

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПАМЯТИ
АЛЕКСАНДРА
АЛЕКСАНДРОВИЧА
АНДРОНОВА



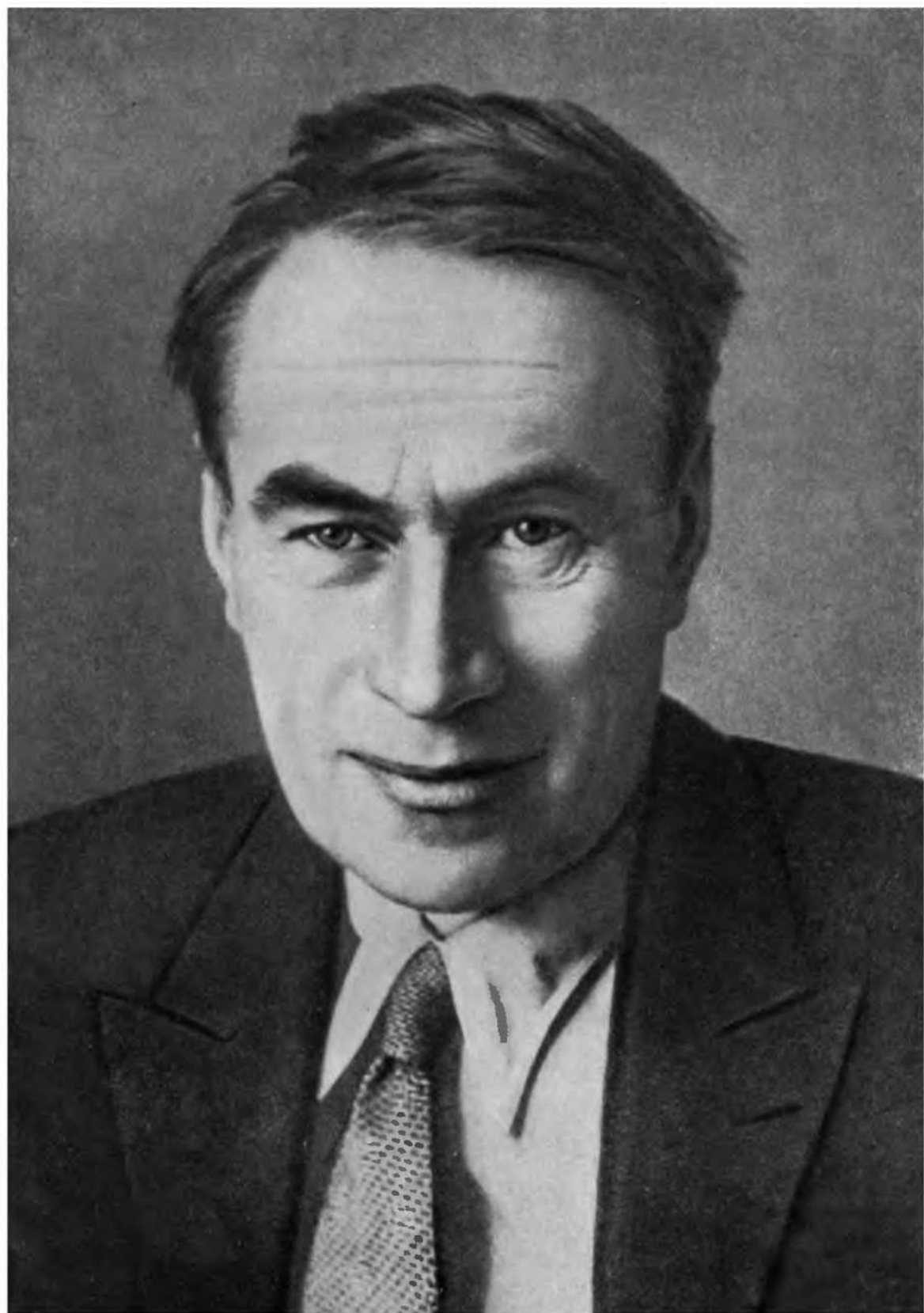
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПАМЯТИ
АЛЕКСАНДРА
АЛЕКСАНДРОВИЧА
АНДРОНОВА

Памяти
Александра Александровича
АНДРОНОВА

посвящают
эту книгу
друзья и ученики

Москва — Горький
1 сентября 1953 года



1950 г.

ЖИЗНЬ И ТРУДЫ А. А. АНДРОНОВА

Александр Александрович Андронов родился в 1901 г. в Москве. Уже в средней школе он мечтал посвятить себя науке. Одно время его больше всего влекла медицина, причем он хотел для того, чтобы искать в ней новые пути, приобрести сначала ту надежную научную базу, которую дает Физико-математический факультет Университета. В старших классах он начал читать книги по высшей математике. А. А. Андронов окончил среднюю школу в 1918 г. Он поступил на работу на завод, затем — в один из военно-продовольственных отрядов, с которым уехал на Урал. Вернувшись в 1920 г. в Москву, он был принят в Московское высшее техническое училище на электротехнический факультет. С 1921 г. одновременно с занятиями в МВТУ А. А. Андронов начал слушать некоторые лекции на Физико-математическом факультете Московского университета. Он почувствовал настолько сильный интерес к физике, что перешел в 1923 г. в Университет и окончил в 1925 г. Физико-математический факультет Московского университета по специальности теоретическая физика.

Студенческие годы А. А. Андропова совпали с началом расцвета московской математической школы. В то время студенты физики и математики слушали в Московском университете одни и те же математические лекции. А. А. Андронов получил глубокую и разностороннюю математическую подготовку.

А. А. Андронов проявил в университетские годы большой интерес к теоретической механике. Сильное впечатление произвел на него С. А. Чаплыгин. Занятия теоретической механикой наложили заметный отпечаток на научные работы А. А. Андропова.

Еще до окончания университета А. А. Андронов начал преподавать во II МГУ (ныне Московский педагогический институт им. В. И. Ленина) механику и теоретическую физику.

Решающее значение для формирования А. А. Андропова как ученого имела его аспирантура в Московском университете (1926—1929 гг.). Руководителем А. А. Андропова по аспирантуре был Л. И. Мандельштам. Под его руководством А. А. Андроновым была сделана (совместно с

М. А. Леонтовичем) первая работа, относящаяся к теории рассеяния света флюктуирующей поверхностью жидкости, и начал тот цикл работ по теории колебаний, о котором здесь будет подробно рассказано. Когда А. А. Андронов стал признанным ученым и вокруг него выросла (главным образом в Горьком, куда он переехал в 1931 г.) своя научная школа, он продолжал работать в тесном контакте с Л. И. Мандельштамом.

Хотя А. А. Андронов был по образованию физиком-теоретиком, главное поле его деятельности оказалось довольно далеким от того, чем обычно занимаются специалисты по теоретической физике. Научное развитие А. А. Андропова шло своеобразным путем. Его влекла атомная физика — та новая область исследования, куда устремилось большинство молодых теоретиков 1920-х годов, его сверстников. Он занимался во время аспирантуры статистической физикой и некоторыми вопросами квантовой физики. Но в конце аспирантуры творческие силы А. А. Андропова сосредоточиваются на вопросах генерации колебаний, поставленных в порядок дня радиотехникой в связи с появлением электронной лампы. Этим вопросам была посвящена его диссертация. Почти все дальнейшие исследования А. А. Андропова явились развитием идей, содержащихся в этой диссертации.

Для того чтобы понять значение первых работ А. А. Андропова по теории колебаний, необходимо иметь в виду, что почти вся «колебательная культура», которой располагали в 1920-х годах физики и инженеры (в том числе и радиоинженеры), была линейной — она была связана с вопросами, решаемыми при помощи принципа суперпозиции и линейных дифференциальных уравнений. Сюда относится, в частности, обычная теория переменных токов, а также теория связанных колебаний в контурах, сопротивление которых подчиняется закону Ома. Между тем, процессы генерации колебаний могут быть поняты только при помощи нелинейных дифференциальных уравнений. Это видно хотя бы из следующего замечания: для лампового генератора характерно, что в нем устанавливаются незатухающие колебания с вполне определенной амплитудой, не зависящей от начальных условий; в системе же, описываемой линейными дифференциальными уравнениями, либо не может быть (без переменного внешнего воздействия) незатухающих колебаний, либо возможны незатухающие колебания произвольной амплитуды, целиком зависящей от начальных условий.

В 1920-х годах большинством радиоспециалистов еще не было по-настоящему осознано принципиальное различие между процессами генерации колебаний и теми процессами, которые описываются линейными дифференциальными уравнениями. Часто пытались приспособить к процессам, происходящим в ламповом генераторе, представления, пригодные только для линейных систем, например, принцип суперпозиции. Эти представления приводили иногда к резкому противоречию с опытом. Некоторые исследователи хорошо понимали принципиальное отличие лампового



1926 г.

генератора от линейных систем и ставили задачи, связанные с ламповым генератором, как нелинейные задачи, приводили их к нелинейным дифференциальным уравнениям. Но мало написать нелинейное дифференциальное уравнение, надо суметь его исследовать. Решение нелинейных уравнений, вообще говоря, — дело несравненно более трудное, чем решение линейных уравнений. Исследователи, которых мы здесь имеем в виду, сумели решить ряд нелинейных задач и получить ценные результаты. Но методы, которыми были получены эти результаты, носили, если можно так выразиться, кустарный характер, не обладали достаточной общностью. Сами результаты были отрывочны.

А. А. Андронов сумел осветить вопросы генерации колебаний светом «большой науки», указав адекватный этим вопросам общий математический аппарат.

Начало было весьма скромным. А. А. Андронов составил простейшие, идеализированные до предела теоретические модели часов и лампового генератора. В модели генератора характеристика лампы была составлена из двух горизонтальных полупрямых («зет-характеристика»). Дифференциальные уравнения этих моделей, хотя и нелинейны, настолько просты, что А. А. Андронов смог без труда их проинтегрировать и построить полную картину интегральных кривых на фазовой плоскости. Эта картина такова: фазовая плоскость заполнена вложенными друг в друга спиралями, накручивающимися изнутри и снаружи на замкнутую кривую. Замкнутая кривая соответствует незатухающим колебаниям, спирали — процессам установления. Еще раньше (Андронов это знал) аналогичная картина была получена ван дер Полем при помощи метода изоклин для лампового генератора при идеализации характеристики лампы кубической параболой.

Здесь произошло то, что определило весь дальнейший научный путь А. А. Андропова: он усмотрел тождество замкнутых кривых на фазовой плоскости, изображающих незатухающие колебания часов и лампового генератора, с предельными циклами. Свою аспирантскую диссертацию он озаглавил «Предельные циклы Пуанкаре и теория колебаний».

Предельным циклом называется замкнутая интегральная кривая нелинейного дифференциального уравнения, к которой асимптотически приближаются соседние интегральные кривые. Предельные циклы были открыты и исследованы Пуанкаре вне всякой связи с физикой в его работе 1881 г. «О кривых, определяемых дифференциальным уравнением». Эта работа явилась началом качественной (топологической) теории дифференциальных уравнений, ставящей себе целью выяснение общего характера поведения интегральных кривых. До работ А. А. Андропова математики, занимавшиеся качественной теорией дифференциальных уравнений, не подозревали, что предельные циклы имеют отношение к физике и технике, а физики и инженеры, занимавшиеся

исследованием процессов, связанных с генерацией колебаний, не знали, что математический аппарат, нужный для создания общей теории этих процессов, уже существует.

А. А. Андроновым была также установлена связь между теорией генерации колебаний и теорией устойчивости А. М. Ляпунова, изложенной в его знаменитой работе «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.).

То, что было сказано о предельных циклах, нуждается в уточнении. Предельные циклы могут быть устойчивыми или неустойчивыми: изображающая точка движется по соседним интегральным кривым в сторону приближения к предельному циклу или удаления от него. Собственно процессам генерации колебаний соответствуют *устойчивые* предельные циклы (неустойчивые предельные циклы имеют другой физический смысл, также разъясненный Андроновым: они служат границей между областями начальных условий, из которых система стремится к различным устойчивым состояниям). А. А. Андронов показал, что движение, отображаемое устойчивым предельным циклом, обладает тем типом устойчивости, который получил название устойчивости по Ляпунову (отклонение изображающей точки на фазовой плоскости от движения, устойчивого по Ляпунову, достаточно малое в начальный момент, остается, по определению, сколь угодно малым в течение любого времени).

Для обозначения незатухающих колебаний, генерируемых системами, обладающими трением (сопротивлением) подобно часам или ламповому генератору, А. А. Андронов ввел новый термин, прочно вошедший в науку, термин *автоколебания*, и дал автоколебаниям точное математическое определение¹. Согласно А. А. Андронову автоколебания — это движения, отображаемые на фазовой плоскости (в случае систем с одной степенью свободы) устойчивыми предельными циклами.

Итак, А. А. Андронов был тем, кто дал автоколебаниям их название и математическое определение, кто связал их теорию с качественной теорией дифференциальных уравнений, а потому и с топологией, а также с общей теорией устойчивости движения. Его работы способствовали больше, чем чьи-либо другие, превращению учения об автоколебаниях и о родственных им явлениях из набора немногих отрывочных результатов и расчетных рецептов в новую, прекрасную главу теории колебаний.

Глава эта лежит за пределами не только классической линейной теории колебаний, но и теории нелинейных консервативных систем. Консервативные системы не имеют предельных циклов. Одна из неотъемлемых черт всякого генератора колебаний — то, что в нем имеется трение (сопротивление).

