. Эволюция физической геометрии. Тонкие линии соответствуют еще не пройденным в полном смысле путям

На схеме тонкие стрелки соответствуют предполагаемым переходам, указаны также фундаментальные физические константы, полный учет которых в физической теории совпадает с переходом к новому геометрическому описанию *. Таких констант всего три: c, G и $\hbar$, именно с этими константами мы встречались в главе 5 при рассмотрении взаимоотношения физических теорий и в связи с квантовыми пределами классического геометрического описания.

Бросается в глаза асимметрия приведенной схемы: константы G и $\hbar$ употреблены в ней дважды, а c — только один раз. Сим-

* Пояснения требует, пожалуй, только константа $\hbar$ на пути от M^{3+1} к $M^{3+1} \times S^{(N)}$. С математической точки зрения для этого перехода не нужны никакие физические константы (как, впрочем, и для перехода от M^{3+1} к R^{3+1}). Однако главная физическая причина перехода к программе калибровочных теорий поля состояла в перенормируемости таких теорий. Перенормируемость же — это явно $\hbar$-свойство. В настоящее время перенормируемость многими считается лишь формальным свойством (не сопоставимым с физическими фактами постоянства скорости света и равенства инертной и гравитационной масс). Однако беспрецедентная точность, с которой выполняются предсказания квантовой электродинамики (первой калибровочной, перенормируемой теории), успехи других калибровочных теорий побуждают думать, что перенормируемость — это по меньшей мере псевдоним какого-то глубокого физического принципа (калибровочной симметрии?).

метрию можно обрести с помощью схематического изображения «пространства фундаментальных физических теорий в $cG\hbar$-системе координат», так называемого куба теорий [Зельманов, 1967]. Эта схема получается следующим образом. Каждой фундаментальной физической теории * сопоставим точку в некотором трехмерном пространстве, по трем координатным осям которого отложены «значения» констант c^{-1}, G и $\hbar$. Если какая-то из этих констант в теории вообще не учитывается, будем считать, что соответствующая координата теории равна нулю; если константа учтена полностью, координата равна единице; промежуточные по-

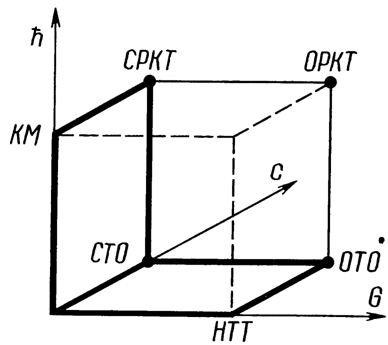


Рис. 8.2. «Пространство» физических теорий в $cG\hbar$-системе координат. НТТ — ньютоновская теория тяготения, СТО — специальная теория относительности, КМ — квантовая механика, ОТО — общая теория относительности, СРКТ — специально-релятивистская квантовая теория поля, ОРКТ — общерелятивистская квантовая теория ($G\hbar$-вершине куба только теоретически соответствует нетривиальная область определения)

ложения занимают «полуклассические» теории, в которых константа учитывается приближенно.

Таким образом, теория с координатами (0, 0, 0) — это классическая механика, ($0c^{-1}$, $1G$, $0\hbar$) — ньютоновская теория гравитации, ($1c^{-1}$, $0G$, $0\hbar$) — СТО, ($1c^{-1}$, $1G$, $0\hbar$) — ОТО и т. д. **(рис. 8.2)**. Можно также называть ньютоновскую теорию гравитации G-теорией, квантовую механику — $\hbar$-теорией; СТО — c-теорией; ОТО — cG-теорией; спецрелятивистскую квантовую теорию (СРКТ) — $c\hbar$-теорией; квантовую теорию гравитации, которая сейчас считается совпадающей с общей релятивистской квантовой теорией (ОРКТ), можно назвать $cG\hbar$-теорией. В этом трехмерном $cG\hbar$-представлении пространства физических теорий легко увидеть и схему сменяющихся геометрических моделей, изображенную на рис. 8.1, се образуют ребра куба, соединяющие вершины (0, 0, 0), (c^{-1}, 0, 0), (c^{-1}, G, 0), (c^{-1}, 0, $\hbar$) и (c^{-1}, G, $\hbar$).

Описанная $cG\hbar$-структура теоретической физики содержит и соображения Гамова, Иваненко, Ландау [1928] о выделенном положении констант $c, G, \hbar$ (см. § 5.6) и размышления Бронштейна

* Фундаментальной естественно называть теорию, не являющуюся частным случаем какой-либо другой теории. Например, теория атома — частный случай квантовой механики, но классическая механика не является частным случаем квантовой механики или СТО (их взаимоотношение, имеющее предельный характер, устроено более сложно, см. также сноску в начале этой главы).

об отношении физических теорий друг к другу и к космологической теории (см. § 5.3 и рис. 5.1). То обстоятельство, что на схеме истории физической геометрии появились константы c, G, $\hbar$, имеет прямое отношение к вопросу о пределах геометрического описания. На пути превращения тонких линий схемы рис. 8.1 в толстые стоит проблема, серьезность которой не вполне осознается современной физикой. Эта проблема порождается квантовыми границами применимости ОТО, которые в то же время являются гравитационными границами применимости спецрелятивистской квантовой теории; можно говорить о $\hbar$-границах для cG-теории и о G-границах для $c\hbar$-теории. Такие границы, как мы видели в гл. 5, впервые обнаружил М. П. Бронштейн еще в 1935 г. За прошедшие полвека выводу, к которому пришел Бронштейн, была придана более современная и более определенная форма, но по существу он полностью сохранил свою силу и даже (при учете ситуации в современной теоретической физике) приобрел особую актуальность.

Наличие таких $cG\hbar$-границ, которым соответствуют вполне определенные — планковские (см. гл. 5) — значения характерных физических величин не только чрезвычайно важно для передовых областей физики (космологии и физики элементарных частиц), но и ставит под сомнение достижение синтеза общерелятивистских и квантовых идей на основе только уже известных теоретических конструкций. На нынешнем этапе развития супергравитации (наиболее вероятного, с современной точки зрения, кандидата на роль $cG\hbar$-теории) вопрос о $cG\hbar$-границах пока остается в тени, однако нет сомнений, что действительная $cG\hbar$-теория одним из своих следствий должна дать исчерпывающий ответ на этот вопрос. Рассмотрение сменяющих друг друга геометрических моделей «одного и того же» физического пространства-времени демонстрирует удивительную живучесть геометрии: обнаружение пределов применимости одного геометрического описания преодолевалось в другом, более общем, а точнее, более глубоком геометрическом описании физической реальности. Это могущество геометрии позволяет надеяться, что и $cG\hbar$-теория будет построена на основе геометрии — $cG\hbar$-геометрии.

Чем объясняется такое могущество геометрии? Этот вопрос, конечно, является лишь частью более общего вопроса о «непостижимой эффективности математики» в физике [Вигнер, 1971], но все же частью очень специфической. Трудно не прийти к выводу, что могущество геометрии в физике отражает некую объективную особенность устройства материального мира, пространственно-временной характер его структуры. Однако взаимоотношение геометрии и физики, каким оно видится сейчас при рассмотрении эволюции теоретической физики в «$cG\hbar$-системе координат», оказывается не очень простым.

С одной стороны, в физике находят применение все более сложные геометрические модели. Но, с другой стороны, сама физическая геометрия все более впитывает в себя физику.

По отношению к евклидовой геометрии легко могла возникнуть иллюзия, что это — порождение «чистого разума», не зависящее от негеометрической физической реальности. Но геометрия Минковского, впитавшая в себя чисто физический (во всяком случае для начала 20 в.) факт постоянства скорости света, уже могла рассматриваться по меньшей мере как геометрическая часть физической реальности. Переход к римановой геометрии ОТО, впитавшей в себя еще один физический факт (в форме принципа эквивалентности), лишил возможности считать геометрию отдельным компонентом физической реальности, геометрию скорее следовало сопоставить определенной проекции реальности. При этом сами геометрические понятия не могли даже быть физически осмыслены в отрыве от негеометрического компонента теории (геодезическая — свободное движение пробной частицы и т. п.). Переход от пространства Минковского к расслоенному пространству калибровочных теорий заменил понятие точки пространства-времени («не имеющей частей») на внутреннее пространство, описывающее состояние физического поля, динамика которого на фоне геометрии M^{3+1} и должна давать физику. И наконец, если супергравитация действительно станет $cG\hbar$-теорией, то возможно, что понятие пространственно-временных координат и физических полей перестанут отличаться принципиальным образом [138], и тогда можно будет сказать, что геометрическое описание имеет физические пределы только потому, что физическое описание имеет геометрические пределы.

Однако в последнее время в физике появился еще более сильный прогноз. Как мы видели, в $cG\hbar$-кубе непокоренной осталась только одна вершина — $(c^{-1}, G, \hbar)$. И считается вполне возможным, что объединение всех четырех фундаментальных взаимодействий (с точки зрения $cG\hbar$-схемы — освоение вершины $(c^{-1}, G, \hbar)$) окажется последним значительным событием в истории фундаментальной теоретической физики *.

Такой прогноз развития взаимоотношений между физикой и геометрией обладает, возможно, лишь одним недостатком — он слишком однозначен. Несомненно только то, что построение $cG\hbar$-теории открыло бы совершенно новую панораму физической реальности.

Какую же роль может сыграть понятие размерности в предстоящих изменениях физической картины мира? О важности этого понятия говорит уже то, что 3+1-мерность уцелела во всех радикальных перестройках физической геометрии. Однако само по

* Один из выдающихся современных физиков, который обсуждает такую возможность, явно упоминает при этом грандиозный провал подобного прогноза конца прошлого века [Хокинг, 1981].

себе это не означает, что размерности и впредь суждено оставаться на недосягаемой высоте. Многое в современной физической ситуации говорит о том, что размерность может сыграть конструктивную роль в развитии физической теории. В оглавлениях физических журналов гораздо чаще, чем в недавнем прошлом, встречается слово «размерность»: изучаются модельные варианты теории поля в пространстве различной размерности и зависимость свойств этих моделей от значения размерности; используется понятие струн (т. е. 1-мерных объектов) в теории сильных взаимодействий; возобновились на новой основе попытки использовать $3+1+k$-мерную геометрию (типа Калуцы — Клейна) [69] и даже в рамках ортодоксальной теории перенормировок появился метод размерной регуляризации [110].

Появились и более существенные, во всяком случае более общие, основания. В физической геометрии калибровочных теорий поля объединяются пространство-время и внутреннее (калибровочное) пространство, в супергравитации устанавливается связь четырех пространственно-временных координат и N координат пространства внутренних симметрий. В результате не только возникает вопрос о связи чисел N и $3+1$. Появляется также возможность рассматривать пространственно-временные и полевые переменные единым образом, так, чтобы разделение этих переменных имело не абсолютный характер («пространственно-полевая демократия» [Шварц, 1980]). Тем самым можно было бы ожидать динамически нетривиального поведения размерности физического пространства-времени. Ведь для калибровочных теорий характерно как раз такое нетривиальное поведение: спонтанное нарушение симметрии может снабдить массой изначально безмассовые поля, интенсивность взаимодействия может убывать при сближении частиц и т. д. О возможности нетривиального поведения размерности, сопряженного с механизмом спонтанного нарушения симметрии, речь будет идти в § 8.4 при рассмотрении ранних квантово-гравитационных стадий эволюции Вселенной, когда становится неизбежным учет теории элементарных частиц.

8.2. О ВЫДЕЛЕННОСТИ ЗНАЧЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ, РАВНОГО $3+1$

Эренфестовский анализ превратил трехмерность пространства в физический факт. Однако уже само физическое обоснование этого факта, как мы видели, предполагает выход за рамки трехмерности. Чтобы сравнить с экспериментом значение размерности и обосновать трехмерность пространства, нужно рассматривать *различные* значения размерности. Всякое исследование, подобное эренфестовскому, может дать физические свидетельства трехмерности как экспериментального факта, но как мы видели, свидетельства довольно разнородные: свойства планетной системы, спектр водорода, выполнимость принципа Гюйгенса. В то же время факт трехмерности — как один из самых фундаментальных физических фактов — вызывает стремление теоретически осмыслить выделенное положение трехмерности.

Почему именно три измерения? Этот вопрос сам по себе находится вне физики (в современном ее понимании), хотя, как мы видели в первых главах, именно этот «ненаучный» вопрос не раз привлекал внимание выдающихся ученых. В настоящее время в физике существует несколько отношений к этому вопросу, несколько его расшифровок.

Рассматривая существующие точки зрения, нам придется выйти далеко за рамки обычных естественнонаучных ограничений на характер обсуждаемых вопросов и иметь дело с преднаучными, или метафизическими (в исходном смысле этого слова), установками. Эти установки опираются на предположения, касающиеся по существу *конечного* (!) состояния физической науки. И несмотря на то, что будущая *окончательная* физика представляется очень по-разному, уровень спекулятивности, характерный для таких предположений, примерно одинаков и не имеет аналогов в современной физике.

1. Самое, пожалуй, распространенное отношение к вопросу «Почему именно три?» состоит в том, что этот вопрос объявляется совершенно нефизическим, поскольку трехмерность пространства — одно из наиболее фундаментальных положений в физике, аксиома для физической картины мира и, как и всякая аксиома, не подлежит дальнейшему анализу.

2. Вторая точка зрения подчинена идеалу Единой теории. В соответствии с этим идеалом физик может полностью удовлетвориться только такой теорией, в которой нет, так сказать, свободных параметров. В такой теории, в частности, должны быть получены все безразмерные константы, характеризующие физический мир. Размерность пространства может рассматриваться как одна из таких величин*. Сейчас уже ясно, что от теории следует требовать не просто однозначную, универсальную и независящую от условий структуру физической реальности, а скорее структуру структур, иерархическую структуру взаимодействий, нарушаемых и восстанавливаемых симметрий. Поэтому вовсе не обязательно, чтобы такая теория давала для размерности только одно числовое значение, имеющее некий абсолютный смысл, а не сложное динамическое поведение. Однако трехмерность пространства в определенном диапазоне физических явлений все равно должна быть результатом теории. Более того, теория должна в некотором смысле доказать единственность такого значения; речь

* Здесь и в дальнейшем мы для определенности будем говорить о фундаментальных константах (относя к ним и размерность пространства-времени). Ясно, однако, что фундаментальные константы не исчерпывают структуру физики, хотя к фундаментальным константам можно отнести и такие величины, как порядок высшей производной в лагранжиане или количество кварков.

идет по существу о единственности системы аксиом, фиксируемой не на эмпирическом, а на теоретическом уровне.

Именно такой точки зрения придерживался Эйнштейн:

«Скорость света *с* является одной из величин, входящих в физические уравнения в качестве «универсальной константы». Однако если взять за единицу времени вместо секунды то время, за которое свет проходит 1 см, то *с* больше не будет входить в уравнения. В этом смысле можно было бы сказать, что константа *с* лишь *кажется* универсальной константой.

Очевидно и всеми принято, что можно было бы исключить из физики еще две универсальные константы, вводя вместо грамма и сантиметра надлежащим образом выбранные «естественные» единицы (например, массу и радиус электрона).

Если представить себе это выполненным, то в основные уравнения физики могли бы входить только «безразмерные» константы. Относительно этих последних мне хотелось бы высказать утверждение, которое в настоящее время нельзя основать ни на чем другом, кроме веры в простоту, т. е. понятность природы: *произвольных* констант такого рода не существует. Иначе говоря, природа устроена так, что можно логически установить настолько сильные законы, что в этих законах будут только рационально полностью определенные константы (а не константы, численную величину которых можно было бы менять, не разрушая теорию)» [141, т. 4, с. 281] (перевод уточнен).

