

СООБЩЕНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ

РУДЖЕР БОШКОВИЧ И ПРОБЛЕМА БЕСКОНЕЧНОСТИ

(К 250-летию со дня рождения)

От редакции. Проблема бесконечности в физике, математике, космологии и других науках привлекает сейчас большое внимание естествоиспытателей. Публикуемая статья содержит ряд дискуссионных положений. Редакция надеется, что их обсуждение поможет выяснению различных точек зрения по спорным вопросам в науке.

* * *

Две с половиной тысячи лет тому назад Анаксимандр писал об «апейроне» — бескачественной неопределенной субстанции, представляя ее бесконечной в пространстве и во времени, вечно движущейся, заключающей противоположности. Вселенная была для него бесконечной, с бесчисленными мирами. Иногда считают, что основная идея Анаксимандра о реальном существовании бесконечности развивалась только материалистической философией и прогрессивным естествознанием. Полагают также, что мысль о чисто идеальном существовании бесконечности, о конечном материальном мире высказывалась лишь идеалистами.

Однако в действительности лишь *большинство* материалистов отстаивало реальное существование бесконечности и лишь *большинство* идеалистов отрицало его. Но и в том и в другом лагере были приверженцы противоположных взглядов.

Первоначально бесконечность была синонимом абсолюта — бога, все атрибуты которого выражают ее; только поэтому идея бога могла оправдывать эксплуататорский строй. То же самое было и с понятием человеческая душа, его (Я), выражавшим абсолютную неограниченность, бессмертие.

Естественнонаучное познание и материалистическая философия, прокладываящую дорогу в тяжелой борьбе, лишили «бога» и «я» их бесконечных атрибутов и перенесли последние в материальный мир, в природу. Вот почему представле-

ние о бесконечном пространстве, времени и бесконечной способности познания закрепилось и приобрело огромную силу привычки. Между тем, понятие бесконечности представляет лишь *заменитель* понятий об очень большом (неопределенно большом) или, соответственно, очень малом. Существование материальной бесконечности ничем нельзя ни доказать, ни опровергнуть. Но в качестве упомянутого «заменителя» понятие бесконечности способно играть прогрессивную роль лишь временно. На определенном историческом этапе оно становится тормозом в развитии науки. Даже математика, где понятие бесконечности могло в наибольшей мере проявить свои положительные стороны, развивалась в общем в сторону преодоления этого представления. Создатели дифференциального и интегрального исчисления Ньютон¹ и Лейбниц² сознавали, что оно в сущности имеет финитный характер. Однако огромные успехи нового исчисления отвлекали внимание математиков от противоречий, к которым ведет понятие бесконечно-малого. Лишь в прошлом веке, трудами О. Коши, Б. Больцано и К. Вейерштасса удалось исключить это понятие из математического анализа.

Начиная с 70-х годов прошлого века когда Г. Кантор, разрабатывая теорию множеств, ввел в математику понятие актуально бесконечно-больших (трансфинитных) величин, — актуально бесконечно-малые были исключены из рассмотрения еще постулатом Архимеда, — в математике стал постепенно созреть кризис ее основ. Логические парадоксы теории множеств не удалось преодолеть ни одному из основных направлений — формализму, логицизму или интуиционизму, хотя каждое

¹ I. Newton. Principia Philos. naturalis. Amsterdam. 1723, p. 2; I. Newton. Tractatus de curvature curvarum.

² G.-W. Leibniz. Math. Schriften, 1858, Bd. 5, p. 217.

из них, независимо от гносеологически ошибочных позиций, внесло ценный вклад в решение проблемы бесконечного.

Лишь в последнее время благодаря независимому возникновению в Советском Союзе и в США так называемого математического конструктивизма, связанного с новой «машинной» математикой кибернетических автоматов, наметилась реальная возможность выхода из казавшихся непреодолимыми затруднений. Это путь замены понятия бесконечно-большого финитными понятиями (подобно тому, как это раньше было сделано с понятием бесконечно-малого), замены, при которой не страдают результаты, добытые при помощи методов теории множеств. Вместе с тем конструктивизм советских математиков, требуя диалектического отрицания, «снятия» (*Aufhebung*) бесконечности, решительно отвергает как объективно-идеалистическую антидиалектическую позицию Г. Кантора, так и субъективно-идеалистическую, мистическую диалектику Л. Брауэра³.