Новая глава теории колебаний, создание которой связано с именем А. А. Андропова, еще не разработана в настоящее время столь широко,

¹ Последнему обстоятельству и он сам, и Л. И. Мандельштам придавали существенное значение.

как классические главы теории колебаний, — она родилась всего четверть века тому назад. Однако она уже теперь не уступает линейной теории колебаний по глубине концепций, отчетливости основных физических представлений, степени соответствия математических образов реальным физическим процессам¹.

После того как А. А. Андроновым было выяснено значение для теории колебаний качественной теории дифференциальных уравнений и теории устойчивости Ляпунова, А. А. Андронов занялся применением их к основным нелинейным задачам радиофизики.

А. А. Андроновым совместно с А. А. Виттом была дана теория автоколебаний в мультивибраторе, имеющих резко несинусоидальную форму. В этой теории автоколебания мультивибратора рассматриваются как разрывные (токи меняются скачком) и к ним применяется в сочетании с качественной теорией дифференциальных уравнений «условие скачка», высказанное Э. Фридендером, а также Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси (постулат непрерывности энергии).

С другой стороны, А. А. Андронов показал, что для количественного расчета автоколебаний, близких по своей форме к синусоидальным (колебаний в нелинейных неконсервативных системах, близких к линейным консервативным), может быть применен метод разложения в ряд по степеням малого параметра, разработанный Пуанкаре для исследования периодических решений задачи трех тел в небесной механике. При помощи этого «метода малого параметра» и теории устойчивости Ляпунова А. А. Андронов и А. А. Витт разработали теорию некоторых явлений, перед которыми бессилён «линейный образ мыслей»: захватывание (синхронизация) лампового генератора периодической внешней силой, а также затягивание частоты и ее скачкообразные изменения при плавном изменении настройки сложного лампового генератора (с двумя колебательными контурами).

Еще ранее, применив к приближенным нелинейным уравнениям, полученным ван дер Полем в его теории захватывания, качественную теорию дифференциальных уравнений, А. А. Андронов и А. А. Витт выяснили остававшийся спорным вопрос о том, существует ли «порог

¹А. А. Андронов был противником термина «нелинейная механика», которым иногда обозначают теорию автоколебаний и родственных им явлений. Он часто подчеркивал, что классическая аналитическая механика Лагранжа — Гамильтона является по преимуществу *нелинейной* механикой. Солнечная система — один из главных предметов исследования классической механики — является существенно *нелинейной* системой (силы тяготения зависят нелинейно от расстояний). Отличительной чертой теории автоколебаний по сравнению с классической аналитической механикой является не нелинейность, а нечто совсем другое: классическая аналитическая механика имеет дело преимущественно с *консервативными* системами (отвлекаясь, например, при рассмотрении солнечной системы от приливного трения); теория автоколебаний имеет дело с системами, где *неконсервативность* играет принципиальную роль.

захватывания». Они показали, что захватывание возможно при сколь угодно малой амплитуде внешней силы.

Добавим, что при помощи метода малого параметра, введенного в радиофизику А. А. Андроновым, Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси, разработали теорию открытого ими явления резонанса недовозбужденного лампового генератора под действием внешней э. д. с. частоты, кратной его собственной частоте (резонанс n -го рода).

Наряду с методом малого параметра существуют другие методы приближенного количественного решения задач о колебаниях, близких к синусоидальным, в нелинейных системах. Один из этих методов известен под названием квазилинейного. Он оперирует понятиями, заимствованными из линейной теории (а потому привычными для радиоинженера), видоизменяя их применительно к особенностям нелинейных задач. А. А. Андронova в последние годы несколько беспокоило то, что в вопросе о соотношении между методом малого параметра и квазилинейным методом среди физиков и инженеров укоренились, по его мнению, некоторые недоразумения. А. А. Андронов считал, что необходимо рассеять эти недоразумения. Здесь уместно изложить в нескольких словах его точку зрения.

Пользуясь методом малого параметра, мы представляем искомое периодическое движение в виде ряда по степеням некоторой величины μ («малого параметра»). Первый член этого ряда («нулевое приближение»), которым часто ограничиваются, совпадает с приближенным решением, получаемым при помощи квазилинейного метода. Иногда утверждают: метод малого параметра имеет здесь то преимущество, что он является строгим. Это неверно. Метод малого параметра является «строгим» лишь в том смысле, что при достаточно малых значениях μ ряды, которыми он оперирует, заведомо сходятся. Но нигде не доказано, что эти ряды сходятся для тех значений μ , которые характеризуют реальную систему, колебания которой мы рассчитываем.

Главное значение метода малого параметра А. А. Андронов видел в том, что он связывает естественным образом задачу о приближенном вычислении периодических решений с качественной теорией дифференциальных уравнений, с задачей о рождении предельных циклов (смысл этого термина станет яснее из дальнейшего).

Необходимо заметить для правильного понимания того нового, что внес А. А. Андронов в теорию колебательных явлений, что (как он сам считал) метод малого параметра занимает в его работах (даже если говорить только о их математической стороне) совершенно второстепенное место. Главное из них — применение к исследованию нелинейных колебаний качественной теории дифференциальных уравнений и связанных с ней топологических методов. Возьмем в руки книгу¹, в которой изложе-

¹ А. А. Андронов и С. Э. Хайкин. Теория колебаний. М. — Л., 1937, ОНТИ.



1944 г.

ны некоторые основные идеи А. А. Андропова. Среди страниц, написанных А. А. Андроновым, наиболее характерными являются те, где проводится топологическое исследование интегральных кривых и дается классификация фазовых траекторий грубых систем¹. Заметим попутно, что одной из характерных черт научного творчества А. А. Андропова было стремление к созданию в каждом разрабатываемом им вопросе стройной логической системы с исчерпывающей классификацией всех возможных случаев по семействам, видам, подвидам. В «Теории колебаний» имеются целые страницы рисунков, показывающих различные качественные типы разбиения на траектории (андроновский термин) фазовой плоскости грубой системы, различного типа «сожительства» (тоже андроновский термин) особых точек, предельных циклов и некоторых других характерных кривых (сепаратрис), описывающих поведение системы на фазовой плоскости.

А. А. Андронов не ограничился применением к физике колебаний уже имевшихся математических результатов. Он занялся в связи с задачами теории колебаний дальнейшей разработкой качественной теории дифференциальных уравнений. Он внес в нее некоторые новые идеи и получил ряд существенных математических результатов.

Здесь имеется в виду прежде всего плодотворная физическая и математическая идея А. А. Андропова о грубых системах, разработанная им при участии Л. С. Понтрягина. Грубая система — это такая, качественный характер движений которой не меняется при достаточно малом изменении параметров. Консервативные системы не являются грубыми: колебания идеального маятника без трения являются периодическими (не затухают); но периодичности нет при наличии уже сколь угодно малого трения. Всякий генератор незатухающих колебаний обладает характерными свойствами, которые не сохраняются при консервативной идеализации, но правильно отображаются понятием «грубая система». Например, ламповый генератор генерирует колебания (обладает периодическим движением) в некоторой области значений любого параметра: крутизны лампы, сопротивления контура, напряжений питания. Аналогичным свойством обладает любой двигатель. Периодическое движение двигателя изменяет свой период (количественное изменение), но остается периодическим (не изменяется качественно) при не слишком большом изменении нагрузки. Отсюда ясно, что понятие грубой системы имеет для «земной» механики — и для всей техники — не менее важное значение, чем понятие консервативной системы для механики небесной. Последний пример важен для понимания одной из главных линий развития исследований А. А. Андропова — от теории колебаний в собственном смысле к общей динамике машин.

¹ Этот термин разъяснен дальше.

Другая плодотворная идея, которой А. А. Андронов обогатил качественную теорию дифференциальных уравнений, заключается, грубо говоря, в следующем: наряду с «систематикой» дифференциальных уравнений к ним возможен другой подход — их можно исследовать «исторически» или, если угодно, «эмбриологически». Можно интересоваться изменением, развитием качественной картины интегральных кривых дифференциального уравнения при изменении параметра, входящего в уравнение (не знаю, была ли эта идея навеяна физикой; физически такому подходу соответствует, скажем, исследование изменения режима машины при плавном изменении положения органа управления). При непрерывном изменении параметра изменение картины интегральных кривых происходит не всегда непрерывно: при некоторых значениях параметра происходят качественные изменения, например, появляются или исчезают предельные циклы, сливаются особые точки (состояния равновесия) и т. д. Один из таких случаев — рождение предельного цикла при $\mu > 0$, о котором говорилось в связи с методом малого параметра.

Новый подход часто позволяет делать далеко идущие заключения о заданном дифференциальном уравнении, интегральные кривые которого не поддаются непосредственному исследованию: иногда можно построить более простое уравнение (А), из которого заданное уравнение (В) получается путем изменения параметра; зная «законы развития» картины интегральных кривых и картину интегральных кривых уравнения (А), можно сделать ряд выводов о картине интегральных кривых уравнения (В). В результате разработанного А. А. Андроновым нового подхода к дифференциальным уравнениям им были найдены (в сотрудничестве с Е. А. Леонтович) законы появления, исчезновения, взаимного превращения особых точек, предельных циклов и сепаратрис при изменении параметров. Эти законы имеют непосредственный физический смысл. Они позволили А. А. Андронову дать (в качестве одного из простейших примеров) картину двух типов эволюции фазовой плоскости лампового генератора при изменении параметра, характеризующего обратную связь, — «мягкого» и «жесткого» возникновения колебаний. Здесь не случайно сказано «картина». Андроновская теория генератора просится на кинолентку. Мультипликационный фильм о рождении предельных циклов мог бы быть замечательным учебным пособием.

Математические исследования А. А. Андропова и его школы, посвященные качественной теории дифференциальных уравнений, непрерывно развивались. Существенные результаты были получены в этой области А. Г. Майером. В последние годы А. А. Андронов и его ближайшие сотрудники — математики много работали над созданием монографии, излагающей их работы по качественной теории (эта монография осталась незаконченной). В одной из последних лекций, прочитанных А. А. Андроновым в Горьковском университете, он с увлечением говорил о топо-

логии и высказывал убеждение, что в будущем она обязательно станет частью математического вооружения физиков.

Наряду с радио А. А. Андронов все более интересовался в предвоенные годы другими отраслями техники. Впоследствии эта линия развития привела к фундаментальным достижениям в теории автоматического регулирования, но прежде чем к ним перейти, осветим вкратце другую линию развития, близкую кругу интересов многих физиков.

Физики и радиоинженеры хорошо знают теперь, что такое флюктуации. Они постоянно сталкиваются с флюктуационным порогом чувствительности измерительной и радиоприемной аппаратуры. Гораздо меньше распространено знание того, как проявляются флюктуации в автоколебательных и родственным им системах. До последнего времени в литературе встречалось представление, что в отличие от оптического излучения, принципиально монохроматического, радиоизлучение лампового генератора в принципе является идеально монохроматическим. Как давно разъяснил Л. И. Мандельштам, такое противопоставление неправильно: флюктуации с неизбежностью приводят к размытию частоты автоколебательной системы.

По предложению и под руководством А. А. Андропова И. Л. Берштейном было проведено теоретическое исследование действия флюктуаций на автоколебательную систему. Это исследование позволило, в частности, дать количественную оценку обусловленной флюктуациями относительной ширины линии лампового генератора; это — величина порядка 10^{-18} .

Еще раньше А. А. Андроновым, совместно с Л. С. Понтрягиным и А. А. Виттом, было проведено теоретическое исследование влияния флюктуаций на неконсервативные системы, обладающие несколькими устойчивыми состояниями равновесия. Было вычислено, в частности, математическое ожидание времени спонтанного перехода системы при наличии флюктуаций из одного устойчивого состояния в другое.

Работы в области флюктуаций, начатые под руководством А. А. Андропова, оказали большое влияние на развитие экспериментальных исследований в Физико-техническом институте Горьковского университета. Экспериментальная проверка теоретической оценки ширины линии лампового генератора потребовала, ввиду малости этой величины, создания нового фазометрического метода (И. Л. Берштейн), открывшего ряд неожиданных возможностей в радиофизике и оптике.

Вернемся, однако, к тому, что было в центре научных интересов А. А. Андропова. Он рано оценил огромную роль автоматического регулирования в современной технике и значение автоматики для народного хозяйства СССР. Еще до войны он начал заниматься теорией автоматического регулирования. Эти работы получили большое развитие в последние годы Великой Отечественной войны и в послевоенные годы.

Переход от автоколебаний в радиофизике к автоматическому регулированию был для А. А. Андропова вполне естественным. Система с автома-

тическим регулированием (например, самолет, снабженный автопилотом) обладает характерной склонностью к автоколебаниям (обычно нежелательным). Аналогия между автоколебаниями систем с автоматическим регулированием и автоколебаниями в радиофизике очевидна. Но А. А. Андронов усматривал между теорией автоколебаний и теорией систем с автоматическим регулированием гораздо более глубокое родство. Системы с автоматическим регулированием являются важнейшим (и все более распространенным) классом машин в самом широком понимании этого термина, включающим в себя, в частности, электронные устройства, играющие все возрастающую роль в современной технике. Как уже было сказано, автоколебательная система и двигатель обладают общими физическими свойствами, отображаемыми понятием «грубая система». Эти свойства являются характерными для машин вообще (или по крайней мере для обширного класса машин). С ними связано то, что не только автоколебания, но и простейшее периодическое движение двигателя изображается в фазовом пространстве замкнутой кривой, к которой асимптотически приближаются соседние фазовые траектории. Продумывая вопросы, связанные с автоматическим регулированием, А. А. Андронов все более приходил к убеждению, что теорию автоколебаний следует рассматривать как одну из частей общей динамики машин.