3. Еще одна возможность, обсуждаемая в настоящее время — *случайное* происхождение по крайней мере некоторых элементов структуры физического мира. Имеется в виду, что может быть выделено некоторое количество безразмерных (подлинно *независимых*) констант, которое никакой теорией не сможет быть уменьшено. Эти константы должны рассматриваться как своеобразные параметры физического мира, они *могли бы*, вообще говоря, иметь другие значения и только *случайно* оказались такими, какие они есть [Уилер, 1977; Гуревич, 1975; Розенталь, 1980]. Курсивом здесь выделены слова, которым (пока?) не удалось придать какой-то определенный научный (т. е. связанный с эмпирической проверкой хотя бы принципиально) смысл.

Таковы три основные позиции по отношению к факту трехмерности.

Рассмотрение фундаментальных констант как свободных параметров заставляет вспомнить идею Лейбница о возможных мирах, доведенную Кантом до утверждений: «В подлинно метафизическом смысле представляется истинным, что может существовать более чем один мир»; «В действительности вполне возможно, что Бог создал многие миллионы миров, понимаемых в чисто метафизическом смысле». При этом Кант считал вполне возможным, чтобы «некоторая вещь действительно существовала, но тем не менее нигде во всем мире не находилась», возможность существования множества миров он сводил фактически к мирам с различными числами измерений. Сам же Лейбниц считал, что все возможные миры существуют только для Бога и «не были призваны все к бытию»; к бытию был призван только один из них — наилучший мир, ставший (в результате решения Богом некой задачи на экстремум) действительным миром.

Такие теологические построения способны привести в ужас современного физика* и, конечно, не они сами по себе привели к предположению о случайном происхождении значений фундаментальных констант. Главной причиной возрождения идеи возможных миров, уходящей в глубь веков, стала совокупность вполне конкретных (вычислительных!) результатов, объединяемых сейчас под названием «антропический принцип». Это название отражает антропоцентрическую точку зрения, которая, также после многовекового забвения, неожиданно вернулась в физику, хотя, разумеется, на совершенно новом уровне. Работы антропического направления привлекают в последнее время значительное внимание [Карр, Рис, 1979; Розенталь, 1980]. В этих работах исследуется чувствительность характерных особенностей физического мира (в частности, существование связанных систем) к значениям фундаментальных констант (в том числе и величин, относимых в настоящее время к начальным космологическим условиям).

Название «антропический принцип» связано с тем, что наибольшие ограничения на диапазон возможных значений фундаментальных констант дает сам факт существования такой высокоорганизованной системы, как Человек. При этом предполагается, что известные условия возникновения жизни на Земле и ее развития до таких сложных форм, как Человек (продолжительность биоэволюции, химический состав и другие планетные условия), имеют необходимый характер; хотя, конечно, в действительности современное состояние грандиозных биологических проблем возникновения жизни и разума не дает бесспорных свидетельств в пользу такого предположения (но, впрочем, и не свидетельствует против него).

Известно несколько кратких и выразительных формулировок, резюмирующих антропический принцип в виде ответа на вопрос:

---

* Напомним замечание Гейзенберга, сделанное в 1930 г. в связи с обсуждением понятийного аппарата квантовой механики: «Здесь нужно вспомнить, что человеческий язык допускает, вообще, образование предложений, из которых нельзя вывести никаких следствий и которые поэтому, в сущности, совершенно бессодержательны, хотя и дают своего рода наглядное представление. Так, например, утверждение, что наряду с нашим миром существует еще второй, с которым, однако, невозможна *принципиально* никакая связь, не приводит ни к какому следствию; несмотря на это, в нашей фантазии возникает при таком утверждении некоторая картина. Вполне понятно, что такое утверждение не может быть ни доказано, ни опровергнуто. Особенно осторожно нужно употреблять выражение «в действительности», так как оно легко приводит к такого рода утверждениям» [37, с. 17].

«Почему наш мир таков, как он есть?». Например, «Потому что этот мир *наш*», или «Потому что только в таком мире могло появиться существо, у которого возник сам вопрос» (разумеется, краткость этих формулировок достигается за счет точности). Другими словами, предлагается считать, что поиски ответа на вопрос, почему *наше* пространство трехмерно, не более (но и не менее) осмысленны, чем поиски ответа на вопрос, почему *наше* Солнце — звезда именно такого типа (а не белый карлик, например). Ответ на второй вопрос, очевидно, заключается в том, что белый карлик не обеспечил бы условий, необходимых для возникновения цивилизации, в которой мог бы возникнуть сам вопрос. Подобные аргументы выдвигаются по поводу и других фундаментальных констант [Рис, Руффини, Уилер, 1977, с. 324, 350].

Антропоцентризм 80-х годов 20 в. радикально отличается от антропоцентризма древних и от его остатков в виде геоцентризма средних веков. Раньше антропоцентризм был следствием скудости знаний о мире. Сейчас он, скорее, связан с избытком сведений о мире, которые не удается полностью объединить теоретическим построением, если не учитывать важнейшее гносеологическое обстоятельство: этот эволюционирующий мир изучается Человеком, являющимся одним из результатов этого же мира *. Поэтому условия, в которых оказался Человек, предполагают возможность эволюционного процесса, приводящего к появлению Человека. Конечно, подлинный учет указанного гносеологического обстоятельства предполагает наличие *теории* возникновения жизни и разума, которой пока, как известно, нет. Поэтому и приходится единственный известный случай возникновения жизни и разума абсолютизировать (наиболее существенное значение имеет химический состав вещества во Вселенной и достаточно длительный срок биологической эволюции ($\sim 10^9$ лет)).

Антропоцентрическая точка зрения в науке нового времени долгое время считалась несовместимой с самим научным методом; вспомним, например, явно антиантропоцентрическую позицию Планка (см. § 5.1). Однако примерно в то же время, когда Планк провозглашал эту позицию, в физику проникла антропоцентрическая по сути идея — флуктуационная гипотеза Больцмана, предназначавшаяся для решения проблемы тепловой смерти Вселенной. Именно при обсуждении гипотезы Больцмана появились первые явно антропоцентрические формулировки, например: «...осуществление наблюдаемой нами гигантской флуктуации (в объеме

---

* Гносеологический характер этого обстоятельства очевиден. Речь идет о том, что взаимоотношение познающего субъекта и познаваемого объекта, которое часто ограничивают только познавательными аспектами, на самом деле должно включать и генетический аспект: «участие» самого объекта в возникновении субъекта со всеми его познавательными интересами и возможностями. Антропический принцип по существу подчеркивает необходимость учета этого обстоятельства в ситуации, когда объектом становится Вселенная в целом.

не меньшем, чем вся известная часть Вселенной) необходимо для появления живых существ, наблюдающих развертывающуюся перед ними картину мира» [Зельманов, 1948] (для точности следует указать, что в приведенной фразе многоточие поставлено вместо слов «эти соображения показывают ошибочность обычного рассуждения о том, что» *). На фундаментальное значение антропического принципа указал в 1958 г. Г. М. Идлис, статья которого так и называлась «Основные черты наблюдаемой астрономической вселенной как характерные свойства обитаемой космической системы» [57а].

К настоящему времени антропическую интерпретацию получили многие необъяснимые «случайные» совпадения физических величин [59, 102в]. Однако следует отметить, что, по-видимому, первой величиной, получившей конкретную антропическую интерпретацию, была трехмерность пространства [Уитроу, 1955]. Значения размерности, большие трех, отвергаются в этой работе тем, что они не обеспечивают устойчивость планетной орбиты (см. гл. 4), т. е. не обеспечивают «спокойных» условий для биологической эволюции. Размерность $n=2$ отвергается, поскольку, по мнению Уитроу, высшие формы живого характеризует наличие... пищеварительного канала, а в 2-мерном случае такое устройство организма привело бы к его разделению на две части. Такое объяснение предъявляет серьезные требования к чувству юмора читателя и вызывает сомнения в фантазии автора. Но в данном случае важно, куда направлено объяснение, а не его «абсолютная величина». Впрочем, впоследствии было придумано и другое объяснение того, что в 2-мерном пространстве не могут существовать разумные вещества, способные задуматься над проблемой размерности: двумерный мозг не может быть устроен достаточно сложно,

---

* Речь идет о соображениях, направленных на то, чтобы показать относительную невероятность флуктуации в масштабах наблюдаемой Вселенной ($\sim 10^{27}$ см) по сравнению с флуктуацией в масштабах солнечной системы ($\sim 10^{16}$ см), якобы достаточной для существования человека. Считая вероятность флуктуации обратно пропорциональной ее объему, получим величину $(10^{16})^3/(10^{27})^3 \sim 10^{-33}$ [Бронштейн, Ландау, 1933; Ландау, Лифшиц, 1976, с. 46]. Однако даже если не говорить о необходимости использовать релятивистскую теорию гравитации в космологической задаче, в этих рассуждениях есть существенный изъян. Считать достаточной флуктуацию в масштабах солнечной системы — это значит считать, что события, происходящие вне этой области, не имеют никакого значения для существования Человека. Ясно, что вероятность флуктуации, состоящей в появлении человека (и окружающей его живой природы) сразу *в готовом виде*, отличается от вероятности простейшей флуктуации, способной стать *началом эволюционной цепи*, множителем, несравненно меньшим, чем 10^{-33}. Поэтому, надо позаботиться о «спокойной жизни» для эволюции в течение достаточно длительного времени T; значит, нужно побеспокоиться о достаточно спокойном окружении солнечной системы на расстоянии cT. Для эволюции, длящейся (как на Земле) $\sim 10^9$ лет, как раз и получается область размерами порядка наблюдаемой Вселенной.

поскольку отдельные нейтроны могут быть связаны («одномерными» отростками) только со своими соседями, в то время как в 3-мерном случае такого ограничения нет. (Это — проявление глубокого математического факта: любое n-мерное множество может быть размещено в $2n+1$-мерном евклидовом пространстве E^{2n+1} [46].)

Казалось бы, в подобных рассуждениях уровень спекулятивности ничем не ограничен. Мы не только не знаем, как может быть устроено n-мерное разумное существо, но и очень немногое знаем о 3-мерном разумном или даже просто живом существе, какие же основания есть для предположений о n-мерной нервной системе и т. п.? Здесь мы подходим к важному моменту, который частично уже затрагивался в гл. 4 при обсуждении вопроса, что можно понимать под физикой в n-мерном пространстве. Чтобы избежать осложнений, связанных с отсутствием общей (3-мерной) теории жизни и разума и с особым характером такой фундаментальной величины как размерность, возьмем какое-нибудь конкретное проявление чувствительности физических свойств нашего мира к величине обычной фундаментальной константы.

Когда говорят, например, что изменение величины элементарного электрического заряда e привело бы к невозможности существования стабильных атомов [102в], то при этом имеют в виду, что при изменении e не меняются не только все другие константы, но и сам вид физических законов: уравнение Шредингера, законы электромагнетизма и т. д. Рассматриваются, таким образом, не всевозможные миры, а все возможные миры, в которых действует принцип наименьшего действия $\delta\int L dx=0$, лагранжианы квадратичны $L=\varphi_{,i}\varphi^{,i}$ и т. п. Такое предположение может оправдываться тем, что иначе терялась бы твердая почва для подобных рассмотрений. Однако ситуация, возникающая при реализации эренфестовского подхода к размерности (§ 4.2), существенно отличается тем, что здесь речь идет о размерности нашего, действительного мира. Поэтому предположения о квадратичности лагранжиана, о «ньютоновости» законов движения и т. д. здесь являются экстраполяцией законов (формулировка которых может быть сделана независящей от конкретного значения размерности) за пределы эмпирически проверенной области. Но, конечно, и здесь принцип «сохранить все то, что *можно* сохранить», является предположением.

Как уже говорилось, физические соображения «антропоцентрического» характера послужили основанием для идеи о «случайном» происхождении фундаментальных констант (в том числе размерности), т. е. третьей из позиций, перечисленных в начале параграфа. Однако не следует думать, что между этими вещами существует органическая связь. В действительности сторонник идеала Единой теории, не выходя за рамки своего идеала, может интерпретировать антропические соображения как закономерность появления жизни и разума, содержащуюся в подлинно единой теории. У этого представления и у представления о «биологическом отборе» констант [119в] одно и то же слабое место — отсутствие теории возникновения жизни и разума. Как мы видим, от прогресса в биологии оказались зависящими фундаментальные физические вопросы, которые без такого прогресса так и останутся метафизическими.

Теперь обратимся к точке зрения на фундаментальные константы, порождаемой идеалом Единой теории. Антропические соображения здесь, как уже говорилось, могут быть только следствием теории. Поэтому размерность пространства-времени должна определяться исходными постулатами Единой теории. Можно было бы предположить, что само утверждение о 3+1-мерности пространства-времени должно быть одним из постулатов. Однако, несмотря на постулативный характер 3+1-мерности в современной физике, такое предположение кажется не очень вероятным.

Во-первых, утверждение о 3+1-мерности в современной физике неотделимо от классической непрерывной модели пространства-времени; в то же время различные соображения свидетельствуют о принципиальной (квантово-гравитационной) ограниченности этой модели (см. гл. 5). В частности, квантово-гравитационные рассуждения приводят к выводам о флуктуациях метрической и топологической структур пространства-времени в планковских масштабах; в результате появляется предположение, что «само понятие размерности может потерять всякий смысл в планковской шкале расстояний» [Мизнер, Торн, Уилер, 1977, с. 40]. Это означает по существу, что понятие размерности должно быть заменено более глубоким понятием, которое только в некотором пределе описывает размерность пространства-времени.

Во-вторых, тенденции развития современных теорий в физике элементарных частиц, как уже говорилось в предыдущем параграфе, состоят в геометризации фундаментальных взаимодействий и (в соответствии с программой суперобъединения) в дальнейшей «динамизации» геометрии. Такие тенденции делают также вероятной динамизацию размерностной структуры пространства-времени.

Однако и в случае, если размерность действительно ожидает такой теоретический удел, все равно останется проблема выделенности конкретного значения размерности, равного 3+1.

В рамках предполагаемой Единой теории 3+1-мерность должна быть в конце концов сведена к какому-то математическому свойству 3+1-мерности. Однако поиски чисто математической выделенности 3+1-мерности вне рамок какой-то физической теории не могут сами по себе привести к цели. Указанные Эренфестом особенности 3-мерности могли быть, конечно, сформулированы только в математических терминах, однако они допускали физическую интерпретацию и использовались для сопоставления с реально наблюдаемыми свойствами физической реальности. Только одну особенность — равенство количества трансляций и количества поворотов в E^3 — Эренфест не интерпретировал физически в статье 1917 г., и, кстати говоря, в статье 1920 г. об этом «дуализме» он уже не упоминает.

Трудность состоит, конечно, не в том, какой из многочисленных и разнородных математических фактов, выделяющих 3+1-мерность, выбрать. На самом деле для *любого* значения размерности можно подобрать выделяющие его математические факты. Таким образом, в соответствии с идеалом Единой теории выделенность 3+1-мерности может быть объяснена только в рамках самой физической теории.

Таковы известные сейчас основные две теоретические (точнее сказать, метатеоретические) позиции по отношению к факту 3+1-мерности пространства-времени — «антропический принцип» и «Единая теория». Эти позиции выходят далеко за пределы физики как эмпирической науки и этим радикально отличаются от эренфестовского подхода (см. гл. 4).

Конструктивный характер эренфестовского подхода состоит в поиске конкретных свидетельств трехмерности пространства. Каждое такое *конкретное* свидетельство по необходимости должно быть привязано к определенному диапазону физических явлений. Сам по себе эренфестовский подход не может дать ответа на вопрос о выделенности значения размерности, равного трем, однако только исследования, проводимые в рамках этого подхода, могут дать реальные основания для «объяснения» трехмерности. Если, скажем, область трехмерности будет все больше расширяться, то придется признать постулативный характер факта трехмерности. Если же обнаружится неабсолютный характер трехмерности, то теории придется объяснить, почему в том диапазоне физических явлений, который вместе с макроскопическими явлениями включает, как показал Эренфест, явления астрономических и атомных масштабов, размерность становится равной трем. Следует подчеркнуть, что с точки зрения современной физики путь таких исследований не уходит в бесконечность, а упирается в область квантово-гравитационных явлений (см. § 8.1).