Преодоление бесконечного является также насущной задачей современной космологии и физики. Отметим, что в настоящее время дилемма пространственной бесконечности или конечности вселенной начинает терять смысл. Установленный радиоастрономией факт разбегания туманностей нашей Метагалактики делает модель пространственно конечной вселенной весьма вероятной. Еще большее значение имеет то, что советскому космологу А. Л. Зельманову⁴ удалось построить математическую модель неомогенной анизотропной релятивистской вселенной. При этом в первом приближении при допущении нулевой средней плотности массы вселенной (лишь для этого случая удалось пока получить решение соответствующих уравнений), в модели А. Л. Зельманова существуют и такие системы отсчета, относительно которых вселенная пространственно бесконечна, и такие, относительно которых она пространственно конечна, замкнута.

Что касается физики, то она испытывает затруднения как при допущении бесконечной делимости пространства — времени, так и в случае появления бесконечных рядов, приводящих к бесконечным значениям характеристик элементарных частиц, в особенности обратного воздействия поля на частицу, в разрез с экспериментальными установленными конечными характеристиками. Эти затруднения устраняются квантованием пространства — времени, принятием его дискретной, атомной структуры, а также заменой бесконечных рядов конечными последовательностями.

В биологии следует также отказаться от подмены понятия «весьма большое» поня-

тием «бесконечное», как указал один из самых выдающихся математиков нашего времени А. Н. Колмогоров, поскольку лишь на этом пути можно правильно решить проблемы применимости кибернетических методов к исследованию процессов управления в живых организмах.

Таким образом, преодоление бесконечного является объективной тенденцией исторического развития науки.

Мы кратко изложили проблему бесконечности, так как, нам кажется, только на этом фоне можно оценить достижения, которыми человечество обязано великому югославскому энциклопедисту XVIII в. Руджеру Йосипу Бошковичу. Он принадлежал к мыслителям, которых при жизни встречает непонимание, но идеи которых высоко ценят впоследствии.

Как было показано⁵, в своем динамическом атомизме Бошкович предвидел многие основные идеи новейших попыток создания единой теории материи — неразрывную связь материи и движения, единство прерывности и непрерывности, математическую модель материи, иерархию форм движения. Взгляды Бошковича на пространство, время, движение, инерцию на полтора века определили воззрения теории относительности, не только специальной, но частично и общей. Бошкович предугадал возможность существования геометрии, отличной от евклидовой, также непротиворечивой. Первый образец такой геометрии был создан лишь в 1826 г. Лобачевским, спустя 69 лет после того, как Бошкович высказал эту смелую мысль. Не менее проницательны были и идеи Бошковича, относящиеся к проблеме бесконечности.

Высказывания о бесконечности содержатся во многих трудах Бошковича⁶. На более полно он осветил этот вопрос в работе «О преобразовании геометрических мест, правилах непрерывности и загадках бесконечного», являющейся приложением к последнему (III) тому «Элементов всеобщей математики»⁷, и вышедшем в 1754 г. в Риме. Бошкович рассматривает различные преобразования геометрических фигур, преимущественно конических сечений, и возникающие при этом геометрические парадоксы, сплошь связанные с понятием бесконечности. Обратимся к философской стороне вопроса, отметив, что в современной геометрии понятие бесконечности вытеснено понятием «несобственных» геометрических образов; с этой точки зрения большинство парадоксов, приводимых Бошковичем, теряет парадоксаль-

³ Проблемы конструктивного направления в математике, т. 1, 2. М.—Л., 1958, 1962.

А. Л. Зельманов. К вопросу о деформации сопутствующего пространства в теории тяготения Эйнштейна. ДАН, 1960, т. 135, № 6; Метагалактика и вселенная. Сб. «Наука и человечество», М., 1962.

⁵ Э. Кольман. Жизнь и научная деятельность Руджера Бошковича. Вопросы истории естествознания и техники, вып. 2, М., Изд-во АН СССР, 1956, стр. 92—109.

⁶ R. I. Bosovich. De Natura et usu infinitorum et Infinite parvorum. Romae, 1741; R. I. Bosovich. Philosophiae naturalis theoria redacta. Viena, 1758.

⁷ R. I. Bosovich. Elementa mathesis universae, t. III. Romae, 1754.