Общая динамика машин в андроновском понимании — это прежде всего (в переводе на математический язык) исследование их фазового пространства, определение областей значений параметров, соответствующих различным типам его разбиения на траектории, классификация машин по характеру этого разбиения. При этом, разумеется, структура фазового пространства, отображающая динамическое поведение машин, существенно зависит от входящих в состав машины систем автоматического регулирования.

Ряд основных задач теории автоматического регулирования являются существенно нелинейными задачами, и притом значительно более трудными, чем нелинейные задачи, которые интересуют в первую очередь радиотехнику. Это связано с двумя обстоятельствами. Во-первых, с тем, что в отличие от простейших ламповых генераторов даже простейшие практически интересные системы автоматического регулирования должны рассматриваться как системы, имеющие больше чем одну степень свободы; следовательно, их теоретическое исследование приводит к рассмотрению не фазовой плоскости, а фазового пространства трех, четырех и т. д. измерений. С ростом числа измерений фазового пространства трудности растут в значительной степени. Во-вторых, с тем, что теория устройств автоматического регулирования чаще, чем радиотехника, имеет дело с автоколебаниями, весьма далекими от синусоидальных. Такие колебания не могут быть исследованы при помощи приближенных методов, оперирующих с синусоидальными колебаниями в качестве нулевого приближения.

Приступая к новым исследованиям, А. А. Андронов всегда проводил мощную «мобилизацию информации». Ему в этом помогала его редкая библиографическая память. А. А. Андронов очень быстро сделался крупнейшим, вероятно, не только в СССР, но и во всем мире специалистом по литературе и истории теории автоматического регулирования. Большое значение для развития работ А. А. Андропова по теории автоматического регулирования имело его знакомство и сотрудничество с И. Н. Вознесенским, выдающимся деятелем техники автоматического регулирования. Исчерпывающее знание литературы помогло А. А. Андронову сосредоточить свои силы на вопросах, имеющих фундаментальное значение для теории автоматического регулирования.

Основная работа А. А. Андропова в этой области (совместно с А. Г. Майером) является прямым продолжением и завершением классической работы Вышнеградского (1876 г.) «О регуляторах прямого действия».

Речь идет о паровой машине с центробежным регулятором. Несмотря на кажущуюся простоту устройства, создание его динамической теории оказалось весьма сложной задачей. Для того чтобы передать существенные черты поведения машины, снабженной центробежным регулятором, необходимо исследовать систему трех дифференциальных уравнений первого порядка, т. е. не фазовую плоскость, как в случае простейшего лампового генератора, а трехмерное фазовое пространство. Из-за сухого трения в муфте регулятора уравнения являются нелинейными. Задача об устойчивости работы машины, снабженной регулятором, была решена Вышнеградским в предположении, что сухое трение в муфте регулятора отсутствует. При таком приближении уравнения движения системы становятся линейными. Трехмерная нелинейная задача, получающаяся при учете сухого трения в муфте, оставалась нерешенной из-за своей большой математической трудности, несмотря на то, что ею занимались Н. Е. Жуковский, Стодола, Грдина, Мизес и многие другие исследователи. Эта задача была решена А. А. Андроновым и А. Г. Майером.

Успех был обеспечен тем, что им удалось разработать мощный математический метод для решения обширного класса нелинейных задач в трехмерном и четырехмерном фазовом пространстве (задач с кусочно-линейными характеристиками): метод преобразования поверхности в поверхность (для трехмерного фазового пространства) и пространства в пространство (для четырехмерного фазового пространства). Этот метод является обобщением метода преобразования прямой в прямую¹, который применил А. А. Андронов в своей ранней работе, приведшей его к открытию связи между автоколебаниями и предельными циклами.

С помощью метода преобразования поверхности в поверхность А. А. Андронов и А. Г. Майер смогли провести для машины с регулятором, об-

¹ А. А. Андронов и С. Э. Хайкин. Теория колебаний. Ч. 1, М.—Л., ОНТИ, 1937, стр. 169.

ладающим сухим трением, исследование поведения интегральных кривых во всем трехмерном фазовом пространстве при всех значениях параметров.

За этим первым большим успехом, достигнутым при помощи метода преобразования поверхности в поверхность, последовал ряд других. В частности, А. А. Андроновым и его учеником Н. Н. Баутиным была решена трехмерная нелинейная задача о движении самолета, снабженного автопилотом. В дальнейшем А. А. Андроновым и его сотрудниками был решен еще ряд трехмерных нелинейных задач теории регулирования. Решение всех только что указанных задач было доведено до численных расчетов границ областей устойчивости при различных значениях параметров — того, что непосредственно интересует инженеров, проектирующих устройства автоматического регулирования.

Принципиальное значение того цикла работ А. А. Андропова и его сотрудников, о котором только что шла речь, заключается в том, что в них впервые была дана без линейной идеализации исчерпывающая картина динамического поведения ряда систем с авторегулированием — при всевозможных положениях органов управления и всевозможных начальных условиях.

Особое место в общей динамике машин должна занять, по мысли А. А. Андропова, теория часов. А. А. Андронов всегда проявлял живой интерес к часам. Когда он начинал свои исследования по автоколебаниям, у него на столе стояла модель часов. Впоследствии А. А. Андронов посвятил много времени изучению истории часов — от догалилеевских часов без маятника до современных электромагнитных часов. При этом выяснилось, что «хотя часы служили предметом многочисленных теоретических исследований, нельзя считать существующую теорию часов и таких, эквивалентных им в динамическом отношении, устройств, как спусковые регуляторы анкерного типа, удовлетворительной. Полностью изучена только модель часов, имеющая одну степень свободы. Однако такая модель, оставляя без рассмотрения процесс взаимодействия между балансиром и ходовым колесом, не может служить для исследования ряда основных вопросов теории часов. Что же касается тех теоретических работ, где принимались во внимание две степени свободы, то они [...] ограничивались приближенным анализом отдельных механических вопросов, поставленных конструкторами, и не рассматривали часы как замкнутую динамическую систему с двумя степенями свободы».

А. А. Андронов начал исследование часов «как замкнутой динамической системы» с модели простейших догалилеевских часов¹. Вскоре по предложению А. А. Андропова исследованием имеющих две степени свободы моделей часов Галилея — Гюйгенса (часов с маятником или балан-

¹ Приведенная выше характеристика состояния теории часов взята из статьи А. А. Андропова и Ю. И. Неймарка, посвященной этой модели. Доклады АН СССР, LI, 17, 1946.

сиром, подверженным действию восстанавливающей силы) занялся Н. Н. Баутин. Он дал, в частности, решение задачи, поставленной в 1944 г. Л. И. Мандельштамом при обсуждении с А. А. Андроновым начатых в Горьком работ по теории часов: было выяснено, какие именно динамические особенности часов Галилея — Гюйгенса обеспечивают стабильность периода автоколебаний. В последние годы Н. Н. Баутину удалось достигнуть новых результатов, имеющих для теории часов, как считал А. А. Андронов, весьма существенное значение. В них впервые общая динамика машин в андроновском понимании вступает в соприкосновение с инженерными задачами часовой техники.

Естественно, что при своем стремлении к всестороннему охвату каждого исследуемого предмета А. А. Андронов интересовался, в связи с общей динамикой машин, также и теорией электрических машин. Знание их фазового пространства необходимо для понимания их поведения в автоматически регулируемых системах. Он изучил обширную литературу, в частности исследования Максвелла и Пуанкаре, посвященные элементарным моделям коллекторных машин, сделался знатоком не только истории, но и предистории электрических машин. А. А. Андронов занялся тщательным анализом исходных предпосылок существующих теорий электрических машин. Здесь он обнаружил большое неблагополучие. Не существует достаточно общих и корректных методов составления уравнений движения униполярных и коллекторных машин. Составление уравнений движения по методу Лагранжа — Максвелла наталкивается здесь на трудности. Они связаны для униполярных машин с наличием контакта, скользящего по поверхности движущегося объемного проводника (возникают вопросы электродинамики движущихся тел), а для коллекторных — с тем, что из-за переключения контуров число степеней свободы является переменным. Вопросом об уравнениях движения униполярных и коллекторных машин занялся под руководством А. А. Андропова его аспирант А. В. Гапонов. Удалось показать, что при некоторых разумных упрощениях коллекторные и униполярные машины принадлежат с общей динамической точки зрения к классу неголономных систем типа Чаплыгина. В дальнейшем были получены общие уравнения движения, годные для любой комбинации коллекторных, бесколлекторных и униполярных машин.

Автоколебания занимали А. А. Андропова не только в связи с техникой. Он давно интересовался астрофизикой и еще будучи аспирантом высказал предположение, что цефеиды (звезды с периодически меняющимся блеском) являются автоколебательными системами. В 1941 г. он предложил одному из своих аспирантов, С. А. Жевакину, заняться теоретическим исследованием механизма колебаний цефеид. Эта работа была прервана войной и возобновлена в 1946 г. Недавно С. А. Жевакиным была предложена теория самовозбуждения колебаний в цефеидах. Интерес А. А. Андропова к астрофизическим вопросам стал еще более активным в связи с развитием радиоастрономии.

В самое последнее время в работах, проводившихся под руководством А. А. Андропова, начало вырисовываться еще одно направление — исследование некоторых типов радиосхем, применяемых в электронных вычислительных машинах (в электронной автоматике). Одна из работ этого направления (Н. А. Железцов и Л. В. Родыгин) является развитием исследования А. А. Андропова и А. А. Витта о мультивибраторе. При идеализации, отбрасывающей «паразитные емкости», автоколебания мультивибратора являются разрывными, происходят «скачки» токов. Вместо того, чтобы постулировать, как это делалось раньше, определенное условие скачка (непрерывность энергии), Н. А. Железцов и Л. В. Родыгин вывели условия скачка из дифференциальных уравнений, написанных с учетом паразитных емкостей. Это позволило указать, что происходит в случаях, когда непрерывность энергии не определяет однозначно ход «скачка» и заставило, кроме того, исправить прежнюю теорию в некоторых существенных пунктах.

Разрабатывая учение о нелинейных колебаниях, А. А. Андронов был далек от недооценки значения линейной теории колебаний как для радиофизики и радиотехники, так и для теории автоматического регулирования. Школою А. А. Андропова был выполнен ряд исследований по линейной теории колебаний и связанным с ней вопросам. Так, например, в 1934 г. в работе А. Г. Майера и Е. А. Леонтович было установлено наименьшее возможное значение произведения расплывчатости сигнала (во времени) и его немонахроматичности. Тем самым была дана точная формулировка имеющего фундаментальное значение для всей теории связи классического аналога соотношения неопределенностей. Когда широко развернулись исследования А. А. Андропова по теории автоматического регулирования, он поставил перед своим аспирантом Ю. И. Неймарком задачу проанализировать с математической точки зрения критерий устойчивости линеаризованных систем, предложенный Найквистом без строгого обоснования. Этот критерий широко применяется при расчете усилителей и систем автоматического регулирования. Под влиянием «эмбриологического» подхода к уравнениям, характерным для школы А. А. Андропова, Ю. И. Неймарк по-новому подошел к вопросу об устойчивости. Он заставил изменяться коэффициенты характеристического уравнения и стал следить за тем, как при этом перемещаются по комплексной плоскости его корни. В результате такого подхода был получен новый, практически важный критерий устойчивости, уже вошедший в ряд учебников.

На этом мы закончим наш далеко не полный обзор научных исследований А. А. Андропова и его учеников. Общеизвестно, что в области учения о нелинейных колебаниях наша страна заняла в мировой науке ведущее место. В этой связи следует отметить, что первыми советскими работами по теории нелинейных колебаний были работы А. А. Андропова 1928—1930 гг.

Главное место в жизни А. А. Андропова наряду с научными исследованиями занимала забота о росте советской науки.

Уже в молодые годы А. А. Андронов стал рассматривать создание подлинных центров науки в провинции, как важнейшую государственную задачу. По собственной инициативе он переехал в 1931 г. из Москвы в Горький для того, чтобы работать в организованном тогда Горьковском физико-техническом институте, а затем и в открывшемся 1 ноября 1931 г. Горьковском университете, профессором которого он оставался до конца жизни. Трудно дать представление о том, сколько энтузиазма, сколько душевных сил отдал А. А. Андронов Горьковскому университету, его Физико-техническому институту, университетской библиотеке. Он создал в Горьковском университете курс теории колебаний, читал курсы электродинамики и теории относительности, организовал преподавание теоретической физики. Яркие, глубоко продуманные лекции А. А. Андропова неизменно вызывали интерес со стороны студенчества. Он неустанно заботился о привлечении новых научных сил, часто входя во все подробности бытового устройства приглашаемых людей. Он неустанно боролся за повышение качества преподавания, за высокие требования при защите диссертаций и представлении к ученым званиям. Ничто в университетской жизни не оставляло его равнодушным. Он следил — и тогда, когда был уже тяжело болен, — за ростом молодых физиков, остро переживал их успехи и неудачи в научной работе и преподавании.