8.3. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА И КОСМОЛОГИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ

Четырехмерность пространства-времени является одной из основных геометрических предпосылок для фундаментальных физических теорий, определяя, как показал еще Эренфест, характерные свойства физических систем. Однако обоснованность факта 3+1-мерности, как и всякого физического факта, связана с определенным, неизбежно ограниченным диапазоном физических явлений. В то же время наиболее глубокие проблемы авангардных областей физики — физики элементарных частиц и космологии, или микрофизики и мегафизики — имеют дело с границами применимости существующих физических теорий.

Несмотря на то что микрофизика и мегафизика изучают экстремальные состояния вещества в противоположных, казалось бы, направлениях, они приходят к одной и той же по существу области — квантовой гравитации. Планковские величины, характеризующие область квантово-гравитационных явлений, фигурируют сейчас и в физике элементарных частиц и в космологии ранней Вселенной. Таким образом, геометрия «пространства физических теорий» оказывается неевклидовой: двигаясь в противоположных направлениях, физика попадает в одну и ту же область. Этот факт вполне осознан современной наукой, что проявляется, в частности, в признании принципиальной недостаточности земной лабораторной физики, сама Вселенная превращается в лабораторию физики элементарных частиц [Окунь, 1981].

Конечно, нет полного совпадения задач микрофизики и мегафизики, и поэтому имеются два пути к экстремальным физическим состояниям. А поскольку обсуждать возможность отклонения размерности от трех можно только по отношению к экстремальным физическим ситуациям, то приходится выбрать один из этих двух путей. Мы выберем космологию. Во-первых, есть серьезные основания считать, что подлинное решение таких проблем, как крупномасштабная изотропия и галактическая структура Вселенной, происхождение реликтового излучения и удельной энтропии, может быть достигнуто только при учете процессов, характерных для квантово-гравитационной космологии. Кроме того, в космологической задаче можно привлечь предположение о высокой симметрии (однородность, изотропность).

Из общих соображений следует, что состояние вещества, пространства и времени в квантово-гравитационную эру могло существенно отличаться от обычного. При этом говорят о флуктуациях метрики, топологии, об изменении самого характера пространственно-временных отношений [86]. В связи с этим анализ размерности как одного из наиболее общих, но в то же время *количественно* выражаемого свойства пространства-времени может открыть совершенно новые возможности для решения фундаментальных космологических проблем. Попытку в этом направлении предпринял английский астрофизик В. Сасло, предложивший необычное решение фундаментальной проблемы горизонта, связанной с интерпретацией крупномасштабной однородности Вселенной. Сасло обратил внимание на то, что предположение о двумерности пространства в ранней Вселенной снимало бы саму проблему. Однако прежде чем обратиться к этой идее, рассмотрим вопрос об уравнении состояния в ранней Вселенной и о естественных единицах для квантово-гравитационной космологии, оставаясь в рамках трехмерности.

1. Происхождение реликтового излучения и квантово-гравитационная космология [45]. Происхождение реликтового излучения является одной из проблем, решение которых должно быть достигнуто на базе квантово-гравитационной космологии. Поэтому продвижение в понимании реликтового излучения, и прежде всего его теплового спектра, должно сопутствовать продвижению в квантовой гравитации. Наибольшим за последние годы достижением в объединении общерелятивистских и квантовых конструкций стал обнаруженный С. Хокингом эффект «квантового испарения» черной дыры [130].

Тот факт, что черная дыра излучает поток частиц с тепловым спектром, дает возможность усмотреть аналогию между рождением частиц черной дыры и рождением частиц в нестационарной Вселенной. Разумеется, статическая геометрия неоднородного пространства с черной дырой и однородная, но нестатическая геометрия Вселенной существенно различны. Однако если рождение частиц связано с изменением инвариантов кривизны, то рождающиеся частицы «не должны знать», из-за чего они рождаются: из-за изменения кривизны по пространственным координатам или из-за ее изменения во времени.

Рассмотрим однородную изотропную космологическую модель с пылеобразным веществом. Поскольку в ОТО (как и в ньютоновской теории тяготения) сферически-симметричное распределение пылеобразного вещества вне некоторой сферы не влияет на поведение вещества внутри этой сферы [52], то физические процессы внутри сферы должны быть вполне аналогичны (с точностью до обращения знака времени) коллапсу сферически-симметричного облака.

Будем считать, что эта аналогия остается справедливой и для процессов квантово-гравитационной космологии. Состоянию Вселенной в момент времени t, когда ее плотность равна $\rho(t)$, сопоставим состояние черной дыры с той же, условно говоря, плотностью, т. е. черной дыры с массой M и гравитационным радиусом $r_g \equiv 2GM/c^2$, подчиняющимися условию

$$r_g c^2/2G \equiv M = {}^4/_3\,\pi\, r_g^3 \rho. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$r_g = (3c^2/8\pi G\rho)^{1/2}. \tag{2}$$

Речь идет о сфере радиуса r_g, вырезанной в однородной Вселенной с плотностью $\rho(t)$; предполагаемое здесь евклидово выражение для объема сферы $V = {}^4/_3\,\pi\, r^3$ становится асимптотически точным при $r \to 0$, или, в силу (2), при $\rho \to \infty$, т. е. вблизи «начала» (которое нас в основном и интересует).

Будем исходить из следующей гипотезы:

расширяющаяся Вселенная с плотностью $\rho(t)$ *рождает тепловое излучение в том же темпе, что и черная дыра радиуса (2).*

Сделаем несколько замечаний в связи с этой гипотезой, на которой основаны дальнейшие выводы.

Космологическое рождение частиц рассматривается в настоящее время, как правило, каждый раз для какого-то одного сорта частиц. Такое рассмотрение не учитывает нелинейный эффект неизбежной «термализации» рожденных частиц: при их взаимодействии должны появиться все возможные, в том числе и безмассовые, частицы. Учитывая это, с физической точки зрения трудно принять математическое утверждение о невозможности рождения безмассовых частиц в космологических моделях определенного типа. (Обычное возражение против возможности рождения безмассовых частиц в изотропных моделях основано на том, что метрика этих моделей конформно эквивалентна плоской, для которой рождения быть не должно. Однако эта эквивалентность не абсолютна, поскольку она не распространяется на начальную сингулярность, с которой неизбежно приходится связывать некоторые граничные условия.)

Еще более существенной может быть особенность рождения частиц вблизи сингулярности, сформулированная Хокингом [1976] в виде «принципа неведения»: равновероятны все микросостояния, соответствующие одному и тому же макросостоянию. Отсюда должен следовать универсальный, тепловой характер спектра космологически рожденных частиц. Можно также считать тепловой характер спектра универсальным типом упомянутых выше граничных условий. Если частицы рождаются всюду с одним и тем же тепловым спектром, то не возникает проблема установления теплового равновесия в причинно несвязанных областях.

Согласно Хокингу черная дыра с массой M испускает чернотельное излучение с температурой

$$k\theta = \hbar c^3/8\pi\, GM = \hbar c/4\pi\, r_g. \tag{3}$$

Для квазиевклидовой космологической модели с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,(dr^2 + r^2 d\Omega) \tag{4}$$

сформулированная выше гипотеза связывает температуру космологически рождающегося излучения с плотностью вещества во Вселенной соотношением

$$k\,\theta = (\hbar/4\pi)\,(8\pi\, G\rho/3)^{1/2}. \tag{5}$$

Хотя рождение излучения Вселенной происходит преимущественно в квантовую эру, температура накопившегося к некоторому моменту излучения зависит от темпа космологического расширения на протяжении всего периода, предшествующего этому моменту. Будем считать, что излучение с яркостной температурой

$\theta(t) \sim \rho^{1/2}$ (см. (5)) рождается с поверхности $\sim r_g^2$ в объем $\sim r_g^3$, где $r_g \sim \rho^{-1/2}$ (см. (2)). Пусть уравнение состояния имело вид

$$p = \gamma \rho c^2 \tag{6}$$

с $\gamma=\mathrm{const}$ вплоть до момента t_{RD} начала радиационно-доминированной эры, когда $\gamma=1/3$. Пренебрегая деталями температурной эволюции Вселенной $T(t)$ и учитывая «покраснение» излучения из-за космологического расширения ($T \sim a^{-3\gamma}$, здесь $a(t)$ — масштабный фактор [25а, с. 546]), получим, что к некоторому моменту $t_* < t_{RD}$ результирующая температура излучения T определяется соотношением

$$T^4(t_*) = \left(\frac{\hbar}{4\pi k}\right)^4 \left(\frac{8\pi G}{3}\right)^{5/2} \int\limits_{t_{\text{оп}}}^{t_*} \left[\frac{a(t)}{a(t_*)}\right]^{12\gamma} \rho^{5/2}\, dt, \tag{7}$$

где $t_{\text{оп}}$ — момент «включения» рождения фотонов в квантовую эру расширения Вселенной.

Механизм, приводящий на ранней фазе расширения к разогреву Вселенной, должен «выходить» на величину T, соответствующую радиационно-доминированной эре, т. е. удовлетворяющую закону Стефана — Больцмана:

$$\rho c^2 = \sigma T^4 \tag{8}$$

и соотношению, следующему из уравнений Эйнштейна,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \tag{9}$$

(H — параметр Хаббла; пространственной кривизной пренебрегаем, т. е. исходим из метрики (4)). Если предлагаемый механизм разогрева правилен, то сшивка (7) с (8), (9) в момент времени t_{RD} должна привести к разумному значению момента его включения $t_{\text{оп}}$. Подставляя в (7)—(9) $a(t) \sim t^{\Gamma}$, $\Gamma \equiv 2/3(1+\gamma)$,

$$H(t_{RD}) = \Gamma/t_{RD},\ \rho = \rho_{RD}(t/t_{RD})^2,\ \rho_{RD} = 3H^2(t_{RD})/8\pi G,$$

можно получить уравнение для определения $t_{\text{оп}}$. Значение $t_{\text{оп}}$ зависит от принятого уравнения состояния (т. е. в нашем случае — от величины γ), что дает возможность сравнить разные уравнения состояния для самой ранней, квантово-гравитационной стадии расширения Вселенной. Естественно сравнивать уравнения состояния, имеющие какие-то физические оправдания. Рассмотрим уравнения состояния с $\gamma=0$ (пылеобразная или квазихагедорновская модель), $\gamma=1/3$ (газ ультрарелятивистских частиц) и $\gamma=1$ (сверхжесткое уравнение состояния).

2. Единицы для квантово-гравитационной космологии. Поскольку рассматриваемый механизм разогрева Вселенной имеет квантово-гравитационный характер, то разумной величиной для $t_{\text{оп}}$ следовало бы признать какую-то характерную квантово-гравитационную величину. Принято считать, что квантово-гравитационным явлением соответствуют планковские естественные единицы

$$\begin{gathered} t_{\text{пл}} = (\hbar G/c^5)^{1/2} = 5 \cdot 10^{-44} \text{ с}, \\ \theta_{\text{пл}} = (\hbar c^5/G)^{1/2}/k = 1{,}4 \cdot 10^{32} \text{ К}, \\ \rho_{\text{пл}} = c^5/\hbar G^2 = 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3 \text{ и т. д.}, \end{gathered} \tag{10}$$

определенные, разумеется, только с точностью до безразмерных постоянных множителей. Эти множители, однако, можно было бы зафиксировать, потребовав, например, чтобы соответствующие величины были связаны некоторыми соотношениями. Для целей квантово-гравитационной космологии в качестве таких соотношений естественно взять фундаментальные законы, действующие в квантово-гравитационную эру — (5), (8), (9).

Полагая

$$\begin{gathered} t_{\text{кгк}} \equiv 1/H_{\text{кгк}} = C_1 t_{\text{пл}}, \\ \theta_{\text{кгк}} = C_2 \theta_{\text{пл}}, \\ \rho_{\text{кгк}} = C_3 \rho_{\text{пл}} \quad (C_i = \text{const}), \end{gathered} \tag{11}$$

с помощью (5), (8), (9) получим

$$C_1 = 1/24\,(10\,\pi)^{1/2} \approx 10^{-2}, \quad C_2 = (90/\pi)^{1/2} \approx 5, \quad C_3 = 540. \tag{11a}$$

В результате уравнение для $t_{\text{оп}}$ (7) может быть записано в виде

$$t_{\text{кгк}}^{-2} = \Gamma^3\, t_{RD}^{2-12\gamma\Gamma} \int\limits_{t_{\text{оп}}}^{t_{RD}} t^{12\gamma\Gamma-5}\, dt. \tag{12}$$

Отсюда легко получить, что случаи $\gamma = 0$ и $\gamma = 1$ приводят к моментам включения $t_{\text{оп}}$, слишком сильно отличающимся от естественной величины $t_{\text{кгк}}$.

Величины $t_{\text{оп}}$ и $t_{\text{кгк}}$ оказываются близки лишь в случае уравнения состояния с $\gamma = 1/3$, описывающего газ ультрарелятивистских частиц. Это согласуется с весьма правдоподобной (с точки зрения физики элементарных частиц) гипотезой об асимптотической свободе при сверхвысоких плотностях [136]. Условие асимптотической свободы означает, как известно, что частицы на достаточно малых расстояниях ведут себя как свободные, невзаимодействующие.

Таким образом, рассматриваемый квантово-гравитационный механизм космологического рождения частиц дает возможность судить об уравнении состояния на самых ранних стадиях расширения Вселенной, согласуясь лишь с гипотезой об ассимптотической свободе ($\gamma = 1/3$) при сверхвысоких плотностях.

8.4. КОСМОЛОГИЯ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ И РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА

Самые большие экстраполяции в современной теоретической физике относятся к области, которую можно назвать квантовой, или квантово-гравитационной космологией (КГК). Эта область описывается планковскими значениями характеризующих ее физических величин (10), (11), и поэтому речь идет об экстраполяции по плотности, например, порядка $10^{94}/10^{14}=10^{80}$ (10^{14} г/см^3 — характерная ядерная плотность). Такая необычно большая плотность дает повод для анализа возможных в эпоху КГК отклонений от закономерностей, известных современной физике. При этом, конечно, внимания заслуживают только такие выходы «за рамки», которые порождены либо нерешенными проблемами космологии, либо проблемами физики высоких энергий (обе эти области имеют отношение к эпохе КГК).

Проиллюстрируем теперь возможности, которые дает предположение об изменении размерности пространства в ранней Вселенной.

1. Проблема горизонта и размерность пространства в ранней Вселенной. Первый пример, который мы рассмотрим, связан с работой [Сасло, 1977], предлагающей необычное решение известной проблемы горизонта, состоящей в физической интерпретации наблюдаемой однородности Вселенной. В стандартных фридмановских космологических моделях наблюдаемая высокая изотропия реликтового излучения говорит об однородности Вселенной в масштабах гораздо больших, чем размеры горизонта (расстояние, на которое успевает распространиться свет, или размеры максимальной причинно связанной области пространства) в момент времени, соответствующий отрыву реликтового излучения от вещества. Таким образом, в фридмановских моделях однородность Вселенной следует считать не результатом каких-либо (например, релаксационных) физических процессов, а начальным условием, причину которого не обсуждают (см., напр., [52, с. 511]).