ность. Бошкович сообщает (§ 878), что он собрал материал для следующего тома, в котором он намеревался дать собственное обоснование инфинитезимального исчисления (этот том не вышел в свет). Он пишет: «...нас не удовлетворяет то, что написано у Ньютона об исчезающих величинах, а именно, что они не приближаются к определенному отношению ни прежде, ни после (того, как они исчезли), но как раз в тот момент, когда они исчезают; они еще не ничто, и им не может не хватать какого-то последнего бытия, а они либо еще являются чем-то, чем потом не будут, либо суть вообще ничто. Еще гораздо меньше нам нравится то, что утверждают другие, кто смотрит на инфинитезимальные величины как на нечто, определенное само в себе, что находится относительно конечных величин в меньшем отношении, чем какое-либо другое данное отношение. А именно, когда они говорят — «данное», то они под этим понимают такое отношение, которое дано *в самой вещи*,... ко если они понимают и такое отношение, что оно *может* быть дано, как наверное понимают те, кто называет величины такого рода «неопределимыми» (*inassignabiles*), то и они не избегают трудностей. Если они такую величину называют определимой и способной быть данной так, чтобы ее значение само могло быть нами ясно воспринимаемо, по отношению к масштабам, которые мы воспринимаем, то это будет зависеть от силы самой мысли..., а именно так, что то, что относительно одной мысли не может быть дано или определено, будет возможным дать или определить другой (мыслью). А так как сила какой бы то ни было мысли имеет совершенно определенные границы, будет то, что возможно определить для одной, для другой неопределенным и инфинитезимальным, и удвоенная инфинитезимальная (величина) будет для этой же мысли чем-то конечным. Но если они не имеют в виду самой мысли и ее ясного восприятия, тогда почему же нельзя определить те величины, которыми мы пользуемся постоянно во всей геометрии и в анализе, с помощью которых мы обосновали столь длинные доказательства, и... столь многочисленные взаимные отношения которых мы исследуем? Почему говорят, что отношение определенной величины к определенной конечной (величине) меньше, чем любая величина, которая может быть дана, если половина этой же величины имеет к этой же конечной величине еще меньшее отношение, чем половинное. Остается лишь одно, что там, где говорят, что отношение меньше, чем любое данное отношение, это имеет тот же смысл, какой имеет слово «данное», как общепринято в геометрии, а именно «определенное», и что инфинитезимальные величины, которые сами в себе определены (что является выражением, которое мы употребляем для того, чтобы избежать противоречий), не существуют; но инфини-

тезимальными величинами пусть будут названы такие, которые мы понимаем как неопределенные, значение которых мы, разумеется, не определяем, но принимаем его столь малым, что возможно уменьшить их по нашему произволу, не указывая при этом какой бы то ни была границы... Если мы обладаем этим понятием инфинитезимальной (величины) и если оно правильно подтверждено, то мы получим весьма крепкие доказательства всего метода...».

Приведенная цитата дает представление не только о ходе мысли, но и о своеобразном стиле Бошковича. Он заметно приближается к современному пониманию «инфинитезимальных» величин, как переменных неопределенно уменьшающихся, и решительно отвергает субъективный подход к математическим понятиям. «В том же смысле неопределенности,— продолжает Бошкович в следующем, § 879,— могут быть понимаемы и бесконечно большие величины, как неопределенно возрастающие». И он приходит к замечательной мысли, что «самые загадки абсолютно распространенного бесконечного... приводят нас к взгляду, что абсолютное бесконечное в области количества скорее совершенно невозможно и спорно, чем лишь недоступно нашей конечной мысли». И дальше: «Мы полагаем, что все, что существует, имеет определенные границы, за которыми имеются другие границы, но все одинаково бесспорные и определенные, так же как имеется конечное число дней в рамках будущей вечности от сегодняшнего дня до любого определенного дня, который будет когда-то существовать: но может быть и другой, и всегда будет день более отдаленный. И одинаково мы убеждены, что число любых существующих вещей, как например число людей, будет необходимо всегда конечно, однако так, что всегда будет возможно число большее, которое опять-таки будет конечно, и что никогда не может существовать вместе как целое то, что может существовать в отдельности»⁸.

Таким образом, Бошкович признает бесконечность только потенциально, как возможность неопределенного перехода границы, и отрицает ее актуальное существование. Понимая, что отсутствие доказательств существования актуальной бесконечности не может заменить доказательство ее несуществования, Бошкович прибегает однако к теологической аргументации. Он пишет: «Не может также дойти до того, чтобы всемогущество наивысшего творца исчерпало

⁸ В книге «Элементы математической логики» П. С. Новиков, подчеркивая идеализированный характер понятия бесконечности, пишет: «Построение бесконечного числа отдельных предметов, выполнение бесконечного числа актов неосуществимо не только в силу недостатка практических средств, но и принципиально не может быть осуществлено никогда и никакими средствами» (М., 1959, стр. 17).