А. А. Андронов принимал также большое участие в научной работе Института автоматики и телемеханики АН СССР. Здесь им проводилась, в частности, работа по анализу классического наследия в теории автоматического регулирования. А. А. Андронов воспитал в Институте автоматики группу ученых, успешно ведущих в настоящее время самостоятельные исследования (М. А. Айзерман, М. В. Мееров, В. В. Петров и др.).

В последние годы А. А. Андронов посвятил значительную часть своего времени историческим изысканиям.

А. А. Андронову принадлежит (совместно с И. Н. Вознесенским) в высшей степени содержательное исследование «О работах Д. К. Максвелла, И. А. Вышнеградского и А. Стодола в области регулирования машин»¹.

По инициативе и под руководством А. А. Андропова в Горьковском областном архиве была проведена большая работа для того, чтобы выяснить, где родился Лобачевский: имевшиеся ранее сведения были противоречивы. А. А. Андронов интересовался в Лобачевском не только гениальный математик, но и университетский деятель, строитель и ректор Казанского университета. Разбор большого числа документов с несомненностью доказал, что Лобачевский родился в Нижнем Новгороде,

¹ Помещено в изданном под редакцией А. А. Андропова и И. Н. Вознесенского в серии «Классики науки» сборнике: Д. К. Максвелл, И. А. Вышнеградский, А. Стодола. Теория автоматического регулирования, Изд-во АН СССР, 1949.

ныне г. Горьком. Было установлено, где находился дом, в котором родился Лобачевский, было добыто много интересных сведений о его семье.

Научные труды и общественная деятельность А. А. Андропова были высоко оценены Коммунистической партией, Советским правительством и нашей научной общественностью. За работы, выполненные в годы Великой Отечественной войны он был награжден в 1944 г. орденом Красной Звезды. В 1946 г. он был избран действительным членом Академии Наук СССР по Отделению технических наук. В 1947 г. А. А. Андронов был избран депутатом Верховного Совета РСФСР от Свердловского избирательного округа г. Горького — округа, где находится Горьковский университет. В 1950 г. А. А. Андронов был избран депутатом Верховного Совета СССР. А. А. Андронов уделял много времени своим депутатским обязанностям, не оставляя без внимания ни одно письмо, ни одно обращение.

Впечатление редкого единства и последовательности развития, создаваемое теми работами А. А. Андропова и его школы, которых мы смогли коснуться, сохраняется и при более полном знакомстве с его научным наследием.

Одной из характерных черт А. А. Андропова как исследователя была целеустремленность. Другой характерной чертой была страстная потребность в полнейшей, абсолютной логической ясности. С ней было связано его стремление при разработке любого научного вопроса к исчерпывающему знанию его истории и всех его связей с другими вопросами, к стройной классификации всех возможных случаев, к применению возможно более общих математических методов. С потребностью Андропова в логической ясности глубоко гармонировала его принципиальность, а также его необычайная требовательность к качеству изложения научных результатов. А. А. Андронов не мог без раздражения читать работы, где неясно, что постулируется, что доказывается, при каких предположениях. «Выясним сначала логическую структуру» — типичное его вступление к обсуждению научного доклада или рукописи. Необходимо добавить, что логика Андропова не была холодной и абстрактной. Достижение логической ясности как-то очень легко, само собой сочеталось у него с возникновением плодотворных понятий, наглядных картин, выразительных терминов.

А. А. Андронов был цельным и жизнерадостным человеком, очень много знавшим и жадно всем интересовавшимся. При всей своей целеустремленности в научных исследованиях он был полной противоположностью тому, что имеют в виду, когда говорят «узкий специалист». Он обладал обширным умом и богатой, разносторонней культурой. В круг его непосредственных научных интересов входили: вся физика, математика, техника, астрономия. Его живейшим образом интересовало все естествознание, медицина, история, литература, живопись. Он был знатоком истории русской культуры. Речь А. А. Андропова была сильной,

остроумной, неотразимой. Прямота его часто доходила до резкости. Вместе с тем он был прост в обращении, отзывчив и чистосердечен. В нем не было эгоизма и неуверенного в себе мелкого самолюбия.

Последние годы А. А. Андропова омрачила одна из тех болезней, с которыми еще не умеет по-настоящему бороться медицина (тяжелая форма гипертонии); 31 октября 1952 г. его не стало.

Многочисленные ученики А. А. Андропова продолжают его исследования по теории колебаний, динамике машин и качественной теории дифференциальных уравнений, развивают дальше его научные идеи и делают их достоянием широкого круга физиков, математиков инженеров.



ОБЗОР ДЕЯТЕЛЬНОСТИ А. А. АНДРОНОВА В ОБЛАСТИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. НАЧАЛО ДЕЯТЕЛЬНОСТИ А. А. АНДРОНОВА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Александр Александрович Андронов начал интересоваться вопросами теории автоматического регулирования в 1936—1939 годах. К этому времени получили известность его работы в области исследования нелинейных колебаний и, в частности, автоколебательных процессов. При изучении автоколебаний А. А. Андронов уделял наибольшее внимание задачам, которые приводят к исследованию нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Такие задачи допускали удобную трактовку на фазовой плоскости и во многих случаях могли быть решены методами припасовывания, либо иными исследованиями на фазовой плоскости. Этот обширный цикл работ А. А. Андропова был завершен выпуском в свет в 1937 г. курса теории колебаний, написанного совместно с С. Э. Хайкиным.

Разработанные методы нашли применение в различных радиотехнических задачах и задачах механики (задачи о ламповом генераторе, о мультивибраторах, о маятнике Фруда — Жуковского и т. д.).

Нетрудно установить, что побудило А. А. Андропова и его ближайшего сотрудника Артемия Григорьевича Майера остановиться на задаче о сухом трении в прямом регулировании как на одном из простейших и вместе с тем интересных примеров нелинейных задач с кусочно-линейной характеристикой. А. А. Андронов — знаток старой литературы, — конечно, еще задолго до этих лет знал эту проблему, вызвавшую в конце прошлого и начале нашего века оживленную научную полемику, охватившую многие научные журналы. Начиная с 1939 г., Александр Александрович совместно с А. Г. Майером уже тщательно изучает обширную журнальную и книжную литературу, связанную с этой задачей, и постепенно увлечение исследованиями в этой области смещает круг его научных интересов в иную и ранее далекую от него область — в область теории автоматического регулирования.

Приступая к работе в новой для него области техники, А. А. Андронов решил познакомиться с наиболее осведомленными специалистами, которые помогли бы ему понять техническую сторону проблемы. С этой целью он предпринял в 1940 г. совместно с А. Г. Майером поездку в Ленинград и Москву. В Ленинграде он впервые познакомился с Иваном Николаевичем Вознесенским, сближение с которым в более позднее время имело значение для дальнейшего направления исследований А. А. Андропова. В Москве он присутствовал на Первой всесоюзной конференции по теории автоматического регулирования и оказался в центре научных кругов, занимавшихся в СССР развитием этой теории. Это дало ему возможность не только собрать материал, который нужен был для решения задачи о влиянии сил сухого трения на процесс прямого регулирования, но и познакомиться со многими другими задачами теории автоматического регулирования, оценить состояние этой науки и наладить личную связь с ее учеными.

2. СОСТОЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ К МОМЕНТУ НАЧАЛА ДЕЯТЕЛЬНОСТИ А. А. АНДРОНОВА В ЭТОЙ ОБЛАСТИ

В 1939—1941 гг. к теории автоматического регулирования было привлечено внимание научной общественности не только вследствие значимости, которую приобрела эта теория, но и в связи с критической статьей, опубликованной в журнале «Большевик»¹. В возникшей по этому поводу дискуссии, продолжавшейся более года, участвовали математики, механики, физики и ученые иных специальностей и, чтобы разобраться в деталях вопроса, бывшего предметом дискуссии, им пришлось познакомиться с другими проблемами теории регулирования; большая часть их, так же как и вопрос, служивший предметом дискуссии, относилась к нелинейным задачам. Однако уже в эти годы все большее и большее внимание стали привлекать также и нелинейные задачи. Это нашло свое отражение и в докладах на Первой всесоюзной конференции, которые прослушал А. А. Андронов.

Нелинейные задачи в теории регулирования выдвигались практикой независимо одна от другой. Так, например, изучалось влияние сухого трения на процесс регулирования, изучались регуляторы с сервомоторами постоянной скорости, вибрационные регуляторы и т. д.; исследования, которые появлялись в этой области, были случайными и, вообще говоря, не связанными с общей теорией автоколебаний. Можно отметить, что среди большого числа не имеющих значения или даже ошибочных

¹ «Большевик», № 9, 1941.

работ иногда появлялись работы исключительные, далеко опережавшие свое время, но они оставались незамеченными.

В отдельных работах проскальзывали указания на автоколебательный характер незатухающих колебаний, возникающих в автоматических регуляторах (например, работа Никольского, 1934). Однако они не встречали должного внимания.

Обширная литература с единым направлением существовала лишь по исследованиям о влиянии сухого трения на процесс регулирования. Эта серия работ не могла пройти незамеченной. Среди ученых, получивших результаты в этой области, были Жуковский, Мизес, Стодола, Грдина и др.; однако методы, разработанные этими учеными, к решению других нелинейных задач не применялись. Попытки разработать общий метод решения нелинейных задач автоматического регулирования делались только на основе разложений по малому параметру.

Для дальнейшего развития теории автоматического регулирования было весьма важно обобщить в этой области, казалось бы, различные нелинейные задачи; выяснить место таких задач среди многочисленных иных нелинейных задач теории колебаний; перенести методы теории колебаний в теорию автоматического регулирования. Такое направление в области теории регулирования и возглавил А. А. Андронов.

3. КРАТКИЙ ОБЗОР РАБОТ А. А. АНДРОНОВА В ОБЛАСТИ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Работа А. А. Андропова в области теории автоматического регулирования протекала в различных областях. Многочисленные нелинейные задачи, решенные А. А. Андроновым совместно с учениками и сотрудниками, могут быть разбиты на две большие группы: влияние сил сухого трения на процесс прямого и непрямого регулирования и влияние нелинейных характеристик сервомоторов на протекание процесса регулирования.

При исследовании этих задач были, с одной стороны, разработаны методы изучения структуры фазового пространства при кусочно-линейных характеристиках, с другой, — значительно развиты представления о топологических структурах трехмерных пространств. Частные задачи, которые при этом рассматривались, были решены с предельной полнотой.

Второе направление, которое было в центре научных интересов А. А. Андропова в области теории автоматического регулирования, связано с развитием линейных методов этой теории. Здесь должна быть отмечена работа А. А. Андропова и А. Г. Майера по исследованию влияния запаздывания на колебания динамической системы. Следует заметить, что А. А. Андронов сам непосредственно мало занимался линейными задачами, однако его руководство большой группой сотрудников и учеников, работавших в этой области, имело существенное значение для развития линейных методов, главным образом частотных.

Получившие широкое распространение методы построения областей устойчивости в плоскости одного комплексного или двух действительных параметров были разработаны Ю. И. Неймарком также под руководством А. А. Андропова.

Свои исследования в теории автоматического регулирования А. А. Андронов начал с необычайно тщательного изучения литературы. В результате этой большой работы А. А. Андронов совместно с И. Н. Вознесенским решил издать классические исследования по теории автоматического регулирования. Преждевременная смерть И. Н. Вознесенского и ряд других обстоятельств задержали эту работу. При жизни А. А. Андропова вышел в свет лишь первый том, посвященный работам Максвелла, Вышнеградского и Стодола, снабженный обстоятельными комментариями и примечаниями, принадлежащими главным образом А. А. Андронову. Издание этой книги было большим событием и заслуживает особого рассмотрения.

Влияние А. А. Андропова распространилось далеко за пределы Горьковского университета и Института автоматики и телемеханики Академии Наук СССР, где он возглавлял свою школу в теории автоматического регулирования; его руководство чувствовали и многочисленные молодые ученые, группировавшиеся около журнала «Автоматика и телемеханика», в котором А. А. Андронов руководил отделом автоматического регулирования.

4. ЗАДАЧА О СУХОМ ТРЕНИИ В РЕГУЛЯТОРАХ ПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ

Задача о влиянии сил сухого трения на процесс прямого регулирования возникла впервые именно в связи с «ошибкой» И. А. Вышнеградского, о которой будет сказано ниже.

И. А. Вышнеградский при исследовании регулятора преднамеренно пренебрег учетом сил сухого трения, так как считал, что при высококачественном регулировании, во избежание появления зоны нечувствительности, устойчивость должна обеспечиваться трением вязким, а не сухим. Он сформулировал результат своей работы в форме нескольких тезисов, из которых один, а именно тезис о необходимости вязкого трения для обеспечения устойчивости, встретил возражения еще при его жизни. После его смерти критика усилилась. Указывалось, что сухое трение может обеспечить устойчивость так же, как и вязкое; делались высказывания, что И. А. Вышнеградский не преднамеренно пренебрег сухим трением, а упустил его ошибочно в результате неправильного дифференцирования, и пытались эту мнимую «ошибку» Вышнеградского исправить при помощи учета влияния сил сухого трения. Однако первые же попытки показали, что решение этой задачи много труднее, чем решение задачи при учете только вязкого трения; уравнения движения,

описывающие процесс, при учете сухого трения приходится интегрировать численно или подыскивать графические или графоаналитические приемы построения решения.

Первые попытки численного интегрирования этих уравнений возникли сразу же после появления работы Вышнеградского, но наиболее полные результаты в этом направлении после почти десятилетних вычислений были получены профессором Днепропетровского горного института О. О. Рехиром лишь в 20-х годах.