Эта ситуация допускает простое математическое описание. В однородной изотропной космологической модели с метрикой

$$ds^2=c^2dt^2-a^2(t)\,d\mathbf{r}^2 \tag{13}$$

размер горизонта в момент времени t_0 равен

$$D(t_0)=a(t_0)\int\limits_0^{t_0}\frac{c\,dt}{a(t)}. \tag{14}$$

В обычных фридмановских космологических моделях масштабный фактор $a(t)\sim t^{\Gamma}$, где $\Gamma=2/3(1+\gamma)$ зависит от уравнения состояния $p=\gamma\varepsilon$, но для всех естественных уравнений состояния $\Gamma<1$, и поэтому горизонт конечен. В частности, для ультрарелятивистского уравнения состояния ($\gamma=1/3$), по-видимому, наиболее естественного для модели горячей Вселенной, $\Gamma=1/2$. Таким образом, независимо от уравнения состояния размер горизонта (14) конечен и ситуация качественно не меняется. Измениться она могла бы, если каким-то образом удалось бы обеспечить достаточно быстрое начальное расширение Вселенной (например, с $a(t)\sim t^{\Gamma}$, $\Gamma\gg1$), т. е. расходимость интеграла (14).

Сасло обнаружил необычную возможность решения этой проблемы, показав, что если бы Вселенная в начальную стадию расширения была 2+1-мерной (т. е. пространство было не 3-, а 2-мерно) и вещество подчинялось уравнению состояния «пыли» ($\gamma=0$), то как раз было бы $a\sim t$. Такой закон следует из уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu}-{}^1\!/_2 g_{\mu\nu}R=\varkappa T_{\mu\nu} \tag{15}$$

в 2+1-мерном пространстве-времени для метрики типа (13).

Идея Сасло не умещается в рамках современной теоретической физики. Не самый легкий из возникающих в связи с ней вопросов: каким образом можно понимать и описывать переход от 2-мерного к 3-мерному пространству в процессе эволюции Вселенной?

В работе Эренфеста 1917 г. впервые были указаны реальные физические основания для уверенности физиков в 3-мерности физического пространства (см. гл. 4). Эти физические основания, разумеется, не могли стать абсолютным доказательством трехмерности пространства в любых возможных физических условиях. По существу Эренфест только расширил диапазон явлений (в частности, по пространственным масштабам), в котором 3-мерность была обоснованна, с макроскопических масштабов (где она «очевидна») на атомные ($\sim10^{-8}$ см) и астрономические ($\sim10^{16}$ см). Любое рассмотрение возможных отклонений от 3-мерности должно учитывать эренфестовский анализ (и его развитие).

Не обсуждая пока возможность такой структуры пространства-времени, которая допускала бы изменение размерности в зависимости от некоторых физических условий (например, в зависимости от пространственно-временных масштабов физических явлений, см. гл. 7), обратимся к анализу следствий, вытекающих из предположения о «маломерности» Вселенной в начале ее расширения.

Стимулом к такому анализу служит не только указанная Сасло возможность объяснения крупномасштабной однородности Вселенной. Дело в том, что в физике высоких энергий, которая наряду с теорией гравитации имеет непосредственное отношение к ранней эре расширения Вселенной, в последнее время появляются конструкции, чуждые обычной математической модели физического пространства-времени *. Одномерность струн и двумерность мешков в теории ад-

* Как известно, наиболее общая в настоящее время математическая модель пространства-времени — псевдориманово многообразие, локальная структура которого тождественна структуре пространства Минковского, т. е. считается неявно, что известно «всё» о локальной структуре пространства.

ронов, рассмотрение моделей теории поля и удержание кварков в 1+1- или 2+1-мерном пространстве-времени воспринимаются сейчас как технические приемы, не имеющие особого физического смысла, но, возможно, полезные при перенесении полученных результатов на «реальный» 3+1-мерный случай. Однако то обстоятельство, что в случае меньших размерностей снимаются, в частности, некоторые известные проблемы физики элементарных частиц, можно было бы рассматривать и как свидетельство *действительно* меньшей, чем 3, размерности пространства на малых расстояниях (или при соответствующих динамических условиях). Точно в этом же смысле устойчивость планетных орбит и спектр водорода были связаны Эренфестом с 3+1-мерностью пространства-времени в соответствующем диапазоне физических явлений. Разумеется, подобная ситуация привела бы к проблеме согласования маломерной в микромасштабах и 3+1-мерной в макромасштабах структур пространства. Отметим, что эта проблема смыкается с давно известной проблемой согласования обычной 3+1-мерной непрерывной локально-евклидовой модели пространства и дискретной его модели, реализующей, например, некоторым образом идею фундаментальной длины. По существу предположение о малой размерности пространства в микромасштабах конкретизирует общую идею дискретного пространства (см. гл. 7).

В конце этого параграфа будет указан и другой мыслимый подход к идее меняющейся размерности пространства. Он основан на интерпретации координат пространства-времени как совокупности полей и на динамически нетривиальном поведении этой полевой системы. Такой подход вполне соответствовал бы тенденциям современной теории элементарных частиц к «пространственно-полевой демократии», к дальнейшему «офизичиванию» геометрии пространства-времени (§ 8.1).

Отложим до п. 3 обсуждение этих проблем и обратимся к анализу следствий из предположения об отличии размерности пространства от трех в начале космологического расширения Вселенной.

Прежде всего обратим внимание на то, что результат Сасло о двумерности ранней Вселенной опирается на уязвимое предположение о пылеобразном состоянии вещества. Действительно, это предположение кажется несовместимым с моделью горячей Вселенной, хотя и не исключено полностью (в случае реализации модели хагедорновского типа). Более естественно ультрарелятивистское уравнение состояния (в 2+1-мерном случае $p={}^1/_2\varepsilon$), которое, однако, в 2-мерном пространстве уже не дает достаточно быстрого начального расширения ($a\sim t^{2/3}$). Чтобы с более общей точки зрения увидеть ситуацию, выпишем уравнения космологии, следующие из уравнений Эйнштейна (15), для $n+1$-мерного пространства-времени с метрикой типа (13):

$$\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{k}{a^2}\right)=\varkappa_n\varepsilon,\quad k=0,\ \pm 1; \tag{16а}$$

$$\varepsilon=\varepsilon_1 a^{-n(1+\gamma)},\quad \varepsilon_1\text{ — const}; \tag{16б}$$

здесь $\varkappa_n$ — «n-мерная» гравитационная константа, уравнение состояния взято в виде $p=\gamma\varepsilon$.

Уравнения (16) приводят к зависимости

$$a(t)\sim t^{2/n(1+\gamma)} \tag{17}$$

(принято $k=0$).

Ультрарелятивистскому уравнению состояния (а также условию асимптотической свободы) соответствует $\gamma=1/n$. Из (17) следует, что в этом случае желаемый темп расширения ($a\sim t$) осуществляется только в $1+1$-мерном (струноподобном) случае.

С некоторой точки зрения такой результат можно считать даже более естественным, чем 2-мерность ранней Вселенной (начинать — так начинать с начала) и указывает на некоторую аналогию с физикой адронов, как теорией струн (Вселенная в адронную эру сама могла быть струноподобной). Однако здесь имеется и дополнительная трудность: как легко видеть, уравнения Эйнштейна и их следствия (16а) при $n=1$ вырождаются, если считать что гравитационная константа $\varkappa_n$ не зависит от n существенным образом. Эту трудность можно было бы обойти, во-первых, тем, что размерность пространства можно считать не строго равной 1, а $1+\delta$, $\delta\ll1$ (аналогично теории поля [29]). Во-вторых, можно предположить, что n-мерная гравитационная константа $\varkappa_n$ содержит множитель типа $(n-1)$; тогда предельный переход к $n=1$ может стать осмысленным.

2. Возмущения плотности в n-мерной Вселенной. Следствием событий в ранней Вселенной, как обычно считается, должно быть не только реликтовое излучение, но и крупномасштабная структура Вселенной (галактики, скопления галактик и т. д.). Проблема формирования наблюдаемой структуры Вселенной естественным образом приводит к проблеме начальных возмущений в однородной Вселенной. Какие возможности представляет предположение об отличии размерности ранней Вселенной от $3+1$?

Здесь, однако, даже для предварительных рассмотрений потребуется некоторая, хотя бы качественная, конкретизация того смысла, который можно было бы вложить в слова «двумерное пространство в ранней Вселенной», «переход от одного числа измерений к другому» и т. п. Обычные геометрические образы 1- и 2-мерности (линия и поверхность «без толщины») выглядят слишком чужеродными с физической точки зрения. Поэтому в дальнейшем будем понимать 1- и 2-мерность так, что по «остальным измерениям» Вселенная имеет малую, но конечную длину l. В квантово-гравитационной космологии проще всего на место этой длины поставить планковскую длину (что и будем делать в дальнейшем для оценок).

Перейдем к конкретным оценкам. Наиболее трудный пункт в рассматриваемой проблеме — начальный спектр возмущений в однородной Вселенной. Вместо того чтобы постулировать детальный вид этого спектра, предположим, что определяющую роль играли некие элементарные возмущения. Трудно придумать более элементарное возмущение, чем рождение одной частицы на однородном космологическом фоне, характеризуемом планковскими параметрами, или параметрами, соответствующими некоторой фундаментальной длине l. Пусть масса этой частицы — m (масса нуклона, кварка?). Тогда размеры области пространства, которая «заметит» родившуюся частицу, определяются комптоновской длиной волны этой частицы $\lambda=\hbar/mc$. Масса, соответствующая возмущенной области

$$M=\rho_{\text{пл}}\lambda^3, \quad \rho_{\text{пл}}=c^5/\hbar G^2, \tag{18}$$

а само возмущение

$$\delta\equiv\delta\rho/\rho=m/\lambda^3\rho_{\text{пл}}. \tag{19}$$

В n-мерном случае (используя выбранный способ описания n-мерности)

$$M_n=\rho_{\text{пл}}l^3_{\text{пл}}(\lambda/l_{\text{пл}})^n=10^{20n-5}\text{ г}, \tag{18_n}$$

$$\delta_n=m/\lambda^n l^{3-n}_{\text{пл}}\rho_{\text{пл}}=10^{-20n-19}. \tag{19_n}$$

Неопределенность, связанная со значениями величин, характеризующих эпоху КГК, может быть не так уж мала. Например, использование вместо обычных планковских величин (совершенно «случайных» по своим безразмерным множителям), «приспособленных» для КГК (см. § 8.3), приводит к

$$M'_n=10^{22n-9}\text{ г}, \tag{$18'_n$}$$

$$\delta'_n=10^{-22n-15}. \tag{$19'_n$}$$

Перейдем теперь к поведению возмущений (M_n, δ_n) в процессе космологического расширения.

Поведение крупномасштабных возмущений (а введенные выше элементарные возмущения являются крупномасштабными) в n-мерном случае можно получить таким же способом, как и в трехмерном (см. [52, с. 286; 98, с. 250]). Рост этих возмущений, определяемый законом

$$\delta\sim a^{n(1+\gamma)-2}=a^{n-1} \tag{20_n}$$

(полагаем $\gamma=1/n$, т. е. ультрарелятивистское уравнение состояния), при $n<3$ происходит медленнее, чем в 3-мерном случае. Однако возмущения (M_1, δ_1) и (M_2, δ_2), оставшиеся от 1- и 2-мерной эпох, должны «подхватываться» трехмерным законом (20_3)

$$\delta\sim a^2\sim t.$$

Момент окончания действия такого закона «линейного» роста возмущений определяется моментом времени t_1, когда размер горизонта «догоняет» размер возмущенной области:

$$\lambda(t_1/t_{\text{пл}})^{1/2}=ct_1, \tag{21}$$

где λ — начальный размер области элементарного возмущения. Соотношение (21) предполагает, что, во-первых, большей части космологического расширения соответствует трехмерность пространства, и, во-вторых, действует ультрарелятивистское уравнение состояния $\gamma=1/3$. Следующая из (21) величина

$$t_1=\lambda^2/c^2 t_{\text{пл}}\approx 10^{-4}\ \text{с} \tag{22}$$

вполне согласуется со вторым предположением.

Из (20) и (22) следует, что к моменту t_1 возмущение успевает вырасти в $(\lambda/ct_{\text{пл}})^2\approx 10^{40}$ раз.

Таким образом, в силу (19_n) из возмущений рассматриваемого типа только одномерные возмущения ($\delta_1\sim 10^{-39}$, $M_1\sim 10^{15}$ г) имеют возможность вырасти до $\delta\sim 1$ (т. е. до нелинейной стадии) и тем самым в момент времени t_1 стать исходным пунктом для дальнейшей структурной эволюции.

3. Меняющаяся размерность пространства в космологии ранней Вселенной. Рассмотренные выше соотношения и оценки могут иметь реальный смысл, если размерность физического пространства — не абсолютный параметр (один и тот же во всех физических ситуациях), а физическая величина, значение которой в экстремальных физических ситуациях может отличаться от трех.

Обсуждать такую возможность следовало бы не только применительно к квантовой космологии, но и к физике элементарных частиц, где эта идея смыкается с известной гипотезой фундаментальной длины. Действительно, возможность отклонения размерности от $3+1$ предполагает существование характерного масштаба, начиная с которого описание физических явлений требует уточнения используемых свойств пространства (размерности); таким масштабом может быть фундаментальная длина l или величины, которые можно соотнести с некоторой фундаментальной длиной, энергия $\hbar c/l$, плотность энергии $\hbar c/l^4$ и т. д. В последнее время становится все более ясно, что физические ситуации, характерные для квантовой космологии и для физики высоких энергий, имеют много общего.

Анализ космологической ситуации в некотором отношении проще, поскольку здесь есть возможность привлечь предположение о высокой симметрии (однородность, изотропность). Однако, с другой стороны, в космологической задаче следует выяснить, каким образом меняющуюся размерность пространства можно было бы согласовать с уравнениями Эйнштейна — основой релятивистской космологии.

В связи с этим следует учитывать принципиальное отличие уравнений Эйнштейна от уравнений поля в пространстве с фиксированной геометрией, например, уравнений Максвелла в пространстве Минковского. В уравнениях Максвелла, например, решение задачи с плоской симметрией (зависимость полевых функций только от x, y) в точности эквивалентно решению 2-мерных уравнений Максвелла. Для уравнений Эйнштейна это не так, и поведение масштабного фактора в анизотропной (в одном направлении) 3-мерной космологии вовсе не такое, как в 2-мерной изотропной космологии. Поэтому, для того чтобы формулы п. 2 имели смысл, необходимо, чтобы масштабный фактор подчинялся именно 2+1-мерным уравнениям Эйнштейна, а не 3+1-мерным уравнениям Эйнштейна с какой-то симметрией.

Масштабный фактор — это макроскопический (точнее, магаскопический) параметр. Если правая часть уравнений Эйнштейна в ранней Вселенной соответствует кварк-глюонной жидкости, то, конечно, нельзя писать $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = \varkappa \widehat{T}_{\mu\nu}$, где $\widehat{T}_{\mu\nu}$ — точный (микроскопический, квантовый) тензор энергии-импульса кварков и глюонов, а можно писать только

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = \varkappa \langle \widehat{T}_{\mu\nu} \rangle .$$

Сама операция усреднения, перехода к макроскопическому описанию (обозначенная в этом уравнении угловыми скобками) в условиях квантовой космологии может иметь весьма нетривиальный смысл. Действительно, если струнная (1-мерная) модель отдельного адрона имеет отношение к реальности, то не может ли для адронной жидкости существовать такая фаза, такое когерентное состояние, которое должно описываться также 1-мерными уравнениями? Такое одномерное описание по существу должно быть макроскопичным, поскольку микроскопически у адронных структур следует ожидать конечную толщину (см. [Киржниц, 1978, с. 191]). Кстати говоря, прием, использованный в п. 2 для рассмотрения возмущений в 1- и 2-мерном случае, предполагал конечный «размер» (l) пространства в остальных измерениях. Переход от 3-мерности к 2-мерности, например, можно понимать тогда так, что одно измерение перестает описываться классически (т. е. с помощью обычных уравнений Эйнштейна) и эффективно «выключается». Подобный переход выглядел бы как *фазовый переход в структуре пространства.* При этом в качестве параметра порядка естественно рассматривать саму размерность пространства (меньшей размерности отвечает меньшая симметрия, так как соответствующая группа преобразований включается в качестве подгруппы в группу симметрий пространства большей размерности).