свои силы и сотворило все, что может сотворить, и не оставались бы без конца такие вещи, которые оно также сотворит, если захочет, что мы обыкновенно называем *конечное до бесконечности* (finitum in infinitum)....».

Большой интерес представляют и такие высказывания Бошковича о бесконечном, которые бы мы сегодня назвали семантическими. Он пишет: «Хотя некоторые и утверждают, что для бесконечности нельзя допустить названий равенства, целого и части, но это будет значить, что будут устранены не самые затруднения, а употребление языка, как если бы кто-нибудь запретил употребление всех языков для того, чтобы никто не смог противоречить (ему). Безусловно необходимо допустить эти названия и там, потому что высокое ясное представление, которое в нас отвечает этим именам, не зависит от понятия бесконечности...» (§ 884).

Здесь Бошкович ошибочно оспаривает взгляды Галилея⁹, становясь на субъективистскую позицию. Впрочем, это не удивительно, поскольку подлинно научное решение вопроса о том, какое обобщение терминов допустимо, может дать лишь диалектико-материалистическая теория отражения, созданная Лениным¹⁰; термины, как выражения понятий, должны быть максимально адекватны действительности. Но Бошкович отходит от примененного им субъективистского подхода, заявляя: «Значит, скорее надо сказать, что не может существовать величина, которая бы не была конечной, чем говорить, что такие названия не годятся для бесконечности...». В самом деле, понятия «меньше», «больше», «равно», «часть», «целое» являются абстрактными копиями отношений конечных множеств материального мира и не могут быть поэтому перенесены в идеальную область бесконечных множеств, не вызывая противоречий.

Бошкович полагает, будто «все, что содержит противоречие, следует назвать абсурдным и таковым, что оно доказывает невозможность существования, а не только лишь загадку, которая превышает способность понимания конечной мысли». Мысль о единстве и борьбе противоположностей осталась чуждой ему, хотя он собственными трудами серьезно поколебал антидиалектический атомизм. Поэтому он и пишет (§ 885): «Однако когда мы размышляем о том, почему бесконечная величина невозможна, то нам приходит на ум

мысль, что бесконечность требует самой высшей простоты и единства, которые никак не могут быть отделены от наивысшего совершенства бесконечного, между тем как величина должна во всех отношениях состоять из частей и требует сложности». Естественно, здесь сказывается влияние официального учения католической церкви, согласно которому мир во всех отношениях конечен, а бесконечность является исключительно лишь атрибутом бога. Однако, как известно, уже Фома Аквинский учил, что философски можно защищать как конечность, так и бесконечность пространства и времени, между тем как теологический догмат о сотворении мира является делом веры; вообще концепция существования материальной бесконечности в виде аргумента в пользу религии защищалась многими. Пожалуй, наиболее ярко выразил ее Лейбниц: «Я настолько сторонник актуальна бесконечного, что вместо того, чтобы допускать, что, как принято говорить, природа гнушается его, я придерживаюсь мнения, что она его везде любит, чтобы лучше отметить совершенства своего творца»¹¹.

В целом взгляды Бошковича на бесконечность, без сомнения, приближались к тем, к которым, согласно нашему убеждению, ведет историческое развитие математики и естественных наук и которые должна и единственно может обобщить научная философия марксизма-ленинизма. Нет доказательств существования бесконечности в природе; но понятие бесконечного не является, подобно религиозным понятиям, извращенным, фантастическим отражением действительности; оно — экстраполяционная абстракция, заменяющая «громоздкое неопределенное» и играющая вспомогательную временную роль, подобно понятию «луча» в оптике; задача науки в преодолении таких абстракций¹².

Выдвинутая нами концепция требует пересмотра прочно укоренившегося взгляда, будто с диалектическим материализмом совместимо лишь признание бесконечности материи во всех аспектах (будто, в частности, отрицание бесконечности времени ведет к креационизму), взгляда, который не считается с требованием учета нашей философией великих открытий естествознания. Так, указанная аргументация относительно времени теряет смысл, если отказаться от метафизического ньютоновского представления о «пустом» времени, не зависящем от материи.

Э. Кольман

⁹ G. G a l i l e i. Discorsi e dimonstrazioni matematiche; Leida, 1638.

¹⁰ В. И. Ленин. Материализм и эмпириокритицизм. Собр. соч., т. 14, М., 1947.

¹¹ Opera omnia studio L. Dutens. 1768, t. II, part. I, p. 243.

¹² См. также D. H i l b e r t. Über das Unendliche. Math. Ann., 1925, Bd. 95, H. 1, S. 162—190.