Графические или графоаналитические способы решения этой задачи указывались различными исследователями.

Здесь надлежит указать работы Лекорню, Грдина, Мизеса и Жуковского. В работе Жуковского способ Лекорню приобрел особенную строгость и полноту. Кроме того, Жуковский предложил оценку для границ начального отклонения, после которого процесс регулирования сходится, т. е., по терминологии А. А. Андропова, предложил способ выделения области, лежащей внутри области устойчивости регулируемого равновесия.

Однако графоаналитические приемы исследований, вообще говоря, не приводят к созданию общего метода.

Задача о влиянии сухого трения на процесс регулирования была исчерпывающе решена А. А. Андроновым и А. Г. Майером. После их работы задача эта стала такой же типичной задачей для трехмерного фазового пространства, какой была задача о ламповом генераторе с z -образной характеристикой для фазовой плоскости.

При разработке общих методов решения этой задачи А. А. Андронов и А. Г. Майер столкнулись с двумя трудностями. Прежде всего было необходимо доказать, что система, устойчивая при отсутствии сухого трения, сохраняет устойчивость, и притом по отношению к любому начальному отклонению, при учете сухого трения любой величины. Доказательство этого утверждения методом припасовывания было бы неизбежно громоздким и узко специальным. А. А. Андронов и А. Г. Майер избежали возникающих отсюда затруднений применением второго метода Ляпунова. Они строят функции Ляпунова из кусков разных поверхностей и проводят доказательство устойчивости при помощи простых геометрических рассуждений, непосредственно связанных с фазовым пространством.

При изучении влияния сухого трения на систему, которая без сухого трения неустойчива, возникло затруднение другого рода. При интегрировании линейного уравнения в пределах одного размаха время движения определяется из трансцендентного уравнения. Если речь идет об определении лишь периодических движений, то задача сводится к нахождению корней трансцендентного уравнения, что требует хотя и громоздких, но доводимых до конца вычислений. Но если изучать условия сходимости процессов и притом не для одного начального отклонения,

а для целых областей начальных отклонений, то вычислительные трудности быстро растут и получение общих выводов оказывается практически невозможным.

Эти затруднения были преодолены привлечением теории точечного преобразования поверхностей, раньше не применявшейся для решения нелинейных задач теории колебаний. Оказалось, что указанные выше трансцендентные уравнения можно рассматривать как параметрические зависимости, определяющие точечные преобразования поверхностей в самих себя; при этом изучение особых точек этих преобразований позволяет выяснить топологическую структуру всего фазового пространства в целом.

Таким образом, вместо исследования движений изображающей точки вдоль отдельной фазовой траектории оказалось возможным одновременно изучить движение континуума точек по всей совокупности траекторий, и это обобщение не усложнило задачу, а, наоборот, сделало ее более простой и обозримой, а топологическую структуру фазового пространства в задаче Вышнеградского — ясной. В результате было построено разбиение пространства параметров на области, соответствующие одинаковым фазовым портретам, и были оценены не только периодические решения (неустойчивый предельный цикл), но и области устойчивости «в большом» в смысле гипотезы Жуковского, т. е. при ограничении начальных условий такими, которые приводят к движениям, обеспечивающим равные нулю ускорения, начиная со второго размаха.

Работа А. А. Андропова и А. Г. Майера нашла приложение в многочисленных расчетах, связанных не только с регуляторами центробежными, но и с иными регуляторами прямого действия.

Среди работ, развивших и продолживших эти исследования, следует указать диссертацию А. А. Таля, выполненную им в МВТУ и содержащую распространение результатов А. А. Андропова и А. Г. Майера на область прямого регулирования с воздействием по производным в случае, когда объект обладает как положительным, так и отрицательным самовыравниванием. Если иметь в виду не классическую задачу Вышнеградского, а всю совокупность случаев, встречающихся в современной практике, то эта работа в известном смысле завершала задачу о влиянии сухого трения на процесс прямого регулирования; при выполнении ее А. А. Андронов и А. Г. Майер немало помогли автору советами.

Необычайно требовательный к своим работам, А. А. Андронов до конца жизни не был вполне удовлетворен некоторыми деталями своего исследования. В результате, при жизни автора были опубликованы лишь небольшие заметки в «Докладах Академии Наук СССР», а первая часть исследования — в журнале «Автоматика и телемеханика». Вторая часть исследования была опубликована в 1953 г. после смерти А. А. Андропова.

5. ЗАДАЧА О СУХОМ ТРЕНИИ В РЕГУЛЯТОРАХ НЕПРЯМОГО ДЕЙСТВИЯ И ПРИМЫКАЮЩИЕ К НЕЙ ДВУХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Успешное решение А. А. Андроном и А. Г. Майером задачи о влиянии сухого трения на процесс прямого регулирования создало аппарат для решения разнообразных задач, приводящихся к нелинейным дифференциальным уравнениям второго и третьего порядка с кусочно-линейными характеристиками. Естественно, что внимание А. А. Андропова привлекли другие задачи о влиянии сил сухого трения на процесс автоматического регулирования. К этому времени по вопросу о влиянии сухого трения на процесс непрямого регулирования образовалась обширная литература. Попытки решения этой замечательной во многих отношениях задачи были начаты работой Леоте, который в 1885 г. рассмотрел задачу о процессе регулирования в системе, описываемой уравнениями второго порядка и содержащей одновременно две нелинейности. Одна из нелинейностей и была — сухое трение в чувствительном элементе регулятора.

В отличие от работ Преля и его последователей, применявших для решения нелинейных задач с кусочно-линейными характеристиками методы интегрирования уравнений по размахам и построение процессов во времени (осциллограмм процессов), Леоте впервые использовал фазовый портрет системы для изучения характера возможных в системе движений и еще до Пуанкаре показал типичную картину фазового портрета, содержащего предельный цикл¹.

Непосредственно после исследований Леоте появилось посвященное этой же задаче большое исследование польского математика Гуковского, оставшееся малоизвестным и, повидимому, впервые обнаруженное А. А. Андроновым. Работами Леоте и Гуковского была доказана эффективность применения фазовых портретов для изучения движений в системах непрямого регулирования при наличии сухого трения. Однако эти работы были вскоре забыты, и, начиная с конца прошлого века, появляется ряд работ Пфара, Баурсфельда, Будау, Толле, Синжа, Хазена, Опельта, Бильхарца и других авторов, в которых ясные фазовые представления, содержащиеся в работах Леоте и Гуковского, не привлекались, а применялись численные или графические приемы интегрирования, которые не приводили к обобщениям; многие из этих работ, как показал А. А. Андроном, были ошибочными.

В 1941 г. автором этих строк была сделана попытка рассмотреть вопрос о влиянии сил сухого трения на процесс регулирования на фазовой

¹ Ознакомившись с работой Леоте, А. А. Андроном высказал предположение, что именно эта работа навела Пуанкаре на мысль о целесообразности качественных исследований дифференциальных уравнений с использованием фазовой плоскости и об изучении предельных циклов.

плоскости, однако им также были допущены ошибки как в составлении исходных уравнений, так и в их трактовке, обнаруженные А. А. Андроновым.

В результате, к моменту, когда А. А. Андронов занялся рассмотрением этой задачи, накопилось большое число ошибочных работ, затемнивших исследование Лесте — Гуковского.

А. А. Андронов совместно с Н. Н. Баутиным и Г. С. Гореликом обстоятельно рассмотрел две задачи, касающиеся схем непрямого регулирования при учете сухого трения.

Первая задача связана с одновременным учетом характеристики сухого трения в чувствительном элементе и нелинейной характеристики сервомотора постоянной скорости при учете мертвого хода золотника. Задача эта несколько напоминает по постановке задачу, которую рассматривал Лесте. Однако эту задачу А. А. Андронов вполне строго мог рассмотреть во всех подробностях при помощи теории точечного преобразования поверхностей. Большой интерес представляло рассмотрение своеобразного вырождения трехмерного фазового пространства, составленного из двух полуплоскостей так, что фазовые траектории состоят из кусков, лежащих в этих плоскостях, и из кусков, соединяющих плоскости между собой.

Исследование точечных преобразований показало, что характер движений (тип фазового портрета) зависит от значения только двух введенных в работу параметров, которые А. А. Андронов назвал существенными. Полуплоскость этих двух параметров (один из них имеет только положительное значение) была разбита на области, соответствующие одинаковым фазовым портретам. При этом было обнаружено, в отличие от системы прямого регулирования, где сила трения является фактором, стабилизирующим процесс, что в системах непрямого регулирования сила трения является одним из факторов, нарушающих устойчивость и вызывающих генерацию колебаний. При этом при наличии самовыравнивания регулируемого объекта за счет силы трения колебания генерируются жестко, т. е. возникают сразу два цикла. В случае объекта, имеющего отрицательное самовыравнивание, колебания за счет сухого трения генерируются мягко. Исследования были доведены А. А. Андроновым и его соавторами до построения диаграммы, которую они назвали диаграммой Мизеса, определяющей размеры неустойчивого предельного цикла в зависимости от значения упомянутых выше двух существенных параметров. При исследовании этой же задачи в случае сервомотора постоянной скорости с мертвой зоной фазовое пространство также состоит из двух полуплоскостей и заключенной между ними части трехмерного пространства. Пространство параметров в этом случае сложнее, так что приходится для его полного рассмотрения изучать сечение пространства параметров различными плоскостями.

Исследование сечений дает полное представление о расположении областей, соответствующих различным типам фазовых портретов, и таким

образом исчерпывает задачу. Результаты исследования при этом показывают ошибочность результатов, к которым пришел Толле и которые приведены в различных курсах.

К этому исследованию примыкает работа А. А. Андропова и Н. Н. Баутина, связанная с изучением того вырожденного случая общей задачи прямого регулирования, когда можно считать регулятор безинерционным, но учитывать сухое трение в нем, а также, когда необходимо учитывать наличие дополнительного инерционного (однородного) звена между регулятором и объектом. В такой постановке задача, хотя и связанная с прямым регулированием, не описывается уравнениями второго порядка, а трактуется примерно так же, как упомянутая выше задача о трении в непрямом регулировании.

Эта маленькая заметка явилась своеобразным мостом, по которому А. А. Андронов перешел от классической и хорошо изученной им задачи Вышнеградского к задаче о влиянии сил сухого трения на процесс непрямого регулирования.

6. ЗАДАЧИ О ВЛИЯНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕРВОМОТОРА НА ПРОЦЕСС РЕГУЛИРОВАНИЯ

Задачи с учетом влияния сухого трения представляют собой лишь один вид нелинейных задач, с которыми приходится иметь дело в теории регулирования. Столь же часто встречаются задачи, в которые нелинейность вносится характеристикой сервомотора, так как приходится учитывать наличие мертвого хода командного устройства и наличие насыщений (горизонтальные участки характеристик). Задачи об учете таких нелинейностей интересовали А. А. Андропова в военные годы, и, естественно, что в это время внимание его было приковано к тем системам автоматики, которые относились к различным областям военной, прежде всего авиационной техники. Из многочисленных областей регулирования, где встречаются нелинейные сервомоторы, А. А. Андронов выбрал область, связанную с теорией автопилотов и автоматов винтов изменяемого шага.

В ряде работ А. А. Андронов совместно с соавторами на конкретных примерах строит общую теорию влияния нелинейной характеристики сервомотора на процесс непрямого регулирования одномерного объекта либо объекта, описываемого уравнениями второго порядка. Во всех случаях задача решается методом точечного преобразования поверхностей. Рассматривается либо двумерная плоскость, либо вырожденное пространство, составленное из нескольких кусков плоскостей. Как всегда, задача доводится до построения разбиения пространства параметров на области, соответствующие однолинейным фазовым портретам, и в некоторых случаях дается полная картина фазового пространства «в большом», включая расположение сепаратрис и бесконечно-удаленных особых точек.

Наиболее характерна в этом отношении работа 1944 г., посвященная теории движения нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и работа 1945 г., связанная с изучением автоколебаний одной системы, содержащей автоматический винт изменяемого шага. Эта последняя работа отличается исключительной ясностью изложения и служила многим в качестве отправной работы для изучения самого метода применения теории точечного преобразования поверхностей к задачам регулирования.

Примерно в эти же годы близкие по постановке и характеру задачи рассматривались другими авторами приближенными методами (методом Пуанкаре и т. д.), и это позволило сопоставить результаты точного и приближенного исследований для уточнения возможностей и областей применения приближенных методов.

7. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

А. А. Андроновым опубликована только одна работа, в которой рассматривается линейная задача — исследование влияния запаздывания на колебания системы с одной степенью свободы, выполненное им совместно с Майером еще до войны. Однако она была напечатана в журнале «Автоматика и телемеханика» позднее, когда вопрос о влиянии запаздывания привлек внимание специалистов в области теории автоматического регулирования.

В этой работе показано, что с ростом запаздывания состояния устойчивости и неустойчивости при некоторых условиях могут чередоваться. Этот факт был значительно позже обнаружен частотными методами.

Занимаясь теорией нелинейных задач, А. А. Андронов привлекал внимание ряда своих учеников и сотрудников к линейным задачам. Здесь следует отметить работы Ю. И. Неймарка по построению областей устойчивости для линейных систем и, в частности, разработанный им под руководством А. А. Андропова способ D-разбиения пространства характеристического уравнения, и ряд других диссертаций (например, М. В. Меерова, Я. Н. Николаева др.), выполненных также под руководством А. А. Андропова.