Переход к такой одномерной фазе можно представить себе с помощью языка, связанного с идеей спонтанного нарушения симметрии (см. [Киржниц, 1978]), например, следующим образом. В аппарате ОТО, в уравнениях Эйнштейна, размерность пространства учитывается просто количеством координат. Понятие координат в ОТО порождает весьма сложные вопросы, в частности, связанные с ограничениями, следующими из релятивистской квантовой теории и приводящие к идее фундаментальной длины (см. гл. 5). Трудность также связана с отсутствием в рамках ОТО физического образа для понятия координат. В связи с этим интерес представляет замечание Вигнера [1971, с. 260], что роль координат в $3+1$-мерном римановом пространстве можно поручить, например, четырем скалярным полям. С математической точки зрения это замечание довольно тривиально. Однако оно перестает быть таким, если в качестве координат использовать поля, входящие в правую часть уравнения Эйнштейна посредством некоторого лагранжиана. Если этот лагранжиан допускает спонтанное нарушение симметрии, состоящее в том, что некоторые из полей-координат становятся совпадающими по величине (или однозначно связанными), то такой фазовый переход был бы эквивалентен уменьшению числа измерений в уравнениях Эйнштейна.

Простейшую модель такого перехода можно представить на примере механической колебательной системы с двумя степенями свободы, характеризуемыми коэффициентами упругости существенно различного характера (маятник в поле тяжести, подвешенный на стержне, который может деформироваться только по длине). Пусть один из коэффициентов упругости стремится к бесконечности при понижении температуры до некоторой критической величины $T_{\text{кр}}$ (*стержень «замерзает»*). Тогда макроскопически двумерная система при понижении температуры превратится в макроскопически одномерную.

Конечно, реализовать подобную структуру фазового перехода в случае полевой и геометризованной системы нельзя так же просто, но не видно и принципиальных запретов на поведение такого рода, если заранее не ограничивать язык описания только традиционным аппаратом ОТО. Метрическая структура пространства-времени может задаваться интервалом вида

$$ds^2 = g^{ik}(\varphi)\, d\varphi_i d\varphi_k,$$

где φ_i — поля-координаты, выделенные из совокупности полей $\{\psi_\alpha\}$, описывающих все вещество. Тогда в уравнениях, соответственно, будут фигурировать производные $\partial/\partial\varphi_i$. При этом нужно будет придать «внутренний» смысл эйнштейновским словам о четырехмерности поля [Эйнштейн, т. 4, с. 348] (см. § 3.4). Следует подчеркнуть, что подобная динамизация координатной структуры пространства-времени согласовывалась бы со стремлением к «пространственно-полевой демократии» в микрофизике (см. § 8.1).

На первый взгляд кажется, что уже само равноправие всех пространственных координат запрещает «исчезновение» одной из них. В связи с этим рассмотрим простую иллюстрацию, как может исчезнуть одна из двух равноправных координат-полей. Пусть лагранжиан системы двух координат-полей имеет вид

$$L = {}^1\!/_2 [(\nabla\varphi_1)^2 + (\nabla\varphi_2)^2 - \chi(\varphi_1 - \varphi_2)^2]. \tag{23}$$

Поля φ_1 и φ_2 входят в этот лагранжиан совершенно симметрично, равноправно. Пусть коэффициент χ — поле хиггсовского типа, обращающееся в нуль при достаточно высокой температуре $T > T_{кр}$, а при достаточно низкой ($T < T_{кр}$) — равное некоторой конечной величине χ_0. Будем считать, что роль координаты может выполнять только безмассовое поле (например потому, что только безмассовое поле, будучи дальнодействующим, имеет и классическое описание). Тогда при высоких температурах лагранжиан (23) дает две координаты, а при низких — только одну. Это ясно видно в результате преобразования полей $\varphi = 2^{-1/2}(\varphi_1 + \varphi_2)$, $\Phi = 2^{-1/2}(\varphi_1 - \varphi_2)$, которое переводит лагранжиан (23) в

$$L = {}^1/_2[(\nabla\varphi)^2 + (\nabla\Phi)^2 - \chi_0\Phi^2];$$

так что роль координаты может выполнять только поле φ. Преувеличивать значение этой иллюстрации, конечно, не следует.

Фазовый переход, о котором идет речь, мог произойти, если температура Вселенной в начале расширения была меньше критической температуры $T_{кр}$, отвечающей соответствующему спонтанному нарушению симметрии. В известных сейчас моделях спонтанного нарушения симметрии $T_{кр}$ увеличивается с ростом плотности $T_{кр} = T_{кр}(\rho, ...)$, но вопрос, должна ли $T_{кр}$ обогнать (если идти в прошлое) температуру Вселенной, не имеет однозначного ответа.

Следует подчеркнуть еще раз, что соображения, изложенные в этом параграфе, могут претендовать не больше, чем на иллюстрацию той роли, которую могло бы играть понятие размерности в космологии. Но анализ эренфестовского типа должен состоять из построений такого же рода, построений, извлекающих *наблюдаемые* следствия из предположения об отличной от трех размерности пространства в некоторых «*ненаблюдаемых*» областях физических явлений. Такой анализ, примененный к микрофизике и космологии, может, конечно, привести и к дальнейшему расширению области определения факта 3+1-мерности, заменяя простую экстраполяцию макроскопических несомненной 3+1-мерности сразу на все физические явления. Если же размерность проявит тенденцию к изменению, то тогда возникает особая задача — объяснить (в рамках некой общей теории) факт 3+1-мерности в огромном диапазоне физических явлений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В конце книги уместно сформулировать задачи, которые автор ставил перед собой, предоставив читателю судить (теперь уже со знанием дела) как о разумности самих задач, так и об удовлетворительности их решения.

Одной из главных целей автора было привлечь внимание к той огромной нагрузке, которую несет на себе понятие размерности в сооружении, называемом физической моделью реальности (в данном контексте обычное выражение «физическая картина мира» становится слишком плоским из-за своей двумерности). Трехмерность пространства — это, пожалуй, известный дольше всех других фундаментальный физический закон, сохранивший свою силу до наших дней. Связь тона струны с ее длиной, закон рычага, закон Архимеда, которые могли бы сравниться с законом трехмерности своим древним происхождением, давно растворились в гораздо более общих законах, а трехмерность (изменившись по форме своего выражения) сохранила свою фундаментальность. Поэтому автору особенно важным казалось спустить понятие размерности физического пространства-времени с почти недосягаемой для анализа высоты, на которой это понятие оказалось по указанным, вполне естественным причинам.

Для достижения этой цели автор попытался

1) на основе биографии понятия размерности, во-первых, показать, что адекватное восприятие *понятия размерности* пространства-времени возможно только в рамках структуры *проблемы размерности*, включающей и математическую, и теоретико-физическую и эмпирическую компоненты; и во-вторых, создать у читателя ощущение живого, незавершившегося процесса эволюции проблемы размерности;

2) показать, что уже имеющиеся в математике способы описания размерностной структуры, по-видимому, недостаточны для целей физической теории, синтезирующей квантовую теорию и ОТО, и, кроме того, предложить более подходящее математическое описание;

3) показать, что и в рамках работающих моделей пространства-времени размерностная структура, если ее описывать на метрическом языке, обладает неиспользованными возможностями, прежде всего в связи с симметриями пространственно-временного

описания (само количество симметрий s определяется размерностью пространства-времени n: $s=n(n+1)/2$);

4) в современной теоретической физике выявить свидетельства возрастающей роли геометрического языка вообще и понятия размерности в частности;

5) привести конкретные соображения, иллюстрирующие возможное значение понятия размерности для будущего развития авангардных областей физики — микрофизики и космологии.

Наименее убедительны, по-видимому, результаты, достигнутые на последнем направлении. Это, впрочем, неудивительно. Ведь речь идет о будущем, всегда сопряженном с неизвестностью. Но именно будущее развитие физики должно показать, насколько оправдано внимание к проблеме размерности физического пространства-времени.

Важность понятия размерности связана с его способностью описывать общие свойства разнообразных структур. Подтверждает это, хотя и очень косвенно, удивительная «приложимость» понятия размерности. Не случайно, что из физико-математической сферы оно так легко проникает в тексты из весьма различных и далеких областей: в заметку о молодом поэте («У этого свойства много имен: познать седьмым чувством, открыть четвертое измерение...» [1]), в статью экономиста («система оплаты должна быть двухмерной» [2]), в заметки с кинофестиваля («Экран представляет реальность не в трех и даже не в четырех..., а в ста измерениях» [3]), в политический комментарий («Очевидно, «глубина души» правителей Тель-Авива имеет два измерения...» [4]), в литературоведение («Народ в «Войне и мире»... — многолик и многомерен» [5], «все более явственно выступающая «одномерность» людей» [6]), в художественную литературу («Тем, кто хорошо знаком с пятым измерением...» [7]) и т. д.

Это обилие примеров, в высшей степени не физико-математических, говорит, конечно, и о характерной геометричности человеческого мышления, и об интенсивном (иногда слишком) проникновении «в жизнь» научных понятий в эпоху, когда радикально изменяется положение науки внутри культуры и в жизни общества. Но в то же время эти примеры демонстрируют и способ-

---

[1] «Комсомольская правда», 23.X.1977.

[2] «Правда», 29.VI.1982.

[3] «Литературная газета», 2.VIII.1978.

[4] «Известия», 27.I.1979.

[5] Маймин Е. А. Лев Толстой. — М., 1978, с. 84.

[6] Зверев А. Вступительная статья. — В кн.: К. Воннегут. Романы. — М., 1978, с. 7.

[7] М. А. Булгаков. Романы. — М., 1975, с. 666; см. также: Горелик Г. Е. Воланд и пятимерные теории поля. — «Природа», 1978, № 1, с. 159.

ность понятия размерности выражать общие свойства весьма различных структур, которые человек встречает в мире.

Возвращаясь теперь к физико-математической проекции того сложного мира, в котором есть и кинофестивали и политические комментарии, следует подчеркнуть, что понятие размерности — наиболее общее количественное понятие в физике. Тот факт, что 3+1-мерность пространства-времени пережила четыре пространственно-временные революции — аристотелевскую, ньютоновскую и две революции, соответствующие СТО и ОТО, казалось бы, оставляет мало надежд на будущую конструктивную роль понятия размерности в развитии физики. Однако современная ситуация в теоретической физике позволяет усмотреть некоторые признаки того, что понятию размерности еще предстоит участвовать в важных событиях.

П. Эренфест

КАКИМ ОБРАЗОМ В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ЗАКОНАХ ФИЗИКИ ПРОЯВЛЯЕТСЯ ТО, ЧТО ПРОСТРАНСТВО ИМЕЕТ ТРИ ИЗМЕРЕНИЯ? *

Введение

«Почему у нашего пространства именно три измерения?», или, другими словами, «Какие особенности отличают геометрию и физику в R_3 от геометрий и физик в других пространствах R_n?» Будучи поставленными таким образом, эти вопросы, возможно, не имеют смысла. Несомненно, они подвержены справедливой критике. Потому что действительно ли пространство «существует»? Является ли оно трехмерным? И затем сам вопрос «почему»! Что подразумевается под «физикой» в R_4 или R_7?

Я не буду пытаться найти лучшую форму для этих вопросов. Возможно, другие преуспеют в указании некоторых более сингулярных свойств R_3, и тогда станет ясным, каковы те «правильные» вопросы, для которых наши рассмотрения являются подходящими ответами.

§ 1. Гравитация и планетарное движение

Для планетарного движения, как мы увидим, имеется различие между R_3 и R_2, а также между R_3 и R_n с бо́льшим n по отношению к устойчивости круговых траекторий. В R_3 малое возмущение оставляет траекторию финитной, если энергия не слишком велика; в отличие от этого в R_2 траектория остается финитной для любых величин энергии. В R_n при $n>3$ планета падает на притягивающий центр или удаляется на бесконечность. В R_n при $n>3$ не существует движений, сопоставимых с эллиптическим движением в R_3, — все траектории имеют характер спиралей.

Для притяжения, под влиянием которого планета движется по орбите в пространстве R_n, мы полагаем $\varkappa \frac{Mm}{r^{n-1}}$, при $n>2$ этому соответствует потенциальная энергия:

$$V(r) = -\varkappa \frac{Mm}{(n-2)r^{n-3}}. \tag{1}$$

Мы *выводим* этот закон притяжения из дифференциального уравнения Лапласа—Пуассона. Это значит: мы предполагаем, что сила направлена к центру и является функцией только от r, так

* Ehrenfest P. In what way does it become manifest in the fundamental laws of physics that space has three dimensions?—«Proc. Amsterdam Acad.», 1917, v. 20, p. 200—209. (Представлено Г. А. Лоренцем на заседании 26 мая 1917 г.).

что она может быть получена из потенциала; и мы применяем теорему Гаусса для интеграла от нормальной компоненты силы по замкнутой поверхности (поток силы).

Уравнения движения, таким образом, имеют форму

$$m\frac{d^2x_h}{dt^2} = -\varkappa\frac{Mm}{r^{n-1}}\cdot\frac{x_h}{r} = -\frac{\partial V}{\partial x_h} \quad (h = 1, \ldots, n).$$

Движение происходит в плоскости. В этой плоскости мы вводим полярные координаты. Тогда сразу же могут быть написаны два первых интеграла:

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) = E, \qquad mr^2\dot{\varphi} = \Theta.$$

Исключая $\dot{\varphi}$, мы находим для $\dot{r}$

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{2V}{m} - \frac{\Theta^2}{m^2r^2}}, \quad \dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{Ar^2 + Br^{4-n} - C^2}. \tag{2}$$

Поскольку r может колебаться вдоль траектории между положительными значениями, $\dot{r}$ должна иметь действительные и попеременно положительные и отрицательные значения. Поэтому выражение, из которого должен быть извлечен корень, должно быть всегда положительным между двумя значениями r, для которых оно обращается в ноль. Обсуждение различных случаев можно найти в дополнении I. Мы рассмотрим там и случай $n=2$, для которого (1) должно быть заменено выражением

$$V = \varkappa Mm \log r,$$

а (2) — уравнением

$$\dot{r} = \frac{1}{r}\sqrt{\alpha r^2 - \beta r^2\log r - \gamma^2}, \tag{2*}$$

где $\alpha = 2E/m$, $\beta = 2\varkappa M$, $\gamma^2 = \Theta^2/m^2$.

Результаты этого обсуждения таковы:

n	Круговые траектории	Движения между двумя положительными значениями r	Движение на бесконечность
4, 5, ...	неустойчивы	невозможны!	возможно
3	устойчивы	возможны (более того, замкнуты)	возможно
2	устойчивы	возможны (незамкнутые)	невозможно!

Замечания:

1. В этой связи мы можем напомнить следующую теорему Бертрана [1]: траектории материальной точки, описываемые под влиянием силы, направленной к фиксированному центру и являющейся функцией от расстояния до этого центра, замкнуты только тогда, когда сила пропорциональна этому расстоянию или обратно пропорциональна его квадрату.

2. Замечательно, что также и в неевклидовом трехмерном пространстве планетарные траектории, соответствующие эллиптическим, оказываются замкнутыми, если в закон гравитации и в уравнения механики ввести изменения, соответствующие кривизне этого пространства. (Ср. Либман [2].)

3. Мы можем поставить вопрос: что станет с боровским выводом спектральных серий в R_n, если $n \neq 3$. Изменим в этом выводе закон электрического притяжения таким же образом, как закон гравитации, и будем квантовать момент импульса так же, как это делает Бор. Из предыдущего ясно, что при $n>3$ могут существовать только круговые орбиты. При $n>4$ мы находим бесконечные серии, а при $n=4$ сингулярный случай, особенно замечательный по отношению к теории квантов. (См. дополнение II.)