Однако еще более существенно было влияние А. А. Андропова на развитие в теории регулирования частотных методов. Следует напомнить, что работа А. В. Михайлова, в которой впервые рассматривались эти методы, не была понята в момент ее появления (1938 г.). Это обстоятельство легко объяснить: инженеры, занимавшиеся регулированием в те годы, были далеки от задач радиотехники, и методы, порожденные этими задачами, были, естественно, им чужды. Понадобилась исключительная разносторонность А. А. Андропова, его редкая прозорливость, чтобы в раскритикованной работе (в значительной степени позабытой)

увидеть начало целого направления в науке и своим авторитетом и знаниями содействовать расцвету этого направления.

А. А. Андронов понимал, однако, что для развития теории автоматического регулирования имеют значение разнообразные методы. В связи с этим, поддерживая и поощряя работы в области частотных методов, он немало содействовал появлению работ, в которых решение аналогичных линейных задач основывается на изучении распределения корней характеристического уравнения или на разного рода интегральных оценках. Последнему направлению он придавал особое значение, так как видел возможность применения интегральных оценок и к нелинейным системам.

8. РАБОТЫ А. А. АНДРОНОВА ПО ИСТОРИИ ТЕОРИИ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В 1944 г. А. А. Андронов и И. Н. Вознесенский решили издать классические работы в области теории автоматического регулирования.

Намечалось издать четыре сборника классических работ. Первый сборник должен был быть посвящен работам, положившим начало линеаризованной теории регулирования; второй — основоположным работам, связанным с нелинейными задачами теории регулирования; третий сборник предполагалось посвятить задачам прерывистого регулирования, регулирования на отсечку и иным смежным задачам, посвященным, по существу, технике импульсного регулирования; намечался также выпуск четвертого сборника, составленного из компилятивных курсов, сыгравших выдающуюся роль в пропаганде научных знаний в области теории автоматического регулирования.

Хотя беседы А. А. Андропова и И. Н. Вознесенского касались всех этих четырех сборников и подготавливались они почти одновременно, основное внимание уделялось, разумеется, первому сборнику. Его решение было издать в серии «Классики науки», которую издавала Академия Наук СССР под общей редакцией своего президента — академика С. И. Вавилова.

Работе над этим первым сборником А. А. Андронов отдался полностью и выполнил ее со всей свойственной ему тщательностью. Неожиданная смерть И. Н. Вознесенского лишила А. А. Андропова товарища по работе, с которым она была задумана и чьи знания и помощь были ему весьма необходимы, так как в отличие от А. А. Андропова, начавшего заниматься теорией регулирования лишь перед войной, И. Н. Вознесенский работал в этой области в течение всей своей жизни. После смерти И. Н. Вознесенского на А. А. Андропова легла ответственность за это издание. Вопросы, которые возникали в связи с подготовкой его, кажутся теперь почти очевидными, настолько убедительно они были решены А. А. Андроновым; однако в то время они были весьма неясными и спорными.

В иностранной литературе в качестве основоположников теории регулирования указываются известный английский астроном Эри, знаменитый физик Максвелл и немецкий ученый Толле, по книгам которого изучали теорию регулирования несколько поколений инженеров во всех европейских странах. В Англии и Америке в качестве основоположника теории регулирования указывают иногда имя Тринкса, книги которого сыграли для стран, говорящих на английском языке, примерно такую же роль, какую для европейских стран сыграла книга Толле. В русской литературе, да и в ряде иностранных изданий, указывалось на выдающееся значение работ Вышнеградского. Однако стало почти традицией одновременно отмечать наличие в работах Вышнеградского существенных ошибок, будто бы допущенных Вышнеградским в ходе математических исследований. При этом нередко отмечалось, что эти «ошибки» в большей или меньшей степени обесценивали работу нашего соотечественника. Такого рода высказывания о Вышнеградском можно найти даже у Кирпичева и Жуковского.

Изучив работы Эри, А. А. Андронов считал, что они касались узко специальных регуляторов (точнее модераторов), применяемых в астрономических приборах для обеспечения слежения астрономических труб за перемещающимися объектами звездного неба, и что работы эти не привели к каким-либо научным результатам, которые оставили бы заметный след в общей теории регулирования. А. А. Андронов усмотрел заслугу Эри в том, что он, повидимому, впервые применил гидравлический демпфер для стабилизации процесса регулирования. Однако работы Эри не могли быть применены для каких-либо инженерных расчетов. Поэтому А. А. Андронов не поместил работы Эри в подготовляемый сборник, а лишь коротко упоминает о них, комментируя исследования Максвелла.

Подготавливая для этого же издания биографию Максвелла, А. А. Андронов подробно изучил историю возникновения работы Максвелла, которая была связана с исследованием регулятора Дженкина для лабораторных электрических приборов. Это наложило своеобразный отпечаток на исследования Максвелла, так как в случае регулятора Дженкина перемещение деталей регулятора существенно меняло момент инерции регулируемого объекта и сам этот объект имел заметное самовыравнивание. В итоге, результаты исследования Максвелла оказались непригодными для обычных промышленных регуляторов, у которых перемещения регулятора не могли влиять на момент инерции машин, обладающих обычно большими маховиками, а сами регулируемые машины того времени практически не обладали самовыравниванием. Несмотря на это, математическая сторона исследований Максвелла, как показало изучение этой работы, проведенное А. А. Андроновым, имела большое значение для дальнейшего развития теории автоматического регулирования. Максвелл впервые получил дифференциальное уравнение

процесса регулирования и свел задачу об устойчивости процесса к исследованию распределения корней характеристического уравнения. В этой работе им была по существу сформулирована задача об определении условий, необходимых и достаточных для того, чтобы все корни характеристического уравнения лежали слева от мнимой оси.

В последующем это исследование Максвелла привело к появлению работ Рауза, Гурвица и других алгебраических исследований, продолжающихся до наших дней.

А. А. Андронов открывает сборник этой классической, по его мнению, работой Максвелла, однако он отмечает, что в этой работе не содержится основ прикладной теории регулирования, для создания которых необходим анализ технических задач, который можно впервые найти в работах И. А. Вышнеградского.

Действительно, И. А. Вышнеградский исходил из технических задач, наиболее интересующих практику того времени, разработал методы исследования этих задач, широко применявшиеся в последующие годы, и получил результаты, имевшие значение не только для создания теории автоматического регулирования, но и для развития техники регулирования. А. А. Андронов обосновал это непосредственным анализом работ Вышнеградского. При этом тщательное изучение первоначальных текстов привело А. А. Андронова к заключению, что обвинения Вышнеградского в ошибках, допущенных им, основаны на недоразумении.

А. А. Андронов установил, что якобы ошибочный учет сил трения был связан с сознательно выбранной Вышнеградским идеализацией задачи, а не с какой-либо ошибкой, допущенной в процессе преобразования уравнений. Тщательное сопоставление высказываний различных авторов по поводу «ошибки» Вышнеградского позволило обнаружить, что первоначальный намек на наличие этой «ошибки» содержался в работах Лекорню, а затем этот намек был развит многочисленными последователями Лекорню, а также Гречаниновым — автором, выпустившим книгу по теории регулирования, сильно запутавшую вопрос. Постепенно намеки превратились в прямое обвинение в математической ошибке, принимавшееся на веру без должной проверки и сохранившееся до опубликования исторических изысканий А. А. Андронова. Эти изыскания привели не только к реабилитации научного имени Вышнеградского, но вскрыли и другие его забытые научные достижения.

Работы Вышнеградского были опубликованы полным текстом на трех языках и, кроме того, по ним было сделано краткое сообщение в «Докладах Парижской Академии Наук».

Подробно изучая работы Вышнеградского, А. А. Андронов обратил внимание на то, что в немецком тексте работы содержится дополнительный параграф, который в русский текст работы не был включен. Эта часть работы, оставшаяся, по видимому, незамеченной или по крайней мере давно забытой, оказалась посвященной условиям монотонности

переходных процессов. Выяснилось, что в этом тонком вопросе Вышнеградский значительно опередил свое время, понимая, что условия монотонности не эквивалентны условиям аперiodичности, т. е. наличию у характеристического уравнения только действительных корней.

Неясность в этом вопросе существовала до самых последних лет, и была устранена до конца лишь после того, как А. А. Андронов опубликовал эти забытые отрывки из работ Вышнеградского.

Изучая книги Толле, Тринкса и другие аналогичные книги и курсы, А. А. Андронов выявил их компилятивный характер и установил, что значение их состоит лишь в пропаганде научных достижений своего времени. Он отверг всякую мысль о возможности рассматривать эти книги как классические, основоположные работы.

После Вышнеградского в качестве его непосредственного продолжателя А. А. Андронов указывает имя Ауреля Стодола, чьи работы до этого были известны лишь узкому кругу турбостроителей. А. А. Андронов выяснил, что именно А. Стодола, выдающийся словацкий инженер, профессор Цюрихского университета, развил работы Вышнеградского, посвященные частным задачам прямого регулирования, разработал общий метод исследования регулируемых систем и распространил, таким образом, линеаризованную теорию на всю область непрямого регулирования.

Все изложенные доводы А. А. Андропова основаны на богатейшем фактическом материале, и после выхода в свет тома, посвященного классикам теории регулирования, снабженного обстоятельными комментариями и примечаниями А. А. Андропова, линия Максвелл — Вышнеградский — Стодола, прочерченная А. А. Андроновым, стала основной в истории развития теории регулирования.

СПИСОК РАБОТ А. А. АНДРОНОВА С АННОТАЦИЯМИ¹

А. Работы по общей теории колебаний и по теории дифференциальных уравнений

1. *О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами* (совместно с М. Леонтовичем). Журнал Русского физико-химического общества (часть физическая), т. 59, стр. 429—442, 1927.

В этой работе в связи с рядом задач теории колебаний исследуются свойства решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\ddot{y} + (1 - b \cos pt) y = 0$$

$$\ddot{y} + 2fy + (1 + q \cos pt) y = 0$$

и вводится оказавшееся плодотворным понятие о «параметрическом» резонансе.

¹ Этот список работ и аннотации на них были составлены А. А. Андроновым в 1948 г. В список включено 37 работ. В конце приводится дополнительно 11 статей и заметок, не включенных А. А. Андроновым в список.

В частности, статья содержит вывод асимптотических выражений решений рассматриваемых дифференциальных уравнений, справедливых при достаточно малой частоте модуляции. Эти асимптотические выражения были потом использованы как в работе № 17 настоящего списка, так и в работах других авторов.

2. *Пределные циклы Пуанкаре и теория колебаний. Доклады VI съезда русских физиков*, стр. 23—24, 1927.

Заметка содержит сжатое изложение заключительной аспирантской работы того же названия (неопубликованной). Здесь впервые вводится оказавшееся плодотворным понятие об «автоколебаниях» и показывается путем сопоставления физических признаков автоколебаний (независимости периода и величины размахов от начальных условий) с результатами качественной теории дифференциальных уравнений Пуанкаре, что автоколебания (для систем с одной степенью свободы) всегда соответствуют предельным циклам Пуанкаре. Заметка также содержит указания, как понятия, связанные с качественной теорией дифференциальных уравнений, позволяют дать адекватную трактовку явлениям самовозбуждения, срыва и устойчивости автоколебаний.

3. *Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillations auto-entretenuës. Comptes Rendus, Paris, t. 189, p. 559, 1929.*

Заметка содержит изложение результатов заключительной аспирантской работы (см. № 2) с рядом существенных дополнений.

Во-первых, в заметке сформулированы следующие два требования, касающиеся устойчивости автоколебаний: 1) в реальных физических системах автоколебания должны сохраняться при достаточно малых изменениях самих систем (физическое требование «грубости» периодических движений, представляющих автоколебания); 2) движение, представляющее реальный автоколебательный процесс, должно быть устойчиво по отношению к изменению начальных условий (требование устойчивости по Ляпунову периодических движений). На основе этих двух требований дается новое доказательство утверждения, что всякий автоколебательный процесс в системе с одной степенью свободы должен соответствовать на языке дифференциальных уравнений предельному циклу Пуанкаре. Требование «грубости» получило в дальнейшем (см. № 10 настоящего списка работ) общую математическую формулировку и было использовано в теории дифференциальных уравнений. Требование устойчивости по Ляпунову поставило на службу теории автоколебаний аппарат исследований устойчивости периодических движений, разработанный Ляпуновым и оставшийся практически без употребления. Во-вторых, в заметке рассматриваются при помощи количественного метода Пуанкаре (так называемого метода малого параметра, изложенного в *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*) автоколебания в системах с одной степенью свободы, близкой к линейной консервативной.

Результаты, сжато изложенные в № 2 и 3, дали теории автоколебаний прочную математическую базу и послужили исходным пунктом длинного ряда других работ.

4. *Sur la théorie mathématique des auto-oscillations. Comptes Rendus, Paris, t. 190, № 1—3, p. 256, 1930.*

Заметка разбивается на две части. В первой части делается попытка установить связь между автоколебаниями в системах со многими степенями свободы и рекуррентными движениями Биркгофа. Во второй части на основе количественных методов Пуанкаре и на основе теории устойчивости Ляпунова дается общая теория периодических автоколебаний в системах с двумя степенями свободы, близких к линейным консервативным системам, обладающим двумя различными нормальными частотами.

Результаты, изложенные в этой заметке, легли в основу строгой теории затягивания (см. № 22 настоящего списка работ), а также были использованы и развиты в работах других авторов (в частности, в работах С. М. Рытова).

5. *Sur les mouvements quasi-périodiques* (совместно с А. А. Виттом). *Журнал прикладной физики*, т. IV, вып. 1, стр. 119, 1930.

Работа содержит доказательство наличия произвольных фаз у квазипериодических движений как в случае общей автономной системы, так и в случае системы, периодически зависящей от времени. В частности, в работе устанавливается максимально возможное число независимых периодов для квазипериодических движений в системе, определяемой дифференциальными уравнениями первого порядка отдельно для автономного и неавтономного случая. Результаты этой работы были впоследствии обобщены на почти периодические движения общего типа Л. С. Понтрягиным.

6. *Об устойчивости по Ляпунову* (совместно с А. А. Виттом). Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. III, стр. 373, 1933.

6а. *Zur Stabilität nach Liapunow* (совместно с А. А. Виттом). *Physikalische Zeitschrift der Sowietunion*, Bd. 4, S. 606, 1933.

В работе дано простое геометрическое доказательство теоремы: «Если в автономной системе, описываемой дифференциальными уравнениями первого порядка, характеристический показатель рассматриваемого периодического решения имеет отрицательные действительные части, то рассматриваемое решение устойчиво в смысле Ляпунова».

Эта теорема весьма существенна для приложения теории Ляпунова к автономным системам. Именно эта теорема позволяет сразу сформулировать условия устойчивости автоколебательного периодического процесса. Впоследствии эта теорема рядом авторов была доказана аналитически (Артемьев, Отроков) и обобщена (Малкин).

7. *Математические проблемы теории автоколебаний*. Сборник № 1 Конференции по колебаниям. М.—Л., стр. 32—71, 1933, Гос. техн. теор. изд.

Работа представляет собой обзорный доклад, посвященный изложению ряда новых научных результатов, полученных в 1928—1931 гг. в теории нелинейных колебаний, анализ ряда новых понятий теории нелинейных колебаний, возникших в связи с качественной теорией дифференциальных уравнений (особые точки, предельные циклы, сепаратрисы, устойчивость в малом и большом, бифуркационное значение параметра, адиабатическое изменение параметра в неконсервативных системах и т. д.) и формулировку серии задач, решение которых представляет значительный интерес для теории автоколебаний. Следует отметить, что значительная часть поставленных в этом докладе задач (создание общей теории бифуркаций, нахождение и исследование устойчивости квазипериодических движений в неавтономных системах, близких к линейным консервативным, теория действия внешней силы на релаксационную систему и др.) была вскоре (в 1932—1936 гг.) решена усилиями ряда лиц.

8. *Применение теории Пуанкаре о точках бифуркаций и смене устойчивости к простейшим автоколебательным системам*. Ученые записки ГГУ, вып. 1, стр. 3—14, 1935.

8а. *Применение теории Пуанкаре о точках бифуркации и смене устойчивости к простейшим колебательным системам*. Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. V, вып. 3—4, стр. 296—309, 1935.

В этих работах, из которых вторая представляет собой дополненный новыми примерами вариант первой, устанавливается и используется связь, существующая между теорией зависимости стационарных режимов катодного генератора от параметра и теорией зависимости консервативной системы от параметра, данной Пуанкаре в связи с теорией равновесия вращающейся жидкой массы. В частности, дается детальное исследование мягкого и жесткого самовозбуждения автоколебаний, если характеристика аппроксимирована полиномом и если система близка к линейной консервативной.

9. *Грубые системы* (совместно с Л. С. Понтрягиным). Доклады АН СССР, т. XIV, № 5, стр. 247—250, 1937.

Эта работа представляет собой развитие и математическую обработку идеи, использованной еще в № 3, о том, что решения дифференциальных уравнений, теоретически отображающие реальные процессы, должны быть устойчивы по отношению

к малым изменениям правых частей этих уравнений. Требование сохранения качественной структуры разбиения фазовой плоскости на траектории при достаточно малых изменениях правых частей позволило выделить класс дифференциальных уравнений («грубые системы»), исследование которого представляет большой интерес для приложений и который обладает рядом интересных в математическом отношении особенностей, в частности исключительной простотой областей устойчивости в большом элементе притяжения (состояний равновесия и предельных циклов).

10. *Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра* (совместно с Е. Леонтович). Ученые записки ГГУ, вып. 6, стр. 3—24, 1937.

11. *К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории* (совместно с Е. Леонтович). Доклады АН СССР, т. XXI, стр. 427—430, 1938.

В этих двух работах дана общая теория зависимости от параметра качественной картины разбиения фазовой плоскости на траектории. Эта теория, для которой физика подсказала ряд руководящих идей, помимо своего значения для теории дифференциальных уравнений, имеет значительный практический интерес для теории колебаний, позволяя во многих случаях делать эффективные высказывания о смене качественных картин фазового пространства конкретных колебательных систем.

12. *Теория точечных преобразований Пуанкаре — Брауера — Биркгофа и теория нелинейных колебаний* (Доклад, прочитанный на сессии Отделения физико-математических наук Академии Наук СССР в марте 1944 г.). Краткий отчет о докладе. Вестник Академии Наук СССР, № 6, 1944.

Доклад содержит краткую историю теории нелинейных колебаний, в частности обзор результатов, полученных при помощи метода малого параметра и при помощи качественной теории дифференциальных уравнений. Класс нелинейных задач, которые могут рассматриваться как кусочно-линейные и в отношении которых можно ожидать быстрых успехов от использования теории точечных преобразований Пуанкаре — Брауера — Биркгофа. Задачи, сводящиеся к точечным преобразованиям прямой в прямую, плоскости в плоскость, пространства в пространство.

Выгоды параметрического представления точечного преобразования. Готовый аппарат для локального исследования точечного преобразования вблизи неподвижных точек. Некоторые теоремы теории точечных преобразований, облегчающие глобальное исследование. Краткая сводка результатов, полученных при помощи теории точечных преобразований в теории автоматического регулирования (задача Вышнеградского, задача о самолете с автопилотом и др.) и в радиофизике (задача Баркгаузена, задача об обычном катодном генераторе и др.).

13. *Л. Мандельштам и теория нелинейных колебаний*. Известия АН СССР, серия физическая, т. IV, № 1—2, стр. 30—55, 1945.

Доклад, прочитанный на траурном заседании, посвященном Л. И. Мандельштаму, и содержащий краткий очерк деятельности Л. И. Мандельштама в области теории нелинейных колебаний и некоторые характерные штрихи его научного облика.

14. *Простейшие линейные системы с запаздыванием* (совместно с А. Г. Майером). Автоматика и телемеханика, т. VII, № 2—3, стр. 95—106, 1946.

В работе рассматриваются с точки зрения физики колебаний простейшие системы с запаздывающими силами, отображаемые линейными дифференциально-разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, и приводятся графики, позволяющие быстро решать вопросы устойчивости, относящиеся к таким системам.

Б. Работы, относящиеся к разделам теоретической физики, смежным с теорией колебаний

15. *Zur Theorie der molekularen Lichtzerstreuung an Flüssigkeitsoberflächen* (совместно с М. А. Леонтовичем). Zeitschrift für Physik, Berlin. Bd. 38, Nr 6—7, S. 485—504, 1926.

Работа содержит расчет интенсивности света, рассеиваемого поверхностью жидкости, и сравнение результатов этого расчета с опытами Рамана и Рамдаса. Работа в теоретической части является обобщением расчета Л. И. Мандельштама, относящегося к 1913 г.

16. *К теории адиабатических инвариантов* (совместно с Л. И. Мандельштамом и М. А. Леонтовичем). Журнал Русского физико-химического общества, т. 60, № 1, стр. 413—419, 1928.

В этой работе в связи с рассмотрением поведения маятника в периодически меняющемся поле силы тяжести устанавливается необходимость уточнения ряда формулировок теории адиабатических инвариантов и дается определение «временного» и «стационарного» адиабатического инварианта.

17. *О статистическом рассмотрении динамических систем* (совместно с А. А. Виттом и Л. С. Понтрягиным). Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. III, вып. 3, стр. 165—180, 1933.

17a. *Statistische Auffassung dynamischer Systeme* (совместно с А. А. Виттом и Л. С. Понтрягиным). *Physikalische Zeitschrift der Sowietunion*, Bd. 6, S. 1—24, 1934.

Работа содержит исследование систем, в которых, кроме обычных сил, действуют случайные силы, подчиняющиеся теоретико-вероятностным законам. В работе детально исследован при помощи уравнения Эйнштейна—Фоккера и уравнения, определяющего математическое ожидание времени перехода, ряд простейших случаев, представляющих интерес для теории колебаний, в частности случай, когда динамические уравнения обладают предельным циклом Пуанкаре.

Идеи и результаты, заключающиеся в этой работе, в дальнейшем развивались различными авторами в направлении анализа флуктуаций в нелинейных системах, в частности анализа размытости спектра катодного генератора и в направлении исследования вероятности осуществления тех или иных движений в динамической системе, если система подвергается воздействию случайных толчков, интенсивность которых стремится к нулю.

18. *О резонансных явлениях при движении релятивистской частицы в циклотроне* (совместно с Г. С. Гореликом). Доклады АН СССР, т. XLIX, стр. 664—666, 1945.

18a. *Mouvement d'une particule relativiste dans le cyclotron* (совместно с Г. С. Гореликом). *Comptes Rendus, Paris*, t. 221, No. 23—25, p. 696—698, 1945.

В работе разгон заряженной релятивистской частицы в циклотроне рассматривается как нелинейное резонансное явление. Нелинейность задачи обусловливается двумя факторами: 1) переменное электрическое поле практически отлично от нуля только в узкой щели между дуантами, вследствие чего сила, действующая на частицу, является не только периодической функцией времени, но и нелинейной функцией координат частицы; 2) масса релятивистской частицы является нелинейной функцией ее скорости. В работе показывается, что в случае релятивистской частицы кривые резонанса (кривые зависимости энергии периодического движения от напряженности поля) напоминают известные кривые обычного феррорезонанса, обладая при больших полях характерным скосом и гистерезисом. В работе утверждается, что следствием наличия такой скошенной резонансной кривой является возможность «затянуть» частицу в область больших энергий посредством постепенного увеличения напряженности магнитного поля. Аннотируемая работа возникла в связи с разбором статей Векслера (ФИАН), предложившего метод разгона релятивистских частиц путем изменения напряженности магнитного поля, и имеет ряд точек соприкосновения со статьями Макмиллана (США), пришедшего позднее Векслера к аналогичной идее.

В. Работы в области радиофизики

19. *Zur Theorie des Mitnehmens von van der Pol* (совместно с А. А. Виттом). *Archiv für Elektrotechnik*, Bd. XXIV, S. 99—110, 1930.

Работа посвящена рассмотрению оставшегося открытым вопроса о наличии «порога» (минимальной амплитуды внешней силы) для наступления явления принудительной синхронизации (захватывания) при действии внешней синусоидальной силы на автоколебательную систему. В работе впервые применена качественная теория Пуанкаре не к исходным уравнениям движения, а к так называемым укороченным уравнениям, полученным по методу ван дер Поля. Этот способ рассмотрения, позволяющий весьма просто получить отрицательный ответ на вопрос о наличии порога в явлении захватывания, оказался плодотворным и был затем использован в ряде работ.

20. *Unstetige periodische Bewegungen und die Theorie des Multivibrators von Abraham-Bloch* (совместно с А. А. Виттом). Доклады АН СССР, № 8, стр. 189—192, 1930.

Работа содержит новое, существенно отличающееся от всех прежних, рассмотрение автоколебаний мультивибратора Абрагама и Блока, развитое на основе качественной теории дифференциальных уравнений и на основе выдвинутого Л. Мандельштамом и Н. Папалекси представления о внутренних электрических ударах, вызывающих мгновенные «перескоки» изображающей точки в фазовом пространстве.

Работа содержит ряд методических указаний, касающихся рассмотрения вырожденных систем, способных совершать разрывные автоколебания. Работа послужила исходным пунктом ряда работ других авторов.

21. *К математической теории захватывания* (совместно с А. А. Виттом). Журнал прикладной физики, т. VII, вып. 4, стр. 1, 1930.

Работа содержит строгую теорию обычного захватывания, опирающуюся на количественные методы Пуанкаре, изложенные в «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», и на результаты Ляпунова, изложенные в его диссертации «Общая задача об устойчивости движения». Работа содержит ряд методических указаний, касающихся приложений метода малого параметра к случаю действия внешней синусоидальной силы на автоколебательные системы, близкие к линейным консервативным. Работа послужила исходным пунктом ряда работ других авторов.

22. *К математической теории автоколебательных систем с двумя степенями свободы* (совместно с А. А. Виттом). Журнал технической физики, т. IV, вып. 1, стр. 122—143, 1934.

Работа содержит строгую теорию обычного затягивания, опирающуюся на количественные методы Пуанкаре, изложенные в «Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», и на результаты Ляпунова, изложенные в его диссертации «Общая задача об устойчивости движения».

Работа содержит ряд методических указаний, касающихся приложений метода малого параметра к автоколебательным системам, близким к линейным консервативным.

Работа послужила исходным пунктом ряда работ других авторов.

23. *Новые исследования в области нелинейных колебаний* (совместно с Л. Мандельштамом, Н. Папалекси и др.). Радиоиздат, М., 1936.