§ 2. Трансляция — вращение, сила — пара сил, электрическое поле — магнитное поле

В R_3 имеется дуализм между вращением и трансляцией, поскольку оба определяются тремя характеризующими параметрами. Это тесно связано с тем фактом, что количество плоскостей, проходящих через пары координатных осей, равно количеству самих осей.

В любом другом R_n эти два числа не равны. Число осей координат равно n. Беря каждый раз по две из осей, мы можем провести через них $n(n-1)/2$ плоскостей. Ясно, что $n(n-1)/2>n$ при $n>3$, в то время как $n>n(n-1)/2$ при $n<3$; например: при $n=2$ мы имеем одно вращение и две трансляции, при $n=4$ мы имеем 6 вращений и 4 трансляции.

Это соответствует дуализму, существующему только при $n=3$, между тремя компонентами силы и тремя компонентами пары сил, которые совместно могут заменить произвольную систему сил.

---

[1] Bertrand J. Comptes Rendus. T. 77, 1873, p. 849.

[2] Liebmann H. Nicht-euklidishe Geometrie. 2e Aufl. 1912, p. 207.

Исходя из формул теории относительности, мы легко видим, что и дуализм между электрическими и магнитными величинами также ограничивается пространством R_3.

В R_n электрическое поле определяется n компонентами, магнитное — $n(n-1)/2$ числами.

Пространственные координаты в $(n+1)$-мерном «мире» будут обозначаться $x_1, \ldots, x_n$, а t заменим на $x_0=ict$. Электрическая и магнитная силы могут быть получены из $(n+1)$-потенциала (соответствующего запаздывающему 4-потенциалу в R_3) $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. $n(n-1)/2$ компонент его ротора

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_k}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_h} \quad (h, k=1, \ldots, n)$$

дают магнитное поле, а n компонент ротора

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial x_0}-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_h} \quad (h=1, \ldots, n)$$

электрическое поле.

§ 3. Интегралы уравнения колебаний в R_n (обобщение запаздывающих потенциалов)

Интегралы уравнения

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=0$$

имеют следующие свойства в R_3. Если в момент времени $t=0$ мы имеем $\varphi=0$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ везде, кроме малой области γ, то в любой последующий момент времени t (если только t берется достаточно большим) $\varphi=0, \frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ везде, кроме тонкого слоя между двумя поверхностями (рис. 1), которые в пределе, когда γ становится достаточно малой, приближаются к сферическим поверхностям с центром в γ.

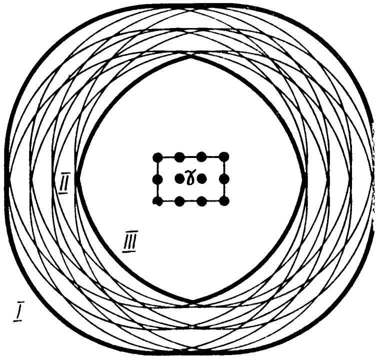


Рис. 1

В R_2 мы имеем нечто другое: здесь кроме возмущения между двумя концентрическими линиями вокруг γ мы имеем еще и асимптотически убывающее возмущение во всей области (III), ограниченной внутренней линией.

В этом отношении все пространства R_{2n+1} ведут себя как R_3, а *все пространства R_{2n} — как R_2* (см. дополнение III).

Но среди пространства R_{2n+1} пространства R_3 характеризуется особенностью, которая становится ясной, когда запаздывающие потенциалы, т. е. интегралы дифференциального уравнения

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=\rho$$

в R_3, сравниваются с потенциалами в R_{2n+1} высших размерностей. Для R_3:

$$\varphi=\frac{1}{C_3}\iiint d\omega\,\frac{[\rho]}{r},$$

для R_5:

$$\varphi=\frac{1}{3C_5}\iiiint\!\!\int d\omega\left\{\frac{[\rho]}{r^3}+\frac{1}{c}\,\frac{\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right]}{r^2}\right\},$$

для R_7:

$$\varphi=\frac{1}{5C_7}\int\cdots\int d\omega\left\{\frac{[\rho]}{r^5}+\frac{1}{c}\,\frac{\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right]}{r^4}+\frac{1}{c^2}\,\frac{\left[\dfrac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right]}{r^2}\right\}$$

(см. дополнение IV).

Здесь $C_3=4\pi$, $C_5=8\pi^2/3$, $C_7=11\pi^3/15$ — площади сфер единичного радиуса в R_3, R_5, R_7 соответственно. Символы $[\rho]$, $\left[\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\right]$, $\left[\dfrac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\right]$ означают, что эти величины должны браться в момент времени $t-r/c$ («запаздывающие величины»). В то время как в R_3 запаздывающие потенциалы зависят только от ρ, мы видим что в R_5, R_7 и т. д. они являются функциями также и от производных по времени.

Здесь следует заметить, что для больших значений r (которые в проблемах излучения только и представляют интерес) наиболее важен член с наивысшей производной, поскольку он содержит наименьшую степень r в знаменателе. Электрон с резкой границей распределения заряда вызывает, следовательно, своим движением большие сингулярности.

Дополнение

I. Обсуждение, упомянутое в § 1, может быть проиллюстрировано с помощью рис. 2, на котором пунктирные линии изображают члены Ar^2 и Br^{4-n} как функции r, сплошная кривая представляет их сумму, а горизонтальная линия — величину C^2, которая должна быть вычтена. В этом графическом представлении условие [о котором говорилось в § 1] состоит в том, что горизонтальная линия пересекает сплошную кривую в двух точках, между которыми линия лежит ниже кривой, так что разность $(Ar^2+Br^{4-n}) - C^2$ здесь положительна.

Для $n=2$ мы добавили график аналогичной структуры; линии представляют[1]: αr^2, $-\beta r^2 \log r$, их сумму и γ^2. В этом случае упомянутое условие выполняется.

II. То, что электрическое притяжение дает центростремительную силу при движении по окружности, выражается уравнением

$$mr\dot{\varphi}^2 = e^2/r^{n-1}. \qquad \text{(A)}$$

Боровское условие для стационарных круговых орбит дает

$$mr^2\dot{\varphi} = \tau h/2\pi,$$

где τ — целое число.

Для орбиты с номером τ энергия, следовательно, равна

$$E_\tau = \tau^{\frac{-2(n-2)}{4-n}} \left(\frac{4\pi^2 m}{h^2}\right)^{\frac{n-2}{4-n}} e^{\frac{4}{4-n}} \frac{n-4}{2(n-2)},$$

где $n>2$.

Для R_n мы также полагаем, что излучаемые частоты вычисляются из условия

$$\nu_{\sigma,\tau} = \frac{E_\sigma - E_\tau}{h}.$$

Для $n=4$ мы имеем особый случай. Уравнение (A) принимает тогда вид

$$r^4\dot{\varphi}^2 = \frac{e^2}{m},$$

так что

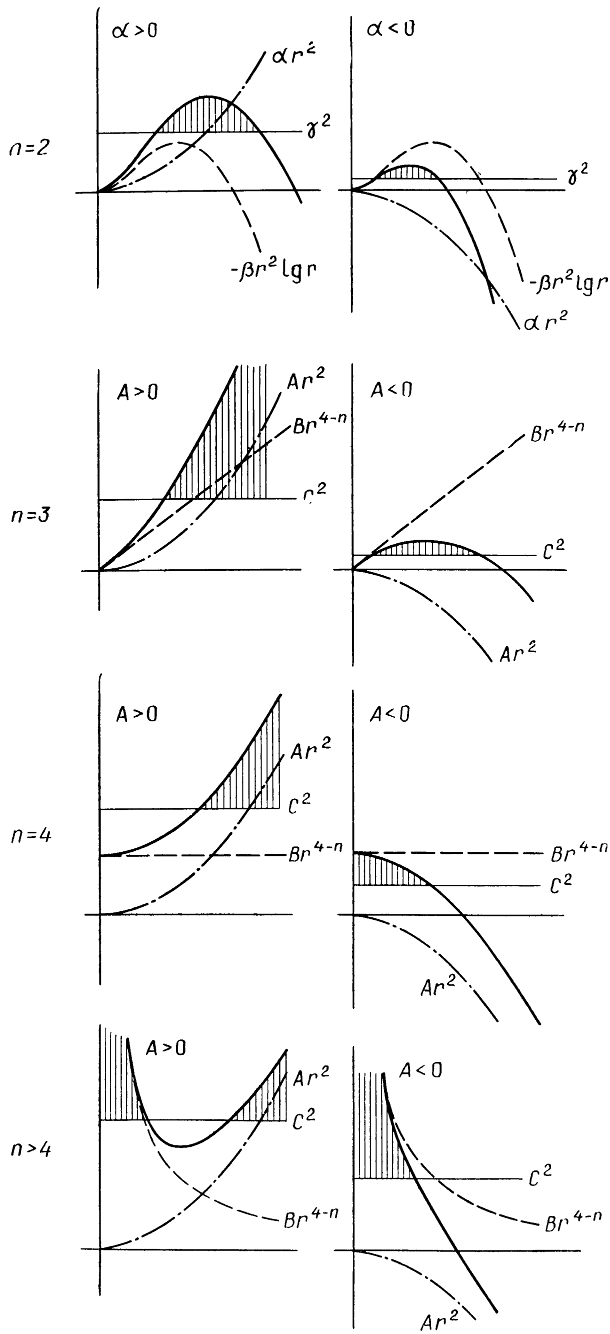
$$mr^2\dot{\varphi} = e\sqrt{m}.$$

Момент импульса, таким образом, может иметь только одно совершенно определенное значение — $e\sqrt{m}$, так что коэффициент притяжения должен быть связан с h, если квантовое условие (только при одном значении τ) выполняется. Для $n>4$ мы находим

$$\nu_{\sigma,\tau} = \nu_0(\sigma^\varkappa - \tau^\varkappa),$$

---

[1] $-A$, деленная на $2/m$, — это энергия, которую должна иметь планета, чтобы попасть на бесконечность с нулевой скоростью; с другой стороны, $-\alpha$, деленная на $2/m$, — это энергия, требуемая для того, чтобы удерживать планету с нулевой скоростью на расстоянии 1 от центра.



n=2
α>0
αr²
γ²
-βr² lg r
α<0
γ²
-βr² lg r
αr²
n=3
A>0
Ar²
Br⁴⁻ⁿ
c²
A<0
Br⁴⁻ⁿ
c²
Ar²
n=4
A>0
Ar²
c²
Br⁴⁻ⁿ
A<0
Br⁴⁻ⁿ
c²
Ar²
n>4
A>0
Ar²
c²
Br⁴⁻ⁿ
A<0
c²
Br⁴⁻ⁿ
Ar²

Рис. 2

где $\varkappa$ — положительная дробь в общем случае. Таким образом, мы получаем серии в спектре, которые для постоянного τ и возрастающего σ содержат линии в ультрафиолете, становящиеся все более удаленными друг от друга.

III. Решение уравнения колебаний для мембраны можно получить из решения для трехмерного тела, полагая в последнем случае начальное возмущение независящим от одной из прямоугольных координат, например от z. Тогда сферы с радиусом $r=ct$ все время пересекают область начального возмущения. Проводя вычисления, мы находим, что количество интегрирований, которое должно быть выполнено, если одна из координат не учитывается, точно такое же, как и при ее учете [1]. В этом причина того, что в R_2 возмущение никогда не исчезает там, где оно однажды появилось. Аналогичным образом мы можем перейти от решения для R_{2n+1} к решению для R_{2n}. Таким образом, становится ясным, что непрерывное существование возмущения — общее свойство всех пространств R_{2n}.

IV. Легче всего найти эти решения методом Кирхгофа [2]. Тогда используется специальное решение χ уравнения с нулевой правой частью. Это решение χ — функция только t и расстояния r от фиксированного центра P, так что уравнение для χ в R_n принимает вид

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}-\frac{n-1}{r}\frac{\partial\chi}{\partial r}-\frac{\partial^2\chi}{\partial r^2}=0.$$

Применяя операцию $D=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ к решению этого уравнения, мы находим решение такого же уравнения с заменой n на $n+2$. Для нечетных значений n это специальное решение имеет вид

$$\chi=D^{\frac{n-1}{2}}\left\{G\left(t+\frac{r}{c}\right)\right\},$$

т. е. для $n=1$

$$G\left(t+\frac{r}{c}\right),$$

где G — произвольная функция,

для $n=3$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r},\quad \text{или}\quad \frac{1}{r}F\left(t+\frac{r}{c}\right)$$

---

[1] Ср., напр., H. A. Lorentz. The theory of electrons. Note 4, p. 233.

[2] См., напр., Rayleigh. Theory of sound, ch. XIV, § 275.

(F — произвольная функция);

для $n=5$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}F\left(t+\frac{r}{c}\right)\right)=-\frac{1}{r^3}F\left(t+\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r^2c}F'\left(t+\frac{r}{c}\right)$$

и т. д.

Применяя тождество Грина к искомому решению ψ и к χ (например, для $n=5$) во всем пространстве ω вне малой сферы радиуса R с центром P, мы находим

$$-\iiiint d\Sigma\left(\psi\frac{\partial\chi}{\partial N}-\chi\frac{\partial\psi}{\partial N}\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\iiiiint d\omega\left(\chi\frac{\partial\psi}{dt}-\psi\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)+\iiiiint d\omega\chi\rho,$$

где Σ — поверхность сферы, а N — нормаль к ней в направлении ω.

Теперь мы должны интегрировать по t от большого отрицательного значения t_1 до большого положительного[1] t_2. В качестве произвольной функции F, входящей в χ, мы возьмем функцию, обращающуюся в нуль для всех значений аргумента, кроме очень малой окрестности нуля (затем мы должны перейти к пределу), однако такую, что интеграл от F по этой малой окрестности в точности равен 1. С помощью изменения порядка перехода к пределу и интегрирования[2], а также сжатия сферы упомянутое тождество переходит в

$$-3C_5\psi_{P,(t=0)}=-\int_{t_1}^{t_2}dt\iiiiint d\omega\rho\left\{-\frac{1}{r^3}F\left(t+\frac{r}{c}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2c}F'\left(t+\frac{r}{c}\right)\right\},$$

или, после частичного интегрирования,

$$\psi_{P,(t=0)}=\frac{1}{3C_5}\left\{\int d\omega\frac{(\rho)_{t=-r/c}}{r^3}+\int d\omega\frac{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{t=-r/c}}{r^2c}\right\}.$$

Перенос точки $t=0$ дает желаемый результат.

[1] Если мы хотим быть вполне точными, размеры области также должны быть ограниченными. Для наибольшего значения r величина t_1+r/c должна быть все еще отрицательна. Только после этого мы переходим к пределу бесконечных размеров.