23а. *Exposé des recherches récentes sur les oscillations non-linéaires* (совместно с Л. Мандельштамом, Н. Папалекси и др.). Technical Physics of the USSR, vol. II, № 2—3, p. 1—52, 1935.

Книга и несколько сокращенная по сравнению с книгой французская статья содержат обзор наиболее существенных результатов в области нелинейных колебаний за ряд лет (1928—1935). В изложении центральное место отведено радиофизическим проблемам.

24. *Теория колебаний, ч. 1* (совместно с С. Э. Хайкиным). ОНТИ, М.—Л., 516 стр., 1937.

Книга содержит подробное изложение теории колебаний автономных систем с одной степенью свободы на основе математического аппарата, адекватного рассматри-

ваемым нелинейным проблемам. Наряду с вводными главами, рассчитанными на студентов, в книге изложен ряд научных результатов, нигде больше не опубликованных. В изложении центральное место отведено радиофизическим проблемам. На эту книгу имеются многочисленные ссылки в ряде работ, относящихся к теории нелинейных колебаний и к теории автоматического регулирования, выпавших как в СССР, так и за границей. В частности, в США в 1947 г. вышла книга Н. Минорского (N. Minorsky, *Introduction to Non-linear Mechanics*. Ann-Arbor. J. W. Edwards, 1947), значительная часть которой является простым изложением (с четким указанием источника) ряда глав «Теории колебаний»¹.

25. *Некоторые исследования в области нелинейных колебаний, проведенные в СССР, начиная с 1935 г.* (совместно с Г. С. Гореликом, Н. Д. Папалекси, С. М. Рытовым). Успехи физических наук, т. XXXIII, стр. 335, 1947.

Г. Работы в области теории автоматического регулирования и общей динамики машин

26. *Задача Мизеса в теории прямого регулирования и теория точечных преобразований поверхностей* (совместно с А. Г. Майером). Доклады АН СССР, т. XLIII, № 2, стр. 58—62, 1944.

В работе рассматривается основная задача теории прямого регулирования при учете кулоновского трения в индикаторе (более общий случай этой же задачи исследуется в работе № 29 настоящего списка), которой, начиная с 1894 г., занимался ряд авторов (Бегтреп, Толле, Лекорню, Жуковский, Мизес). Работа содержит: 1) сведение нелинейной динамической задачи к точечному преобразованию плоскости в плоскость; 2) полный качественный анализ возможных движений, имеющих место при различных начальных условиях; 3) приближенное количественное рассмотрение поведения сепаратрисы неустойчивого периодического движения, позволяющее оценить те изменения нагрузки машины, при которых процесс регулирования остается сходящимся.

27. *Движение нейтрального самолета, снабженного автопилотом, и теория точечных преобразований поверхностей* (совместно с Н. Н. Баутиным). Доклады АН СССР, т. XLIII, № 5, стр. 197—202, 1944.

28. *Стабилизация курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора и зоной нечувствительности* (совместно с Н. Н. Баутиным). Доклады АН СССР, т. XLVI, № 4, стр. 158—161, 1945.

В этих двух заметках рассматривается без всяких предположений о малости тех и других величин (входящих в уравнения движения) задача о стабилизации курса нейтрального самолета автопилотом с постоянной скоростью сервомотора как для случая отсутствия зоны нечувствительности, так и в случае наличия такой зоны. Заметки содержат: 1) сведение соответствующих нелинейных динамических задач к точечным преобразованиям плоскости в плоскость; 2) качественный анализ возможных движений; 3) разбиение пространства параметров на области, соответствующие различным качественным картинам фазового пространства.

Результаты, изложенные в заметках, позволяют установить те значения параметров системы самолет — автопилот, при которых имеет место устойчивая стабилизация курса, а также в нужных случаях величины тех отклонений от курсов, при которых автоматическое устройство перестает справляться со своей задачей. До появления аннотируемых заметок задача рассматривалась рядом автором (Опшельт, Котельяников, Булгаков и др.), но при предположениях о близости возможных в системе автоколебаний к синусоидальным.

¹ Позднее перевод книги А. А. Андропова и С. Э. Хайкина был издан в США.—
Прим. ред.

29. *Об одном вырожденном случае общей задачи непрямого регулирования* (совместно с Н. Н. Баутиным). Доклады АН СССР, т. XLVI, № 7, стр. 304—306, 1945.

Работа содержит полное качественное и количественное решение динамической задачи, к исследованию которой сводится теория ряда практически интересных схем прямого регулирования, при анализе которых нельзя пренебречь ни наличием между индикатором и регулируемым объектом промежуточного звена, обладающего процессом установления, ни твердым трением в индикаторе, но можно пренебречь вязким трением в индикаторе и массой индикатора. Этому случаю прямого регулирования посвящено несколько глав в книге Schmidt «Unmittelbare Regelung» (Berlin, 1939). Однако Шмидт не дает аналитического решения рассматриваемой задачи и, ограничиваясь приближенными графическими рассмотрениями, не исследует ряда существенных свойств рассматриваемой системы, в частности возможности появления автоколебаний.

30. *О задаче Вышнеградского в теории прямого регулирования* (совместно с А. Г. Майером). Доклады АН СССР, т. XLVII, № 5, стр. 345—348, 1945.

30а. *Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования, I* (теория регулятора Уатта при наличии кулоновского и вязкого трения) (совместно с А. Г. Майером). Автоматика и телемеханика, т. VIII, № 5, стр. 314—334, 1947.

В этой работе дается решение задачи о движении системы машина — регулятор Уатта при наличии кулоновского и вязкого трения в муфте и сочленениях регулятора. Эта задача была поставлена И. А. Вышнеградским в 1876 г., но была им самим решена только для линейного случая отсутствия кулоновского трения. С тех пор многократно рассматривался лишь частный случай этой задачи, в котором вязкое трение отбрасывается, но даже и этот частный случай вплоть до последнего времени не получил окончательного решения (см. № 25 настоящего списка). В работе имеются: 1) полное качественное исследование возможных движений, имеющих место при различных значениях двух существенных параметров (это качественное исследование проведено — для случая неустойчивости отрезка покоя — путем построения некоторой «разрывной» функции Ляпунова; для случая устойчивости отрезка покоя — путем сведения задачи к точечному преобразованию плоскости в плоскость); 2) количественное исследование сепаратрисы, порождаемой периодическим движением, позволяющее построить удобные диаграммы для решения вопроса о сходимости и расходимости процесса регулирования при заданных конструктивных параметрах и заданных изменениях нагрузки машины.

31. *Автоколебания простейшей схемы, содержащей автоматический винт изменяемого шага* (совместно с Н. Баутиным и Г. Гореликом). Доклады АН СССР, т. XLVII, № 4, стр. 265—268, 1945.

В работе рассматривается в самых простых предположениях динамическая система коленчатый вал — лопасти винта — индикатор и изучаются условия подавления автоколебаний, часто осложняющих на практике правильное функционирование винтов изменяемого шага.

Пренебрегая инерциями индикатора и сервомотора и делая ряд дальнейших упрощений, эту нелинейную задачу оказывается возможным свести к точечному преобразованию прямой в прямую и получить полную картину влияния параметров схемы на существование автоколебаний.

32. *О движениях идеальной модели часов, имеющих две степени свободы. 1. Модель догалилеевых часов* (совместно с Ю. И. Неймарком). Доклады АН СССР, т. LI, № 1, стр. 17—20, 1946.

В работе рассматривается (без всяких предположений о малости тех или иных величин, входящих в уравнения движения) упрощенная модель часов, в которой, с одной стороны, сохранены основные особенности часов как неконсервативной

динамической системы с двумя степенями свободы, а с другой стороны, сведены к минимуму вычислительные трудности.

В работе показывается, что в случае догалилеевых часов (т. е. часов с балансом, но без маятника или пружины) разрывная нелинейная задача сводится к точечному преобразованию трехмерного пространства послеударных состояний в самого себя, причем единственная неподвижная точка этого преобразования соответствует обычному периодическому ходу таких часов. В работе получены простые аналитические выражения для периода и амплитуды автоколебаний, соответствующих этой неподвижной точке.

33. *Теория непрямого регулирования при учете кулоновского трения в чувствительном элементе* (совместно с Н. Баутиным и Г. Гореликом). Автоматика и телемеханика, т. VII, № 1, стр. 15—41, 1946.

В работе путем сведения нелинейной динамической проблемы к точечным преобразованиям прямой в прямую дается точное решение задачи о влиянии кулоновского трения в индикаторе на процесс непрямого регулирования в случае наличия жесткой обратной связи как в случае объекта, не обладающего саморегулированием, так и в случае объекта, обладающего саморегулированием.

[В работе отдельно рассматривается случай сервомотора переменной скорости и сервомотора постоянной скорости, и для обоих случаев даются графики и диаграммы, позволяющие при заданных параметрах системы машина — регулятор и заданной величине изменения нагрузки машины быстро решить вопрос о сходимости или расходимости процесса регулирования. Частный случай рассматриваемой проблемы, когда жесткая обратная связь отсутствует, рассмотрен в классической работе Леоте, относящейся к 1884 г. Случай наличия жесткой обратной связи также был рассмотрен многими авторами. Однако до появления этой работы не было дано точного решения задачи для общего случая.]

34. *О работах Д. Максвелла, И. Вышнеградского и А. Стодола в области теории регулирования машин* (совместно с И. Н. Вознесенским). Печатается в качестве приложения к книге «Теория автоматического регулирования (Максвелл, Вышнеградский, Стодола)», изданной в 1948 г. Академией Наук СССР в серии «Классики науки».

Работа содержит новое, основанное на тщательном изучении оригинальных работ, изложение истории создания классической линеаризованной теории регулирования. В частности, эта работа выясняет существенное значение работы И. А. Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876—1877 гг.) для практики регуляторостроения того времени, а также показывает фундаментальное влияние этой работы на дальнейшее развитие линеаризованной теории регулирования.

35. *О влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования* (совместно с Н. Н. Баутиным). Подготовлена к печати.

В работе путем сведения нелинейной динамической проблемы к точечным преобразованиям прямой в прямую дается полное решение задачи о влиянии кулоновского трения в золотнике на процесс непрямого регулирования в случае наличия жесткой обратной связи в случае объекта как не обладающего саморегулированием, так и обладающего саморегулированием. В заключительной части работы рассматриваются сходство и различия, возникающие в процессе непрямого регулирования для случая кулоновского трения в индикаторе и в золотнике.

36. *Теория устойчивости в большом параллельной работы синхронных машин и проблема Хилла*. Подготовлена к печати.

Работа устанавливает связь между проблемой устойчивости параллельной работы синхронных машин в консервативной идеализации и задачей Хилла о качественном анализе устойчивости в большом для ограниченной проблемы трех тел. Установленная связь позволяет сделать ряд утверждений об условиях устойчивой работы синхронных машин.

37. Автоколебания, авторегулирование и общая динамика машин (совместно с Г. Гореликом). Рукопись книги, подготавливаемой к печати по договору с Государственным технико-теоретическим издательством.

В список аннотируемых работ А. А. Андропова не вошли специальные работы, заметки в реферативных журналах, популярные статьи.

СТАТЬИ И ЗАМЕТКИ, НЕ ВКЛЮЧЕННЫЕ А. А. АНДРОНОВЫМ В СОСТАВЛЕННЫЙ ИМ СПИСОК

38. Андронов А. А. Лаплас. Жизнь, мировоззрение, место в истории науки, М., Московский рабочий, 1930, 192 стр. (Жизнь замечательных людей).
39. Андронов А. А. Решенные и нерешенные задачи математической теории автоколебаний. Сообщ. о научно-техн. работах респ., 1930, № 29, стр. 95.
40. Андронов А. А. Примечание к книге Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». Пер. с франц. Е. Леонтович и А. Майер. Под ред. и с примеч. А. А. Андропова и с дополн. Е. Леонтович, А. Майер, В. Степанова (и др.). М.—Л., Гостехиздат, 1947, 392 стр.
41. Андронов А. А. И. А. Вышнеградский и его роль в создании теории автоматического регулирования. Известия АН СССР, ОТН, № 6, стр. 805—819, 1949.
42. Андронов А. А. И. А. Вышнеградский и его роль в создании теории автоматического регулирования. В сб. «Вопросы истории отечественной науки». Общее собрание АН СССР 5—11 янв. 1949, стр. 500—517, М.—Л., 1949.
43. Андронов А. А. и Вознесенский И. Н. (Редакция и комментарии). В кн.: Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А. и Стодола А. Теория автоматического регулирования (Линеаризованные задачи). Изд. АН СССР, М., 1949, 430 стр.
44. Андронов А. А. Предисловие к книге Н. Н. Баутина «Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости». С предисл. акад. А. А. Андропова, стр. 7—8, Гостехиздат, М.—Л., 1949, 164 стр.
45. Андронов А. А. и Гапонов В. Радиофизика, Горьк. коммуна, № 189, стр. 2, 1945.
46. Андронов А. А. и Самойлович А. Атомная энергия и атомное ядро. Горьк. коммуна, № 213, стр. 2, 1945.
47. Андронов А. А. Где и когда родился Н. И. Лобачевский? Горьк. коммуна, № 109, 1948.
48. Андронов А. А. Вестник Высшей школы, 1949.
49. Андронов А. А. и Майер А. Г. Задача Вышнеградского в теории прямого регулирования, II, Авт. и телемех., XIV, № 5.
50. Андронов А. А. и Майер А. Г. Теория ударной машины. Ученые записки ГГУ, т. XXVII (серия физическая), 1954.