[2] Это изменение порядка, которое в дальнейшем не обосновывается, характерно для метода Кирхгофа. Здесь мы его просто заимствуем у Кирхгофа. Если мы хотим провести интегрирование строго, мы должны будем воспользоваться методом, данным Ж. Адамаром: Acta Math., 1908, v. 31, p. 333, особенно § 22. Дополнительную литературу см. J. Hadamard. Journ. de Phys.. 1906.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д.
   а) A contribution to chronogeometry. — «Can. J. Math.», 1967, v. 19, p. 1119—1128.
   б) О философском содержании теории относительности. — В кн.: Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. — М.: Наука, 1979, с. 117—137.
2. Александров П. С.
   а) Предисловие к кн. [Гуревич, Волмен, 1948].
   б) Пуанкаре и топология [96 г, т. 2, с. 809].
3. Александров П. С., Пасынков Б. А.
   Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.
4. Алексеев И. С., Печенкин А. А.
   Принцип наблюдаемости. — В кн.: Методологические принципы физики. — М.: Наука, 1975, с. 451—476.
5. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. — М.: Мир, 1979.
6. Аристотель
   О небе, 268 a, b. — В кн.: Аристотель. Сочинения, т. 3. — М.: Мысль, 1981. (Aristotle. On the heavens. / The Loeb classical library, N 338. — L., 1945, p. 2—9).
7. Аронов Р. А.
   Непрерывность и дискретность пространства и времени. — В кн.: Пространство, время, движение. М.: Наука, 1971, с. 80—106.
8. Аронов Р. А., Угаров В. А.
   Пространство, время и законы сохранения. — «Природа», 1978, № 10, с. 99—104.
9. Архив АН СССР (Ленинградское отделение)
   Фонд 910, оп. 3, № 530, л. 268.
10. Архив ЛФТИ им. А. Ф. Иоффе
    а) Протоколы заседаний Ученого совета, д. № 39, л. 26;
    б) Личное дело № 287, л. 15.
11. Белл (Bell E. T.)
    The last universalist. — In: Men of mathematics. N. Y., 1937, p. 526.
12. Белоусов В. Д.
    а) Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.
    б) Квазигруппа. — В кн.: Математическая энциклопедия, т. 2. М.: Сов. энциклопедия, 1979, с. 802.
13. Бергман П. Г.
    а) Введение в теорию относительности. — М.: ИЛ, 1947.
    б) Quantisierung allgemein-Kovarianter Feldtheorien. — «Helv. phys. acta suppl.», 1956, v. 4, p. 79.
14. Блохинцев Д. И.
    а) Пространство и время в микромире. — М.: Наука, 1970.
    б) Стохастические пространства. — ЭЧАЯ, 1974, т. 5, с. 606.
    в) О гипотезе расширяющейся Вселенной. — ДАН, 1976, т. 229, с. 67.
15. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.
    Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1973.

16. Больцано Б. (Bolzano B.)
   а) Versuch einer objectiven Begründung der Lehre von den drei Dimensionen des Raumes. (1815). — In: Bolzano B. Schriften. Bd 5. Geometrische Arbeiten. — Prag; 1948, S. 51—65.
   б) Парадоксы бесконечного. (1851). — Одесса, 1911, с. 74—75.
17. Бор Н.
   Избранные научные труды, т. 2. М.: Наука, 1971.
18. Борн М.
   Таинственное число 137. — УФН, 1936, т. 16, с. 697—729.
19. Брауэр (Brouwer L. E. Y.)
   а) Beweis der Invarianz der Dimensionzahl. — «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 161.
   б) Über den natürlichen Dimensionsbegriff. — «J. reine angew. Math.», 1913, Bd 142, S. 146.
   в) Collected works. v. 1, 2. — Amsterdam, 1975.
20. Бриджмен П.
   Анализ размерностей. Л.—М.: ОНТИ, 1934.
21. Бронштейн М. П.
   а) Всемирное тяготение и электричество. — «Человек и природа», 1929, № 8, с. 25.
   б) Эфир и его роль в старой и новой физике. — Там же, № 16, с. 3.
   в) Современное состояние релятивистской космологии. — УФН, 1931, т. 11, с. 124—184.
   г) Внутреннее строение звезд и источники звездной энергии. — В кн.: Успехи астрономических наук. Вып. 2. М.—Л.: ГТТИ, 1933, с. 84—103.
   д) К вопросу о возможной теории мира как целого. — В кн.: Основные проблемы космической физики. — Киев: ОНТИ, 1934, с. 186—215.
   е) К вопросу о релятивистском обобщении принципа неопределенности. — ДАН, 1934, т. 1, с. 388.
   ж) Дополнение к кн.: Эйнштейн А. Основы теории относительности. — М.—Л.: ОНТИ, 1935.
   з) Квантовая теория слабого гравитационного поля. — «Sow. Phys», 1936, Bd 9, S. 140—157.
   и) Квантование гравитационных волн. — ЖЭТФ, 1936, т. 6, с. 195—236 (фрагменты статьи помещены в кн. [5, с. 433]).
   к) О возможности спонтанного расщепления фотонов. — ЖЭТФ, 1937, т. 7, с. 335—356.
22. Бронштейн М. П., Ландау Л. Д.
   Второй закон термодинамики и вселенная. — «Sow. Phys.», 1933, Bd 4, S. 114—118.
23. Бурбаки Н.
   Общая топология. — М.: Наука, 1968.
24. Вейль Г. (Weyl H.)
   а) Гравитация и электричество. (1918). [5, с. 513].
   б) Комментарий к мемуару Римана. (1923). [89, с. 325].
   в) Philosophy of mathematics and natural science. — Princeton, 1949.
25. Вейнберг С.
   а) Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975.
   б) Распад протона. — УФН, 1982, т. 137, с. 150—172.
26. Вигнер Е.
   Этюды о симметрии. — М.: Мир, 1971.
27. Визгин В. П.
   а) Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. — М.: Наука, 1972.
   б) Эрлангенская программа и физика. — М.: Наука, 1975.
   в) Принцип симметрии. — В кн.: Методологические принципы физики. — М.: Наука, 1975, с. 268—342.
   г) Один из аспектов методологии Эйнштейна. — ВИЕТ, 1976, вып. 3.

д) Релятивистская теория тяготения. — М.: Наука, 1981.
28. Виленкин А. В., Фомин П. И.
Принцип соответствия в задаче о собственной энергии электрона. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 12.
29. Вильсон К., Когут Дж.
Ренормализационная группа и ε-разложение. — М.: Мир, 1975.
30. Владимиров Ю. С.
а) К вопросу о построении квантовой теории гравитации. — В кн.: Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. — Киев: Наукова думка, 1965, с. 137.
б) Размерность реального пространства и ее особенности. — В кн.: Теория относительности и гравитация. — М.: Изд. МОИП, 1971, с. 31—39.
в) Квантовая теория гравитации. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1972.— М.: Наука, 1974, с. 280—340.
31. Вяльцев А. Н.
Дискретное пространство-время. — М.: Наука, 1965.
32. Гайденко П. П.
Эволюция понятия науки. — М.: Наука, 1980.
33. Галилей Г.
Диалог о двух системах мира. — М.: ГТТИ, 1948.
34. Гамов (Gamow G.)
Thirty years that shook physics. — N. Y., 1966.
35. Гамов Г., Иваненко Д., Ландау Л.
Мировые постоянные и предельный переход. — ЖРФХО, 1928, т. 60, с. 13—17.
36. Гаррисон (Harrison E. R.)
Fluctuations at the threshold of classical cosmology. — «Phys. Rev. D», 1970, v. 1, p. 2726.
37. Гейзенберг В.
Физические принципы квантовой теории. — Л.—М.: ГТТИ, 1932.
38. Герок Р. (Geroch R.)
а) Local chacacterisation of singularities in General Relativity. — «J. Math. Phys.», 1968, v. 9, p. 450.
б) Сингулярности в общей теории относительности. — В кн.: Квантовая гравитация и топология. — М.: Мир, 1973.
39. Гинзбург В. Л.
а) О теории относительности. — М.: Наука, 1979.
б) О физике и астрофизике. — М.: Наука, 1980; УФН, 1981, т. 134, с. 469—517.
40. Гинзбург В. Л., Киржниц Д. А., Любушин А. А.
О роли квантовых флуктуаций гравитационного поля в общей теории относительности и космологии. — ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 451—459.
41. Гинзбург В. Л., Фролов В. П.
Возможность существования черных дыр малой массы и фундаментальная длина. — «Письма в АЖ», 1976, т. 2, с. 474—478.
42. Голдберг (Goldberg S.)
Planck's philosophy of nature. — In: «Hist. studies phys. sci.», 1976, v. 7, p. 125.
43. Гольдберг А. А.
Интеграл по полуаддитивной мере. — «Матем. сб.», 1962, т. 58 (100), с. 289—310.
44. Горелик Г. Е.
а) Коллапс в скалярно-тензорной теории гравитации. — «Изв. вузов, физика», 1973, № 1.
б) О размерности пространства, основанной на метрике. — «Вестник Моск. ун-та. Сер. физ., астрон.», 1978, № 5, с. 58—62.
в) Общая теория относительности и проблема размерности пространства-

времени. — В кн.: Эйнштейн и философские проблемы физики XX века. — М.: Наука, 1979.
г) Взаимодействие физики и математики при формировании современных представлений о размерности пространства. Автореф. канд. дис. ИИЕиТ АН СССР. М., 1979.
д) Размерность пространства в физике и топологии. — В кн.: История и методология естественных наук (физика). Вып. 21. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979.
е) Законы сохранения в ОТО и принцип соответствия. — Там же, вып. 26, 1981.
ж) Проблема размерности пространства и космология. — Там же, вып. 27, 1982.
з) Нефизические аргументы в физической дискуссии. — Там же, вып. 30, 1983.
и) Первые шаги квантовой гравитации и планковские величины. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1978—1979. — М.: Наука, 1982,
к) Почему пространство трехмерно? — М.: Наука, 1982.

45. Горелик Г. Е., Озерной Л. М.
Реликтовое излучение как возможный продукт квантовой эры расширения Вселенной. — «Письма в АЖ», 1978, т. 4, с. 160.
46. Гуревич В., Волмен Г.
Теория размерности. — М.: ИЛ, 1948.
47. Гуревич Л. Э.
Об одной фундаментальной проблеме в космологии. — В кн.: Эвристическая роль математики в физике и космологии. — Л.: Наука, 1975, с. 39—57.
48. Гуревич Л., Мостепаненко В.
On the existence of atoms in n-dimensional space. — «Phys. Letters», 1971, v. 35 A, p. 201.
49. Гуц А. К.
Аксиоматическая теория относительности. — УМН, 1982, т. 37, с. 39—79.
50. Джонсон (Johnson D. M.)
а) Prelude to dimension theory: The geometrical investigations of B. Bolzano. — «Arch. for hist. exact sci», 1977, v. 17, p. 261.
б) The probleme of the invariance of dimension in the growth of modern topology. — Ibid., 1979, v. 20, p. 97—188; 1981, v. 25, p. 85—267.
51. Джэммер (Jammer M.)
Concepts of space. 1-st ed. 1954; 2nd ed. 1969.
52. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.
Строение и эволюция Вселенной. — М.: Наука, 1975.
53. Зельманов А. Л.
а) Космология. — В кн.: Астрономия в СССР за 30 лет. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
б) Космология. — В кн.: Развитие астрономии в СССР. М.: Наука, 1967.
в) Многообразие материального мира и проблема бесконечности Вселенной. — В кн.: Бесконечность и Вселенная. М.: Мысль, 1969, с. 274—324.
54. Иваненко Д. Д.
а) Дополнение к кн.: Дирак П. Основы квантовой механики. — М.—Л.: ГТТИ, 1932.
б) Введение в теорию элементарных частиц. — УФН, 1947, т. 32, с. 149, 261.
в) Вступительная статья. — В кн.: Новейшие проблемы гравитации. — М.: ИЛ, 1961.
55. Иваненко Д. Д., Владимиров Ю. С.
Теория гравитации. — М.: Изд. МГУ, 1970.
56. Иванов Л. Д.
Вариации множеств и функций. — М.: Наука, 1975.
57. Идлис Г. М.

а) Основные черты наблюдаемой астрономической вселенной как характерные свойства обитаемой космической системы. — «Изв. Астрофиз. ин-та АН КазССР», 1958, № 7, с. 39.
б) О структуре и динамике метагалактики. — В кн.: Философские проблемы теории тяготения Эйнштейна и релятивистской космологии. — Киев: Наукова думка, 1965, с. 302.
в) Кант и современные представления о Вселенной. — «Природа», 1974, № 6.
58. Кант И.
Сочинения. — М.: Мысль, 1963.
59. Карр, Рис (Carr B. J., Rees M. Y.)
The anthropic principle and the structure of the physical world. — «Nature», 1979, v. 278, p. 605—612.
60. Келли Дж.
Общая топология. — М.: Наука, 1968.
61. Киржниц Д. А.
а) Проблема фундаментальной длины. — «Природа», 1973, № 1, с. 38.
б) Сверхпроводимость и элементарные частицы. — УФН, 1978, т. 125, с. 169—194.
62. Киржниц Д. А., Линде А. Д.
а) Релятивистский фазовый переход. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1263—1275.
б) Symmetry behavior in gauge theories. — «Ann. of Phys.», 1976, v. 101, p. 195—238.
в) Фазовые превращения в микромире и во Вселенной. — «Природа», 1979, № 11, с. 20—30.
63. Клейн М. (Klein M.)
Paul Ehrenfest. — Amsterdam, 1970.
64. Клейн О. (Klein O.)
а) Zur fünfdimensionalen Darstellung der Relativitätstheorie. — «Z. Phys.», 1927, Bd 46, S. 188.
б) Актуальные проблемы малых и больших чисел в физике (шведск. яз.) — «Kosmos» (Sweden), 1954, Bd 32, S. 33.
в) Generalisations of Einstein's theory of gravitation considered from the point of view of guantum field theory. — «Helv. phys. acta suppl.», 1956, v. 4, p. 58.
65. Кобзарев И. Ю.
а) Спонтанное нарушение симметрии и его космологические следствия. — «Природа», 1975, № 11, с. 79—85.
б) Теория тяготения Эйнштейна и ее экспериментальные следствия. — М.: Изд. МИФИ, 1981.
66. Кольман Э. Я.
Бернард Больцано. — М.: Изд-во АН СССР, 1955.
67. Коэн П. Дж., Херш Р.
Неканторовская теория множеств. — В кн.: Математика в современном мире. — М.: Знание, 1969, с. 20—32.
68. Крамер, Нильсен, Цзе (Krammer A. B., Nielsen H. B., Tze H.) On the scale dependence of the dimension of hadronic matter. — «Nucl. Phys. B», 1974, v. 81, p. 145.
69. Кремер, Шерк (Cremmer E., Scherk Y.)
Dual models in four dimmensions with internal symmetries. — «Nucl. Phys. B», 1976, v. 103, p. 399—425.
70. Кузнецов Б. Г.
а) Принцип относительности в античной, классической и квантовой физике. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
б) История философии для физиков и математиков. — М.: Наука, 1974.
в) Эйнштейн. 5-е изд., — М.: Наука, 1979.
71. Ландау Л. Д.
а) Собрание трудов. — М.: Наука, 1969.

б) Квантовая теория поля. — В кн.: Нильс Бор и развитие физики. — М.: ИЛ, 1958.
72. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.
а) Механика. — М.: Наука, 1965.
б) Теория поля. — М.: Наука, 1973.
в) Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
г) Статистическая физика. — М.: Наука, 1976.
73. Лебег (Lebesgue H.)
Sur la non-applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à des espacesà n et $n+p$ dimensions. — «Math. Ann.», 1911, Bd 70, S. 166.
74. Лейбниц Г. В.
Теодиция. (1710) — «Вера и разум», 1891, № 18, с. 305.
75. Леви-Леблон (Levy-Leblond Y.-M.)
On the conceptional nature of the physical constants. — «Riv. Nu. Cim», 1977, v. 7, p. 187—214.
76. Ливанова А. М.
Л. Д. Ландау. — М.: Знание, 1978.
77. Логунов А. А.
Основы теории относительности. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
78. Максвелл Дж. К.
Статьи и речи. — М.: Наука, 1968.
79. Мальцев А. И.
Избранные труды, т. 1. Классическая алгебра. — М.: Наука, 1976, с. 340.
80. Манин Ю. И.
Математика и физика. — М.: Знание, 1979.
81. Марков А. А.
О логике конструктивной математики. — М.: Знание, 1972.
82. Марков М. А.
а) О предельном λ-процессе. — ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 848.
б) Гипероны и K-мезоны. — М.: Физматгиз, 1958.
в) О природе материи. — М.: Наука, 1976.
83. Марцке Р., Уилер Дж.
Гравитация как геометрия. — В кн.: Гравитация и относительность. — М.: Мир, 1965, с. 107—140.
84. Медведев Ф. А.
а) Развитие теории множеств в XIX в. — М.: Наука, 1965.
б) Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX—XX вв.— М.: Наука, 1976.
85. Менгер (Menger K.)
а) Dimensions theorie. — Leipzig—Berlin, 1928.
б) The theory of relativity and geometry. — In: A. Einstein: philosopher-scientist. — N. Y., 1949, p. 459.
86. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж.
Гравитация. — М.: Мир, 1977.
87. Мостепаненко А. М.
Проблема универсальности основных свойств пространства и времени. — Л.: Наука, 1969.
88. Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.
Четырехмерность пространства и времени. — М.—Л.: Наука, 1966.
89. Об основаниях геометрии. — М.: ГИТТЛ, 1956.
90. Окунь Л. Б.
Современное состояние и перспективы физики высоких энергий. — УФН, 1981, т. 134, с. 3—44.
91. Паули В.
а) «Helv. phys. acta suppl.», 1956, v. 4, p. 68.
б) Статьи последних лет. — В кн.: Теоретическая физика 20 века. — М.: ИЛ, 1962.
в) Труды по квантовой теории. — М.: Наука, 1975, 1977.

г) Физические очерки. — М.: Наука, 1975, с. 201.
92. Петров А. З.
Понятие энергии в ОТО. — В кн.: «Уч. зап. Казанского ун-та», т. 123, кн. 12 (Гравитация и теория относительности). — Изд-во Казанского ун-та, 1963, с. 119—147.
93. Планк М.
а) Sitzungber. Akad. Wiss. Berlin, 1899. S. 440.
б) Картина мира новой физики. — «Естествознание и марксизм», 1929, № 4, с. 6—24.
в) Избранные труды. — М.: Наука, 1975.
94. Полиан (Paulian A.—H.)
Dictionnaire de physique. — Avignon, 1761.
95. Проблемы современной физики в работах физ.-техн. ин-та акад. А. Ф. Иоффе. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1936, с. 74.
96. Пуанкаре А.
а) On the foundations of geometry. — «The Monist», 1898, v. 9, № 1.
б) Наука и гипотеза. — М., 1904.
в) Последние мысли. — Пг., 1923 (Почему пространство имеет три измерения? — с. 32).
г) Избранные труды. Т. 1—3. — М.: Наука, 1972—1974.
97. Риман Б.
О гипотезах, лежащих в основании геометрии. [89, с. 309].
98. Рис М., Руффини Р., Уилер Дж.
Черные дыры, гравитационные волны и космология. — М.: Мир, 1977.
99. Роджерс (Rogers C.)
Hausdorf measures. — Cambridge, 1970.
100. Родичев В. И.
а) Теория тяготения в ортогональном репере. — М.: Наука, 1974.
б) Эволюция понятия системы отсчета. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1974. — М.: Наука, 1976, с. 286.
101. Рожанский И. Д.
Развитие естествознания в эпоху античности. — М.: Наука, 1979.
102. Розенталь И. Л.
а) Космические объекты и элементарные частицы. — УФН, 1977, т. 121, с. 319.
б) О существовании физических пространств с размерностью $N \neq 3+1$. — Препринт ИКИ АН СССР, Пр—400. М., 1978.
в) Физические закономерности и численные значения фундаментальных постоянных. — УФН, 1980, т. 131, с. 239.
103. Розенфельд Б. А.
История неевклидовой геометрии. — М.: Наука, 1976.
104. Розенфельд Л. (Rosenfeld L.)
а) Über die Gravitationswirkungen des Lichtes. — «Z. Phys.», 1930, Bd 65, S. 589—599.
б) On quantization of fields. — «Nucl. Phys.», 1963, v. 40, p. 353.
105. Сабинин Л. В.
Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. — В кн.: Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т. 1. М.: Наука, 1981, с. 293—339.
106. Салам А.
а) Калибровочное объединение фундаментальных сил. (Нобелевская лекция). — В кн.: На пути к единой теории поля. — М.: Знание, 1980.
б) Последний замысел Эйнштейна: объединение фундаментальных взаимодействий и свойств пространства-времени. — «Природа», 1981, № 1, с. 54—59.
107. Сасло (Saslaw W. C.)
A relation between homogenity of the Universe and the dimensionality of space. — «Mon. Not. R. Astr. Soc.», 1977, v. 179, p. 659.

108. Секст Эмпирик
Сочинения. М.: Мысль, 1976.
109. Синг Дж.
Общая теория относительности. — М.: ИЛ, 1963.
110. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.
Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
111. Соминский М. С.
Абрам Федорович Иоффе. — М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1964.
112. Спасский Б. И.
История физики. — М.: Высшая школа, 1977.
113. Стоней (Stoney G. J.)
On the physical units of Nature. — «Phil. Mag.», 1881, v. 11, p. 381—390.
114. Тамм И. Е.
а) Теоретическая физика. — В кн.: Октябрь и научный прогресс, т. 1. — М.: АПН, 1967, с. 170.
б) Собрание научных трудов, т. 1, 2. — М.: Наука, 1975.
115. Тангерлини (Tangherlini F. R.)
Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem. — «Nu. Cim», 1963, v. 27, p. 636.
116. Томас (Thomas I.)
Selections illustrating the history of greek mathematicks, v. 2. — L., 1941.
117. Траутман А.
а) Общая теория относительности. — УФН, 1966, т. 89, с. 3.
б) Законы сохранения в ОТО. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1967. — М.: Наука, 1967, с. 308.
118. Тяпкин А. А.
Об истории формирования идей специальной теории относительности. — В кн.: Принцип относительности. М.: Наука, 1973, с. 271.
119. Уилер Дж. (Wheeler J. A.)
а) Geons. — «Phys. Rev.», 1955, v. 97, p. 511—536.
б) Гравитация, нейтрино и Вселенная. — М.: ИЛ, 1962.
в) За границей времени. [98, с. 327].
120. Уитроу (Whitrow G. Y.)
Why physical space has three dimensions. — «Brit. J. Phil. Sci.», 1955, v. 6, № 21.
121. Урысон П. С.
Труды по топологии и другим областям математики. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1951, с. 229. (О канторовых многообразиях. Ч. 1. Размерность.)
122. Финкельштейн (Finkelstein D.)
Space-time code. — «Phys. Rev.», 1969, v. 184, p. 1261; 1974, v. D9, p. 2219.
123. Фок В. А.
а) «Zentralblatt fur Math.», 1936, Bd 14, S. 87.
б) Физические принципы теории тяготения Эйнштейна. — В кн.: Эйнштейн и философские проблемы XX века. — М.: Наука, 1979, с. 255—267.
124. Франкфурт У. И.
Специальная и общая теория относительности. — М.: Наука, 1968.
125. Франкфурт У. И., Френк А. М.
Научное творчество Эренфеста. [142д, с. 273].
126. Фрейденталь, Гейтинг (Freudenthal H., Heyting A.)
The life of L. E. Y. Brouwer. — In: Brower L. Collected works, v. 2, p. X.
127. Френкель А. А., Бар-Хиллел И.
Основания теории множеств. — М.: Мир, 1966.
128. Френкель В. Я.
а) Яков Ильич Френкель. — М.—Л.: Наука, 1966.
б) Пауль Эренфест. — М.: Атомиздат, 1977.
129. Фридман А. А.
Мир как пространство и время. — М.: Наука, 1965.

130. Фролов В. П.
а) Черные дыры и квантовые процессы в них. — УФН, 1976, т. 118, с. 473—503.
б) Физика черных дыр: от Эйнштейна до наших дней. — В кн.: Эйнштейновский сборник 1975—1976. — М.: Наука, 1978.
131. Халмош П.
Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
132. Хантли Г.
Анализ размерностей. — М.: Мир, 1970.
133. Хокинг (Hawking S. W.)
а) Breakdown of predictability in gravitational collapse. — «Phys. Rev. D», 1976, v. 14, p. 2460.
б) Is the end in sight for theoretical physics? — «Phys. Bull.», 1981, v. 32, p. 15—17. (Виден ли конец теоретической физики? — «Природа», 1982, № 5, с. 48—56.)
134. Хокинг, Кинг, Маккарти (Hawking S., King A., McCarthy P.) A new topology for curved space—time. — «J. Math. Phys.», 1976, v. 17, p. 174.
135. Хокинг С., Эллис Дж.
Крупномасштабная структура пространства-времени. — М.: Мир, 1977.
136. Чаплайн (Chapline G. F.)
Quarks in the early Universe. — «Nature», 1976, v. 261, p. 550.
137. Шанин Н. А.
О критике классической математики. — Труды МИАН, 1962, т. 67, с. 284.
138. Шварц А. С.
Are the field and space variables on an equal footing? — «Nucl. Phys. B», 1980, v. 171, p. 154—166.
139. Шмутцер Э.
Симметрии и законы сохранения в физике. — М.: Мир, 1974.
140. Эддингтон А. (Eddington A.)
а) Report on the relativity theory of gravitation. — L., 1918.
б) Пространство, время и тяготение. — Одесса, 1923.
в) Теория относительности. — М.: ГТТИ, 1934.
141. Эйнштейн А.
Собрание научных трудов. Т. 1—4. — М.: Наука, 1965—1967.
142. Эренфест П. (Ehrenfest P.)
а) Возможно ли определить понятие «физика»? — ЖРФХО, 1911, т. 43, 9Б, с. 381. [142д, с. 177].
б) In what way does it become manifest in the fundamental laws of Physics that space has three dimensions? — «Proc. Amsterdam Ac.», 1917, v. 20, p. 200.
в) Welche Rolle spielt die Dreidimensionalitat des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? — «Ann. Phys.», 1920, Bd 61, S. 440.
г) Collected papers. — Amsterdam, 1958.
д) Относительность. Кванты. Статистика. — М.: Наука, 1972.
е) Эренфест—Иоффе. Научная переписка. — Л.: Наука, 1973.

УКАЗАТЕЛЬ

Абрикосов А. А. 103
Адамар Ж. 65, 205
Александров А. Д. 36, 54
Александров П. С. 17, 23
Аристотель 10—12, 69
Архимед 194

Бейль П. 13
Бертран Ж. 65, 198
Березин Ф. А. 165
Блохинцев Д. И. 70, 71, 117
Больцано Б. 14, 15
Больцман Л. 59, 175, 183
Бор Н. 59, 70, 83, 84, 90, 95, 104, 199
Борн М. 100, 101
Брауэр Л. 21, 27, 28, 30, 46, 66, 67, 72, 132, 133
Бриджмен П. 78
Бронштейн И. П. 83
Бронштейн М. П. 7, 74, 81—113, 118, 169, 176

Вавилов С. И. 78, 92
Вайнберг С. 106
Ван-дер-Ваальс И. 66
Вейль Г. 59, 63, 166
Вигнер Е. 169, 191
Визгин В. П. 8, 136
Вин В. 59, 75
Вяльцев А. Н. 71

Гайденко П. П. 9
Галилей Г. 12, 13, 164
Гамов Г. А. 107, 112, 168
Гаусс К. 34, 198
Гейзенберг В. 81, 92, 94, 99, 174
Гинзбург В. Л. 8, 117, 118, 153
Грассман Г. 165
Григорьян А. Т. 8
Гуревич Л. Э. 173
Гюйгенс Х. 171

Даламбер Ж. 58—60
Дебай П. 63
Декарт Р. 12
Денисов В. И. 8, 80
Джэммер М. 49
Дирак П. 82, 84, 86

Евклид 11, 12, 22
Егудин Г. И. 83

Зельманов А. Л. 8, 83, 168, 176

Иваненко Д. Д. 63, 102, 107, 112, 168
Идлис Г. М. 8, 176
Инфельд Л. 100, 101
Иоффе А. Ф. 63, 65, 92
Кавендиш Г. 110
Калуца Т. 64, 171
Кант И. 14, 15, 65, 173
Кантор Г. 17, 20, 28, 122, 134
Карр Б. 174
Кикоин И. К. 83
Киллинг В. 139
Киржниц Д. А. 8, 71, 117, 191
Кирхгоф Г. 204, 205
Клейн О. 81, 98, 102, 103, 105, 106, 171
Комптон А. 83
Корец М. А. 83
Крамер А. 126
Кристоффель Э. 94, 95
Крутков Ю. А. 91

Ландау Л. Д. 84, 86, 90, 103, 106, 107, 112, 123, 168, 176
Лаплас П. 25, 58, 59, 197
Лебег А. 23, 28, 30, 126
Либман Г. 62, 65, 199
Лифшиц Е. М 84, 123, 176
Лейбниц Г. 13, 14, 173, 174
Лобачевский Н. И. 62
Логунов А. А. 8, 80, 139, 143
Локшин А. А. 8
Лоренц Г. 18, 36, 65, 66, 131, 149, 159

Максвелл Дж. 57, 69, 190
Мандельштам Л. И. 92
Марков М. А. 103, 117
Маршак С. Я. 86
Мах Э. 25, 66
Медведев Ф. А. 14
Менгер К. 21, 28—30, 46
Мигдал А. Б. 83

Мизнер Ч. 104, 119, 121, 144, 178
Минковский Г. 32, 36, 92, 94, 123, 129—131, 135—139, 143—149, 152, 157—161, 164, 170, 186, 190

Нетер Э. 7, 140, 159, 160
Нильсен Г. 126
Нордстрем Г. 64
Ньютон И. 25, 59

Окунь Л. Б. 126, 180

Пайерлс Р. 90
Паули В. 48, 64, 81, 84, 92, 94, 103, 106, 128, 165
Пеано Дж. 20
Петров А. З. 153
Пифагор 9
Планк М. 26, 73—79, 81, 104, 106—108, 110, 113, 130, 175
Пенроуз Р. 42
Платон 10
Полиан А. 65
Понтрягин Л. С. 126
Птолемей 12
Пуанкаре А. 6, 7, 16—30, 56, 61, 66, 67, 82, 116, 121, 135, 138, 144—150, 152, 155, 157—161
Пуассон С. 60, 197

Рейнольдс О. 77
Релей Дж. 65
Ремер О. 110
Риман Б. 18, 22, 32, 62
Рис М. 174, 175
Рожанский И. Д. 9
Розенталь И. Л. 173, 174
Розенфельд Л. 81, 84, 90, 92
Рузе Г. 33
Руффини Р. 175

Сабинин Л. В. 150, 155
Салам А. 81, 85, 128
Сасло В. 70, 180, 185—187
Симпликий 12
Синг Дж. 33, 128, 148, 155
де Ситтер В. 41
Снайдер Х. 71

Смородинский Я. А. 83, 84
Спасский Б. И. 8
Стоней Дж. 110—112

Тамм И. Е. 91, 92, 117
Тартаковский П. С 83
Томсон Дж. 110
Торн К. 119, 121, 144, 178
Траутман А. 144, 148

Уилер Дж. 103—106, 119, 121, 144, 173, 175, 178
Уитроу Дж. 176
Уленбек Дж. 68
Урысон П. С. 21, 28—30, 46

Ферми Э. 40, 153
Фехнер Г. 21
Фок В. А. 91, 100, 101, 153
Франкфурт У. И. 153
Фредерикс В. К. 91, 102
Френкель В. Я. 8, 63, 83
Френкель Я. И. 83, 91, 93
Фреше М. 34, 128

Хаббл Э. 183
Халатников И. М. 103
Хаусдорф Ф. 34, 125, 126
Хвольсон О. Д. 64
Хокинг С. 42, 170, 181, 182

Цзе Г. 126

Чуковский К. И. 87

Шварц А. С. 171
Шварцшильд К. 42, 62
Шнирельман Л. Г. 126
Шредингер Э. 48, 117

Эддингтон А. 53, 54, 77, 78
Эйнштейн А. 6, 17, 24, 31—56, 63, 64, 67—69, 78—82, 87, 89—93, 100, 101, 112, 115, 141, 164, 173, 187, 188
Эренфест П. 5, 6, 25, 48, 57—72, 82, 123, 178, 179, 186, 187, 190—192, 197

Явелов Б. Е. 8

Г. Е. Горелик

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА