

Приложение

(А.В. Ляпцев, Л.А. Ларченкова, А.И. Ходанович)

Нумерация формул и рисунков в приложении для каждого из приложений своя.

Приложение 1

Листинг программы в среде Matlab к задаче

«Стрельба из пушки по цели при учете сопротивления воздуха»

```
%программа стрельбы по цели
function shooting;
close all;
k=input('k=');
v0=input('v0=');
a=input('alpha=')*pi/180;
h=input('h=');
s=input('s=');
g=9.8;
n1=20;
t0=v0*sin(a)/g; hm=g*t0^2/2; tmax=t0+sqrt(2*(hm-h)/g);
dt=tmax/(n1-1);
t1=0:dt:tmax;
X1=v0*cos(a)*t1;
Y1=v0*sin(a)*t1-g*t1.^2/2;
T0=[0,1.5*tmax];
A0=[0,0,v0*cos(a),v0*sin(a)];
options = odeset('RelTol',1e-6,'Events',@events);
[T,A,TE,AE,IE]=ode45(@f,T0,A0,options,k,g,h);
X=A(:,1); Y=A(:,2);
if k==0
    plot(X,Y,X1,Y1,'*','s,h','o');
else
    plot(X,Y,s,h,'o');
end
axis equal;
ds=min(sqrt((X-s).^2+(Y-h).^2))

function y=f(t,x,k,g,h);
y(1)=x(3);
y(2)=x(4);
v=sqrt(x(3)^2+x(4)^2);
y(3)=-k*x(3)*v;
y(4)=-k*x(4)-g;
y=y';
```

```
function [value,isterminal,direction] = events(t,x,k,g,h)
value=x(2)-h;
isterminal = 1; % stop the integration
direction = -1;
```

Приложение 2.

Движение в жидкости с «малой» вязкостью.

Как же разрешить этот парадокс? Что происходит на самом деле в пределе $\alpha \rightarrow 0$? Ответ заключается в том, что в данном случае задача оказывается не корректно поставленной. Что мы, собственно хотим узнать: насколько переместилась лодка после того, как человек закончил движение, или насколько она переместилась после того, как сама прекратила движение? То есть, что мы понимаем под конечным состоянием системы? При $\alpha = 0$ эти состояния совпадают, однако при $\alpha \neq 0$ они вовсе не обязаны совпадать. Как мы увидим ниже, противоречие разрешается, если предположить, что после того, как человек закончил движение, координата лодки оказывается не равной нулю и при достаточно малом значении α она близка к значению s , определенному формулой

$$s = \frac{ml}{M + m} \quad (1)$$

При этом импульс системы также может быть не равным нулю (лодка продолжает движение). Чем меньше значение α , тем меньше скорость лодки после окончания перемещения человека. Однако, в свою очередь, малое значение α приводит к малому торможению лодки, то есть большему значению времени до ее остановки. Все это время с момента остановки человека (относительно лодки) до остановки лодки она движется в противоположном направлении, в результате чего проходит путь, примерно равный s уже в обратном направлении.

Эти рассуждения позволяют понять, как можно разрешить парадокс, но, безусловно, не являются строгими и обоснованными. Прежде всего, возникает вопрос, что означает малость коэффициента α . Этот коэффициент имеет размерность, поэтому нужно понять, когда его можно считать малым. Например, мал ли он для обычной воды? Чтобы разобраться в этом, следует попытаться найти некоторый безразмерный параметр, пропорциональный α , который включает в себя также другие параметры задачи. Такой параметр

можно найти, исходя из соображений размерности. Для размерности коэффициента α с помощью соотношения $F_{mp} = -\alpha v$ найдем:

$$[\alpha] = [F/v] = \text{MLT}^{-2}/(\text{LT}^{-1}) = \text{MT}^{-1}.$$

Получить из коэффициента α некоторый безразмерный параметр (обозначим его через β) можно, разделив α на некоторую величину, имеющую размерность массы, и умножив на некоторую величину, имеющую размерность времени. В задаче имеются два параметра с размерностью массы m и M . Можно предположить, что по порядку величины они сравнимы (лодка не очень большая). Тогда в качестве параметра, имеющего размерность массы можно взять, например, их сумму $m+M$. Сложнее с параметром, имеющим размерность времени. В условии задачи такого параметра нет. Анализируя происходящий в задаче процесс, можно прийти к выводу, что единственным таким параметром может быть время, за которое человек перемещается по лодке с ее носа на корму. Обозначим это время через τ . Тогда для β получим выражение:

$$\beta = \frac{\alpha\tau}{m+M}.$$

Оценим этот параметр для обычной воды и некоторых разумных значений других параметров. Из опыта известно, что коэффициент вязкого трения α пропорционален коэффициенту вязкости жидкости η и некоторому параметру, характеризующему размеры тела, движущегося в жидкости. Так, например, в случае шара радиуса R , движущегося в вязкой жидкости, коэффициент α определяется формулой Стокса:

$$\alpha = 6\pi R\eta.$$

В рассматриваемом случае коэффициент α будет равен произведению коэффициента вязкости на единственный параметр, имеющий размерность длины – l и на некоторый безразмерный параметр C , который может зависеть от отношения масс m/M :

$$\alpha = Cl\eta.$$

Параметр C зависит от формы лодки. Можно предположить, что этот параметр имеет порядок, равный 10, а если и отличается от этого значения, то не более чем в 10 раз. В результате для параметра β получим выражение:

$$\beta = \frac{Cl\eta\tau}{m+M}. \quad (2)$$

Численное значение коэффициента вязкости для воды в единицах системы СИ $\eta = 0,1$. Для оценки β можно взять некоторые разумные значения остальных параметров (все в системе СИ): $l = 3$, $\tau = 5$, $m+M = 200$. Тогда для величины β получим: $\beta = 0,0075C \approx 0,008C = 0,08$. Здесь мы оставили одну значащую цифру, так как при проведении подобных оценок более точные вычисления не имеют смысла. Используя это значение, можно сделать оценку для скорости лодки в момент, когда человек закончил перемещение с носа на корму. Считая, что при таком малом значении β перемещение лодки к этому моменту практически такое же, как в случае абсолютно невязкой жидкости, и взяв для оценки значение $m = 70$ кг, получим:

$$V = \frac{s\alpha}{m+M} = \frac{sC\eta l}{m+M} = \frac{Cm\eta l^2}{(m+M)^2} \approx 0,008 \text{ м/с.}$$

Как видно из оценок для данной конкретной задачи (небольшая лодка с человеком, плавающая в воде), параметр β , характеризующий влияние вязкого трения, оказывается действительно малым. Скорость лодки после того, как человек закончил перемещение, оказывается меньше одного сантиметра в секунду. Учет вязкости в этом случае становится бессмысленным, поскольку остаются неучтенными другие явления того же порядка, например, образование волн на поверхности воды при перемещении лодки. Заметим, однако, что выражение (2) оказывается по-прежнему полезным, поскольку в него входит время перемещения человека. Если такое перемещение происходит медленно, что вполне осуществимо, то вязкость оказывается существенной. Мало того, из формулы (2) следует, что «невязкая» вода оказывается вязкой при изменении других параметров модели.

Можно, однако рассмотреть другую аналогичную задачу – перемещения небольшого жука по плавающему листу. В этом случае можно взять следующие разумные значения параметров для оценки: $l = 0,05$, $\tau = 1$, $m+M = 0,001$. Тогда для β получим: $\beta = 5C$. Как видим, в этом случае даже при малом значении параметра $C = 1$ вязкость воды оказывается существенной.

Более детальный анализ задачи можно провести, если решить дифференциальное уравнение, описывающее происходящий в задаче процесс:

$$(m+M) \frac{dV}{dt} = -\alpha v. \quad (3)$$

В этом уравнении $V = \frac{dR}{dt}$ - скорость центра масс системы (лист+жук), $v = \frac{dX}{dt}$ - скорость листа. Координата x , характеризующая положение жука относительно листа связана с координатами X и R соотношением:

$$(M + m)R = MX + m(X + x)$$

Обозначим скорость жука относительно листа через $w(t) = \frac{dx}{dt}$. Зависимость этой величины от времени определяется конкретной моделью (как именно жук перемещается). Теперь можно с помощью последнего равенства выразить скорость v через скорость V и w :

$$v = V - \frac{m}{m + M} w.$$

В результате уравнение (2) переписывается в виде:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\alpha}{m + M} V = \frac{m\alpha}{(m + M)^2} w(t).$$

Возникший в этом выражении параметр $(m+M)/\alpha$ имеет размерность времени; обозначим его через T . Физический смысл этого параметра мы обсудим позднее. Уравнение, приведенное выше, принимает вид:

$$\frac{dV}{dt} + \frac{1}{T} V = \frac{m}{(m + M)T} w(t). \quad (4)$$

Заметим, что это уравнение описывает движение листа и после того, как жук прекратил перемещение относительно листа; для этого следует просто положить $w(t) = 0$. Уравнение (4) решается стандартным методом. Вместо переменной $V(t)$ вводится переменная: $z(t) = \exp(t/T)V(t)$. Для этой новой переменной получаем уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \frac{m}{(m + M)T} w(t) \exp(t/T),$$

которое можно проинтегрировать:

$$z(t) = \frac{m}{(m + M)T} \int_0^t w(t') \exp(t'/T) dt'.$$

Возвращаясь к переменной V , получим решение уравнения (3) в виде:

$$V(t) = \frac{m}{(m+M)T} \exp(-t/T) \int_0^t w(t') \exp(t'/T) dt'. \quad (5)$$

Это решение описывает изменение скорости центра масс системы до момента, когда движение жука относительно листа прекращается, то есть до момента τ . Пользуясь теперь равенством

$$P(t) + \alpha X(t) = 0, \quad (6)$$

легко получить выражение для координаты листа в зависимости от времени:

$$X(t) = -\frac{m+M}{\alpha} V(t) = -\frac{m}{\alpha T} \exp(-t/T) \int_0^t w(t') \exp(t'/T) dt' \quad (7).$$

В момент времени τ , когда движение жука относительно листа прекратилось, скорость центра масс становится равной скорости листа (обозначим скорость в этот момент через V_0). Очевидно, что $V_0 = V(\tau)$. Смещение листа в этот момент времени равно $X_0 = X(\tau)$.

Скорость листа после прекращения движения жука находится из уравнения (3), в котором следует положить $w(t) = 0$. Решение этого уравнения дает следующую зависимость от времени:

$$V(t) = \text{const} \exp(-t/T).$$

Константа определяется из начального условия $V(\tau) = V_0$. В результате получим при $t > \tau$:

$$V(t) = V_0 \exp(-(t-\tau)/T).$$

Из последнего выражения проясняется физический смысл параметра T . Этот параметр показывает, как быстро убывает скорость листа при движении в вязкой жидкости в отсутствие движения жука. За время $\Delta t = T$ скорость листа уменьшается в e раз, за время $\Delta t = 2T$ в e^2 раз и т.д. Параметр β , определенный формулой (6), есть просто отношение τ/T . Из последнего выражения следует также, что, строго говоря, лист после прекращения движения жука никогда не остановится. Однако экспонента является быстро убывающей функцией, и через время, равное нескольким величинам T , движение лодки практически прекращается. Пользуясь вышеприведенными численными значениями для используемых в задаче величин, несложно получить оценку для T :

$$T = \frac{m+M}{C\eta l} \approx \frac{0,2}{C} \approx 0,2 \text{ с.}$$

Очевидно, что в данном случае это время оказывается сравнимым с временем τ , за которое жук перемещается по листу. Если же этот параметр рассчитать для человека и лодки, то он окажется равным

$$T = \frac{m + M}{C\eta l} \approx \frac{700}{C}.$$

Даже при достаточно большом значении константы C (порядка 10) это время составляет несколько минут и существенно превосходит время перемещения человека по лодке.

Пользуясь снова равенством (10), получим зависимость координаты лодки от времени при $t > \tau$.

$$X(t) = X_0 \exp(-(t-\tau)/T).$$

Отсюда следует, что при больших значениях t ($t \gg \tau$) координата листа (или лодки) стремится к нулю, что подтверждает разумность приведенных выше качественных рассуждений.

Конкретные результаты зависят от моделирования процесса перемещения жука по листу, то есть от вида функции $w(t)$. В простейшем случае, когда функция $w(t)$ моделируется из «кусков» линейных функций, то есть на каждом временном интервале жук движется с постоянным ускорением (в частности, с $a=0$), путем интегрирования выражений (5) и (7) могут быть получены аналитические формулы. Заметим, что полученные формулы достаточно громоздки и неудобны для исследования. При моделировании функции $w(t)$ более сложными зависимостями задача решается численными методами. При использовании численных методов оказывается более эффективным не производить численное интегрирование по формулам (5) и (7), а использовать методы численного решения дифференциальных уравнений непосредственно для решения уравнения (6).

На Рис. 1 приведены результаты численного расчета для случая, когда жук «разгоняется» по листу в течении 0,1 с, достигая скорости 0,05 м/с, затем в течении 1 с движется с постоянной скоростью, после чего «тормозит» за время 0,1 с. Остальные параметры выбраны такими: $T=1$ с, $m=M$.

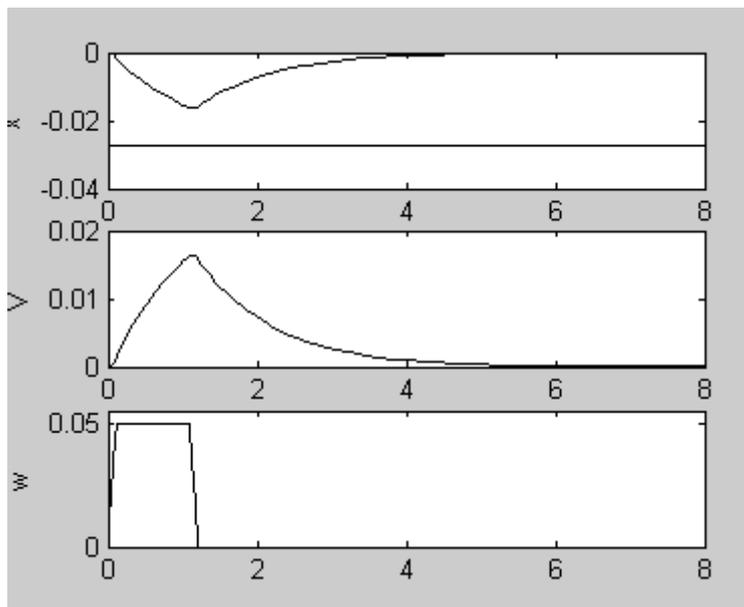


Рис
. 1.

Нижний график на Рис. 1 - зависимость скорости w от времени. На верхнем графике изображена зависимость смещения листа от времени. Отрицательный знак смещения соответствует тому, что лист смещается в сторону, противоположную направлению скорости w . Горизонтальная прямая на верхнем графике соответствует значению смещения, рассчитанного по формуле (1). Как видно из графика, максимальное (по модулю) смещение меньше почти в два раза, чем это получается в пренебрежении вязкостью воды. Поскольку время T в данном случае сравнимо с временем движения жука по листу, скорость листа после остановки жука быстро (в сравнении с временем движения жука) спадает до пренебрежимо малой величины.

На Рис. 2 приведены аналогичные графики, вычисленные при изменении параметра T до значения $T=10$, что соответствует задаче о человеке в лодке. Как видно из графиков, смещение лодки к моменту времени, когда человек заканчивает движение, приблизительно достигает значения, которое получается в отсутствие вязкости. Однако затем это смещение медленно уменьшается. Заметим, что в реальной системе модель со значением T , много большим, чем время движения человека, становится неадекватной, поскольку на больших временных интервалах начинают играть роль множества других факторов, которыми пренебрегается в данной модели.

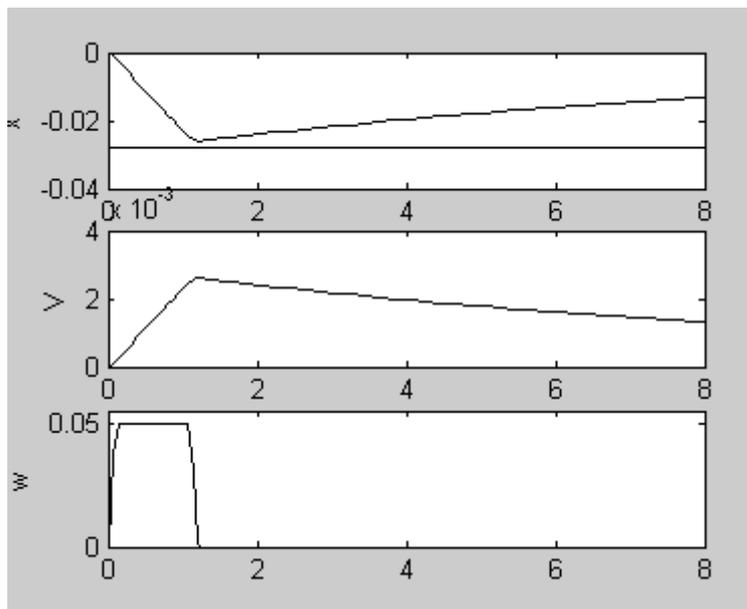


Рис
.2.

Приложение 3

Полет мух.

Для решения задачи вначале необходимо осознать, что движение первых трех мух не зависит от движения 4-й мухи. Задача о движении первых трех мух аналогична задаче о движении черепах, находящихся в углах квадрата. Модули радиальной и тангенциальной составляющей этих мух определяются выражениями (см. рис.1):

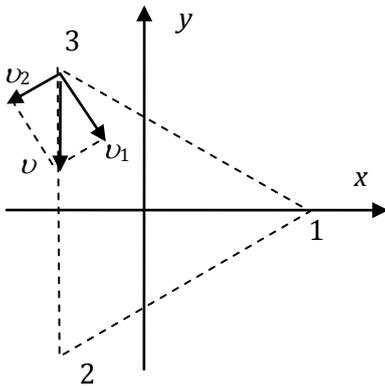


Рис.1

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} v,$$
$$v_2 = \frac{1}{2} v.$$

Мухи встретятся в центре треугольника через время:

$$t_0 = \frac{r_0}{v_1} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{a}{v_1} = \frac{2}{3} \frac{a}{v},$$

где r_0 – начальное расстояние от мухи до центра треугольника.

Вычисление координат этих мух производится через полярные координаты (r, φ) . Расстояние r до от мухи до центра треугольника изменяется по закону:

$$r(t) = r_0 - v_1 t. \quad (1)$$

Углы φ_i ($i=1, 2, 3$, см. рис.), определяющие положение i -й мухи и отсчитанные от оси x , изменяется в соответствии с законом:

$$\frac{\Delta \varphi_i}{\Delta t} = \omega,$$

где зависящая от времени угловая скорость ω связана с тангенциальной составляющей скорости соотношением:

$$\omega = \frac{v_2}{r(t)}.$$

Три последних уравнения после перехода к пределу $\Delta t \rightarrow 0$ позволяют вычислить аналитические выражения для координат первых трех мух в зависимости от времени. Однако, поскольку определение координат 4-й мухи может быть произведено лишь численно, задачу целесообразно сразу же формулировать так, чтобы можно было проводить численные вычисления, то есть одновременно вычислять угол, φ_1 , характеризующий положение 1-й мухи и координаты 4-й мухи.

Чтобы определить характер движения 4-й мухи необходимо выяснить, что произойдет раньше – встреча первых трех мух (момент времени t_0), или встреча 1-й и 4-й мухи (обозначим соответствующий момент времени через t_1). Для этого заметим, что, даже если 4-я муха будет двигаться кратчайшим путем к плоскости, в которой находятся три другие мухи, то она затратит время:

$$t_2 = \frac{h}{v} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{a}{v}.$$

Поскольку $t_2 > t_0$, то $t_1 > t_0$. Следовательно, момент встречи первых трех мух произойдет раньше встречи 1-й и 4-й мухи, и после момента времени t_0 4-я муха полетит прямым курсом со скоростью v к точке, где находятся три другие мухи (начало координат). Таким образом, численный расчет координат достаточно провести до момента времени t_0 .

Для проведения расчета необходимо вычислить вектор скорости 4-й мухи. Модуль этой скорости равен v , а направление определяется вектором перемещения от 4-й мухи к первой мухе: $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4$ (здесь и далее для обозначения векторов используем жирный шрифт). В результате вектор скорости 4-й мухи можно записать в виде:

$$\mathbf{v}_4 = v \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4|}.$$

Проекции вектора скорости \mathbf{v}_4 есть изменения соответствующих координат со временем. Таким образом, мы получаем 4 уравнения, определяющие зависимость переменных φ_1, x_4, y_4, z_4 от времени:

$$\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta t} = \frac{v_2}{r},$$

$$\frac{\Delta x_4}{\Delta t} = v \frac{x_1 - x_4}{\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + ((y_1 - y_4)^2 + z_4^2)}},$$

$$\frac{\Delta y_4}{\Delta t} = v \frac{y_1 - y_4}{\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + ((y_1 - y_4)^2 + z_4^2)}},$$

$$\frac{\Delta z_4}{\Delta t} = v \frac{z_1 - z_4}{\sqrt{(x_1 - x_4)^2 + ((y_1 - y_4)^2 + z_4^2)}}. \quad (2)$$

Переменная r в этих формулах определяется выражением (1), а переменные x_i , y_i и z_i ($i=1, 2, 3$) выражаются через переменные r и φ_1 соотношениями:

$$x_1 = r \cos \varphi_1, \quad x_{2,3} = r \cos(\varphi_1 \pm 2\pi/3),$$

$$y_1 = r \sin \varphi_1, \quad y_{2,3} = r \sin(\varphi_1 \pm 2\pi/3). \quad (3)$$

Уравнения (1) – (3) можно численно решать методом конечных разностей, аналогично тому, как решались уравнения в задаче о движении снаряда при сопротивлении воздуха. Можно в формулах (2) перейти к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, так что в левых частях равенства будут стоять производные от соответствующих переменных по времени и решать систему дифференциальных уравнений, используя стандартные процедуры вычислительных сред. Второй метод менее трудоемкий, хотя требует предварительного знакомства с вычислительными средами. Листинг программы в среде Matlab, при помощи которой получен рисунок 2, приведен ниже.

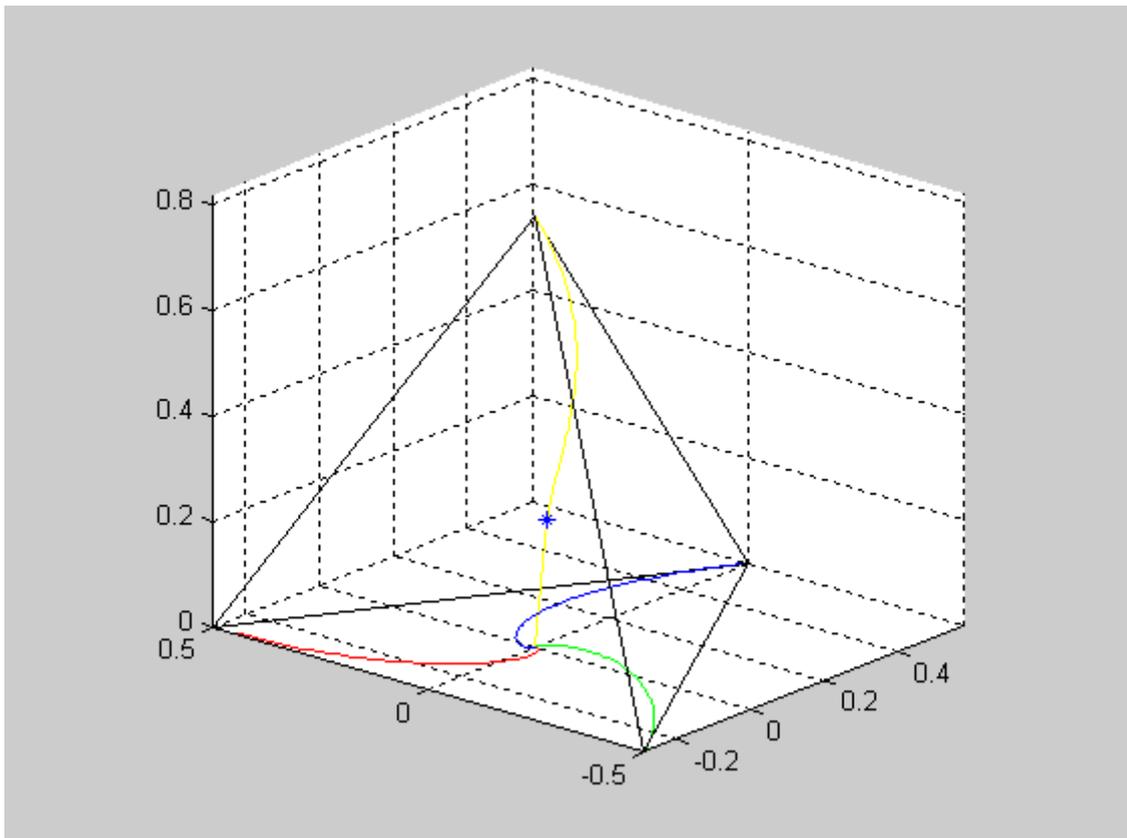


Рис.2

```

% полет мух
% A(1)=fi, A(2)=x, A(3)=y, A(4)=z
function flies;
close all
options = odeset('RelTol',1e-6);
T0=[0,2/3-1e-6];
A0=[0,0,0,sqrt(2/3)];
[T,A]=ode45(@f1,T0,A0,options);
fi=A(:,1);
r=sqrt(3)/2*(2/3-T);
x1=r.*cos(fi);
y1=r.*sin(fi);
x2=r.*cos(fi+2*pi/3);
y2=r.*sin(fi+2*pi/3);
x3=r.*cos(fi-2*pi/3);
y3=r.*sin(fi-2*pi/3);
x=A(:,2); y=A(:,3); z=A(:,4);
i0=length(T);
r0=1/sqrt(3); r1=r0*sqrt(3)/2; r2=r0/2; r3=sqrt(2/3);
Xt=[r0,-r2,-r2,r0,0,-r2,0,-r2];
Yt=[0,r1,-r1,0,0,r1,0,-r1];
Zt=[0,0,0,0,r3,0,r3,0];
x=[x;0]; y=[y;0]; z=[z;0];

```

```

z1=zeros(i0);
plot3(x1,y1,z1,'b',x2,y2,z1,'r',x3,y3,z1,'g',x,y,z,'y',x(i0),y(i0),z(i0),'*',Xt,
Yt,Zt,'k')
axis equal
grid on
%=====
function y=f1(t,x);% A(1)=fi, A(2)=x, A(3)=y, A(4)=z
y(1)=1/sqrt(3)/(2/3-t);
r=sqrt(3)/2*(2/3-t);
fi=x(1);
x1=r*cos(fi);
y1=r*sin(fi);
x0=x(2);
y0=x(3);
z0=x(4);
r0=sqrt((x0-x1)^2+(y0-y1)^2+z0^2);
y(2)=(x1-x0)/r0;
y(3)=(y1-y0)/r0;
y(4)=-z0/r0;
y=y';

```

Как видно из этого примера язык программирования сверхвысокого уровня, используемый в среде Matlab, и возможность пользоваться стандартными процедурами дают возможность написать достаточно компактную программу для довольно сложных вычислений.

Приложение 4.

Взаимодействие заряженных металлических шаров.

Вычисление силы электростатического взаимодействия можно провести на основе закона Кулона. Однако чтобы использовать закон Кулона, нужно знать, как распределены заряды по поверхности сфер, то есть какова плотность поверхностного заряда в каждой точке каждой из сфер. Подобные задачи решаются методом зеркального изображения. Например, задача о взаимодействия точечного заряда с бесконечной металлической плоскостью решается при помощи метода, в соответствии с которым металлическая плоскость заменяется зарядом с противоположным знаком, расположенным зеркально симметрично по отношению к исходному заряду. Модификацию этого метода можно применить при решении данной задачи.

Для решения задачи рассмотрим систему двух зарядов q_r и q_i , находящихся на расстоянии l друг от друга. Будем считать, что заряды разного знака и $|q_i| < |q_r|$ (Рис. 1).



Рис
. 1.

Вычислим теперь форму эквипотенциальной поверхности с нулевым потенциалом для такой системы зарядов. Она определяется из уравнения:

$$\frac{q_r}{r_r} + \frac{q_i}{r_i} = 0, \quad (1)$$

где r_r и r_i – расстояния от некоторой точки эквипотенциальной поверхности до зарядов q_r и q_i соответственно. Перепишем это равенство в виде:

$$\frac{q_r}{r_r} = -\frac{q_i}{r_i}. \quad (2)$$

Поскольку обе части равенства имеют одинаковый знак, то его можно возвести в квадрат:

$$q_r^2 r_i^2 - q_i^2 r_r^2 = 0. \quad (3)$$

Для дальнейших вычислений выберем систему координат так, как показано на Рис. 1. Пусть координаты некоторой точки на эквипотенциальной поверхности (x, y, z) , тогда равенство (3) приводится у виду:

$$q_r^2 (x^2 + y^2 + z^2) - q_i^2 ((x-l)^2 + y^2 + z^2) = 0. \quad (4)$$

Сделав некоторые преобразования, получим следующее уравнение:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x \frac{q_i^2 l}{q_r^2 - q_i^2} - \frac{q_i^2 l^2}{q_r^2 - q_i^2} = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) упрощается, если ввести новую величину:

$$l_1 = \frac{q_i^2}{q_r^2 - q_i^2} l. \quad (6)$$

Полученное уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2l_1x - ll_1 = 0$$

после простых преобразований принимает вид:

$$(x + l_1)^2 + y^2 + z^2 = l_1(l + l_1). \quad (7)$$

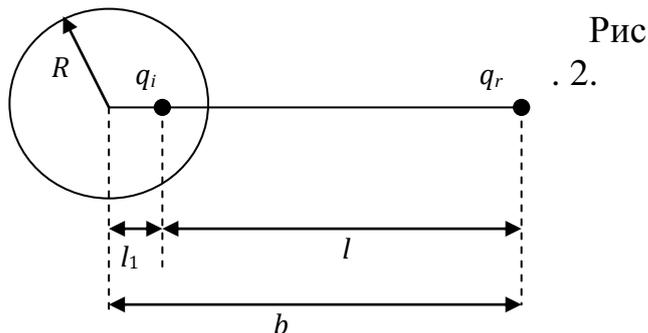
Правая часть уравнения (7) положительна, поэтому ее можно обозначить через R^2 :

$$R^2 = l_1(l + l_1). \quad (8)$$

Величину l_1 из левой части уравнения (7) можно убрать сдвигом начала отсчета по оси x , то есть, введя новую переменную $x' = x + l_1$. Мы получим окончательно уравнение:

$$x'^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (9)$$

Уравнение (9) есть уравнение сферы радиуса R , центр которой расположен в точке $x' = 0$, или $x = -l_1$ (Рис. 2).



Для дальнейших преобразований удобно ввести величину b – расстояние от центра сферы до заряда q_r . Величину l_1 можно выразить через R и b с помощью равенства (8):

$$l_1 = \frac{R^2}{b}. \quad (10)$$

С другой стороны, с помощью равенства (6), учитывая, что заряды имеют разные знаки, получим связывающее их соотношение в виде:

$$q_i = -\frac{R}{b} q_r. \quad (11)$$

Итак, мы показали, что для системы из двух разноименных зарядов эквипотенциальной поверхностью с нулевым потенциалом

является сфера, радиус и положение центра которой выражаются через величины зарядов и расстояние между ними. Проведем теперь мысленный эксперимент. Возьмем исходную систему зарядов и окружим ее металлической сферой, радиус и положение которой определены равенствами (6) и (8). Поскольку поверхность металлической сферы совпадает с эквипотенциальной поверхностью, напряженность поля и потенциал во всем пространстве не изменится. Сфера будет иметь нулевой потенциал, и после ее заземления также ничего не изменится. Далее мысленно будем передвигать заряд q_i внутри сферы. Свойства проводников таковы, что движение зарядов в полости внутри проводника не приводит к изменению поля вне проводника. Поэтому сила, действующая на заряд q_r , не будет меняться. Закончим наш мысленный эксперимент тем, что перенесем заряд q_i на внутреннюю поверхность сферы, что просто эквивалентно тому, что мы уберем заряд q_i . Таким образом, сила, действующая на заряд q_r в исходной задаче (заряды q_r и q_i , на расстоянии l (Рис. 3а)) такая же, как сила в задаче о заряде q_r , находящемся на некотором расстоянии от заземленной металлической сферы (Рис. 3б), если только параметры связаны соотношениями, которые были выведены выше.

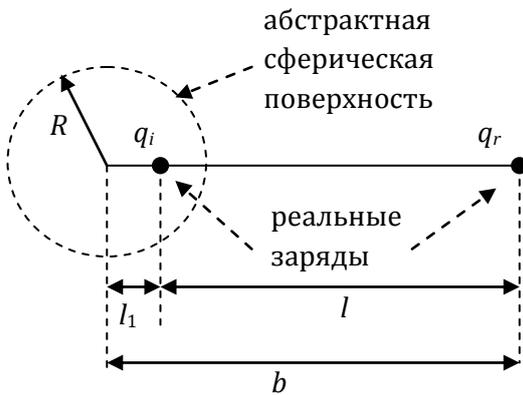


Рис. 3а.



Рис. 3б.

Но, если так, то верно и обратное утверждение. Чтобы найти силу, действующую на заряд q_r , расположенный на расстоянии b от центра металлической заземленной сферы, нужно вместо сферы построить изображение заряда q_r , то есть заряд q_i , величина и положение которого определяются формулами (11) и (10).

Заметим, что в предельном случае формулы (10) и (11) описывают задачу о точечном заряде, взаимодействующем с заземленной металлической плоскостью. Действительно, если расположение заряда q_r около сферы таково, что

$$s \equiv b - R \ll R, \quad (12)$$

то сферу можно рассмотреть как плоскость. Но при выполнении неравенства (12) заряд $q_i \approx -q_r$. Заряд-изображение находится на расстоянии от плоскости, то есть от ближайшего к нему участка поверхности сферы, равном:

$$s_0 = R - l_1 = R(1 - R/b) = R\left(1 - \frac{R}{R+s}\right) = R\left(1 - \frac{1}{1+s/R}\right) \approx R(1 - (1 + s/R)) = s,$$

то есть на том же расстоянии, что и заряд q_r .

Задача о взаимодействии заряда с заземленной сферой легко обобщается на случай, когда сфера изолирована и имеет некоторый заряд Q . В этом случае сферу можно заменить двумя зарядами, один из которых находится в центре сферы и имеет заряд $Q - q_i$ (Рис. 4). Действительно, в системе трех зарядов данная сферическая поверхность по-прежнему будет являться эквипотенциальной поверхностью. Поэтому, если мы мысленно сделаем поверхность металлической, то вне сферы электростатическое поле не изменится. Далее, мы можем повторить мысленный эксперимент, перенеся заряды внутри сферы на внутреннюю поверхность сферы. Суммарный заряд на металлической сфере станет, очевидно, равным Q .



Рис. 4а.

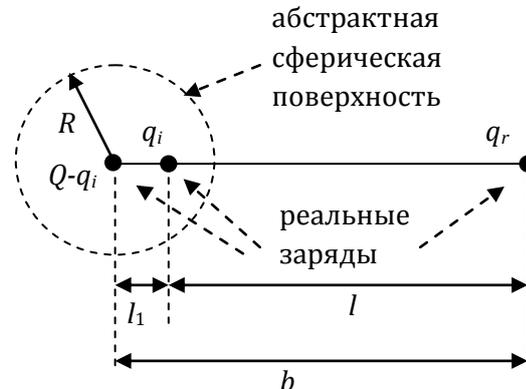


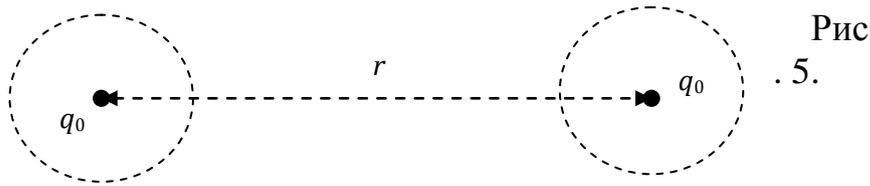
Рис. 4б.

Применим теперь рассмотренный метод для решения сформулированной задачи. Рассмотрим вначале случай одноименно заряженных сфер. Пусть расстояние между центрами сфер во много раз превышает их радиус, то есть

$$R/r \ll 1. \tag{13}$$

Тогда в некотором приближении, назовем его нулевым приближением, заряженные сферы можно заменить на заряды,

расположенные в центре сфер, и равные соответствующим зарядам на сферах (Рис. 5).



В нулевом приближении величина каждого из зарядов q_0 и сила взаимодействия между зарядами F_0 (сила отталкивания) определяются соотношениями:

$$q_0 = q, \quad (14)$$

$$F_0 = k \frac{q_0^2}{r^2}, \quad (15)$$

где q – модуль заряда на исходных сферах, k – коэффициент, определяемый системой единиц.

Следующее (первое) приближение соответствует учету того, что каждый из зарядов q_0 и $-q_0$ дает свое изображение (Рис. 6).



Величины зарядов-изображений находятся из соотношений (11):

$$q_1 = -\frac{R}{r} q_0. \quad (16)$$

Заметим, что заряды q_0 и q_1 оказываются разного знака. Очевидно, что модули этих зарядов-изображений намного меньше, чем модули зарядов q_0 . Поэтому и вклад в силу от этих зарядов будет меньше. Расстояния от зарядов-изображений первого порядка до центров соответствующих сфер определяется соотношениями, следующими из (10):

$$l_1 = \frac{R^2}{r}. \quad (17)$$

В данном первом приближении сила, действующая на левую сферу, – это сила, действующая на каждый из зарядов q_0 и q_1 со стороны зарядов противоположной сферы. Суммируя выражения для четырех кулоновских сил, получим:

$$F_1 = k \left(\frac{q_0^2}{r^2} + 2 \frac{q_0 q_1}{(r - l_1)^2} + \frac{q_1^2}{(r - 2l_1)^2} \right)$$

Однако эта сила описывает взаимодействие двух сфер с зарядом, несколько отличающимся от заряда q , а именно с зарядом:

$$Q_1 = q_0 + q_1. \quad (18)$$

Сила взаимодействия между сферами с зарядом q будет в $(q/Q_1)^2$ больше. Таким образом, выражение для силы F_1 следует подправить, введя соответствующий множитель. Тогда выражение для силы в приближении первого порядка принимает вид:

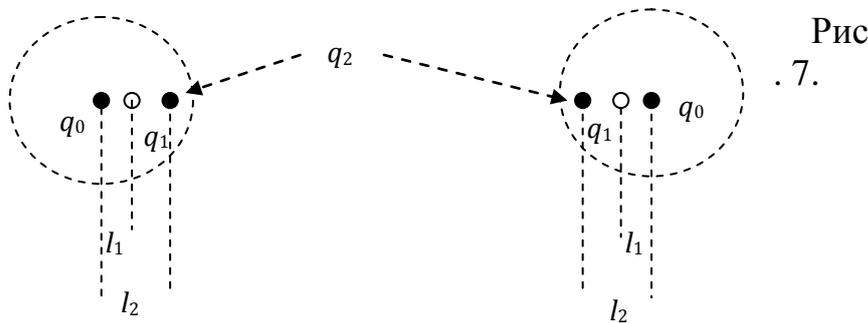
$$F_1 = k \frac{q^2}{Q_1^2} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \frac{q_i q_j}{(r - l_i - l_j)^2}, \quad (19)$$

где для удобства записи мы вводим величину l_0 , считая ее равной нулю:

$$l_0 = 0. \quad (20)$$

Таким образом, первое приближение определяется формулами (16)-(20).

Следующее (второе) приближение состоит в том, что учитываются изображения зарядов q_1 (Рис. 7).



Величины этих зарядов определяются соотношениями, аналогичными (16):

$$q_2 = - \frac{R}{r - l_1} q_1, \quad (21)$$

так что эти заряды по знаку противоположны зарядам q_1 , а по модулю меньше их. Местоположения этих зарядов (величина l_2) определяются соотношением, аналогичным (17):

$$l_2 = \frac{R^2}{r - l_1}. \quad (22)$$

При написании формул (22) и (23) мы учли, что заряд q_1 расположен от центра противоположной сферы на расстоянии, меньшем r на величину l_1 . Очевидно, что $l_2 > l_1$, как это и изображено на Рис. 6.

Теперь сила взаимодействия F_2 , будет определяться выражением, аналогичным (20):

$$F_2 = k \frac{q^2}{Q_2^2} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{q_i q_j}{(r - l_i - l_j)^2}, \quad (23)$$

где

$$Q_2 = Q_1 + q_2. \quad (24)$$

Далее эти действия можно продолжать. Каждые новые заряды-изображения будут изменять знак по отношению к предыдущим и располагаться дальше от центра соответствующей сферы. В результате можно получить следующий алгоритм расчета силы взаимодействия: на n -м шаге сила взаимодействия определяется выражением:

$$F_n = k \frac{q^2}{Q_n^2} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{q_i q_j}{(r - l_i - l_j)^2}, \quad (25)$$

где предварительно находятся следующие величины:

$$q_n = -\frac{R}{r - l_{n-1}} q_{n-1}, \quad (26)$$

$$l_n = \frac{R^2}{r - l_{n-1}}, \quad (27)$$

$$Q_n = Q_{n-1} + q_n. \quad (28)$$

На нулевом шаге следует, очевидно, положить:

$$q_0 = Q_0 = q, \quad (29)$$

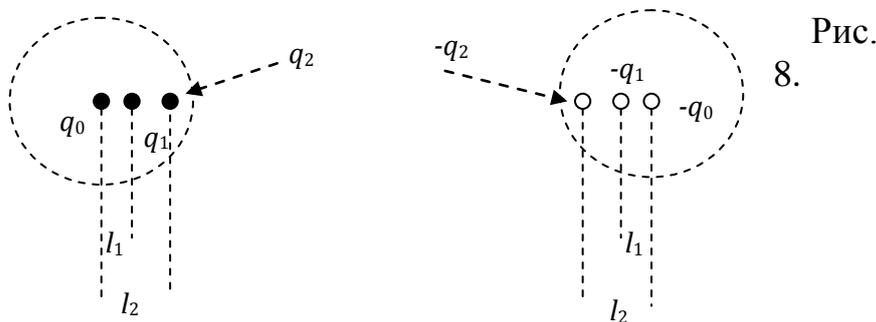
$$l_0 = 0. \quad (30)$$

Возникает вопрос, до какого шага следует производить вычисления. В данном случае число n_{max} нельзя написать заранее. При вычислениях подобного рода обычно задаются некоторой относительной погрешностью ε (например, $\varepsilon=10^{-6}$) и на каждом шаге, начиная с первого, проверяют выполнение равенства:

$$\left| \frac{F_n - F_{n-1}}{F_n} \right| < \varepsilon. \quad (31)$$

Тем самым проверяется, насколько значительный относительный вклад дает данный шаг. Вычисления прекращают, как только выполняется неравенство (31).

Что изменится, если рассмотреть силу взаимодействия разноименных зарядов? Нетрудно убедиться в том, что в этом случае все заряды внутри каждой из сфер будут одного знака. Например, на Рис. 8 изображены заряды, появляющиеся во втором приближении.



В этом случае соотношение (26) не будет содержать знака минус, то есть будет иметь вид:

$$q_n = \frac{R}{r - l_{n-1}} q_{n-1}. \quad (32)$$

Все остальные формулы, определяющие алгоритм вычисления силы, остаются теми же самыми. Естественно, что сила в данном случае есть сила притяжения.

Критерий окончания суммирования (31), вообще говоря, не дает гарантии получения разумного результата. Например, для суммы:

$$F_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m}$$

при заданной величине ε суммирование прекращается, как только величина n превышает значение $1/\varepsilon$. Тем не менее, при возрастании n сумма F_n непрерывно увеличивается и может превзойти любой заданный предел. Для того чтобы алгоритм вычисления силы сходилась и давал конечную величину при возрастании n , нужно, чтобы при $n \rightarrow \infty$ сумма F_n не превосходила некоторого значения. Покажем, что при вычислении силы по приведенным выше формулам это действительно имеет место.

Рассмотрим вначале случай, когда сферы заряжены зарядами разных знаков. Поскольку все заряды q_i в этом случае имеют один и тот же знак, имеет место неравенство:

$$\left(\frac{q}{Q_n} \right)^2 < 1$$

Из этого неравенства для величины, определенной выражением (25) следует:

$$F_n < F_n^{(1)} \equiv k \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{q_i q_j}{(r - l_i - l_j)^2}$$

Далее нетрудно показать, что величина $l_n < R$ при любом значении n . Это можно сделать, используя метод математической индукции. Действительно, $l_0 < R$. Предположим, что $l_1 < R$. Тогда из того, что $r > 2R$ следует:

$$l_n = \frac{R^2}{r - l_{n-1}} < \frac{R^2}{r - R} < \frac{R^2}{2R - R} = R$$

С учетом этих неравенств получим $r - l_i - l_j > r - 2R$ и следующее неравенство для сил:

$$F_n^{(1)} \equiv k \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{q_i q_j}{(r - l_i - l_j)^2} < \frac{k}{(r - 2R)^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j = \frac{k}{(r - 2R)^2} \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 \equiv F_n^{(2)}$$

Далее заметим, что если вместо зарядов q_n определить заряды \tilde{q}_n при помощи рекуррентных соотношений вида

$$\tilde{q}_n = \frac{R}{r-R} \tilde{q}_{n-1} \quad (33)$$

и положить $\tilde{q}_0 = q_0 = q$, то для любого n будет выполняться неравенство

$$\tilde{q}_n > q_n.$$

Отсюда следует, что:

$$F_n^{(2)} = \frac{k}{(r-2R)^2} \left(\sum_{i=1}^n q_i \right)^2 < \frac{k}{(r-2R)^2} \left(\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \right)^2 \equiv F_n^{(3)}.$$

Из рекуррентных соотношений (33) нетрудно получить явное выражение для \tilde{q}_n :

$$\tilde{q}_n = qp^n, \quad (34)$$

где $p = \frac{R}{r-R}$.

Сумма, стоящая в выражении для $F_n^{(3)}$, есть просто сумма конечного числа элементов геометрической прогрессии, которая легко вычисляется:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{q}_i = q \sum_{i=1}^n p^i = q \frac{1-p^{n+1}}{1-p}. \quad (35)$$

Поскольку $r > 2R$, то $p < 1$ и сумма (35) не превосходит значения

$$\frac{q}{1-p} = q \frac{r-R}{r-2R}.$$

В результате получаем цепочку неравенств:

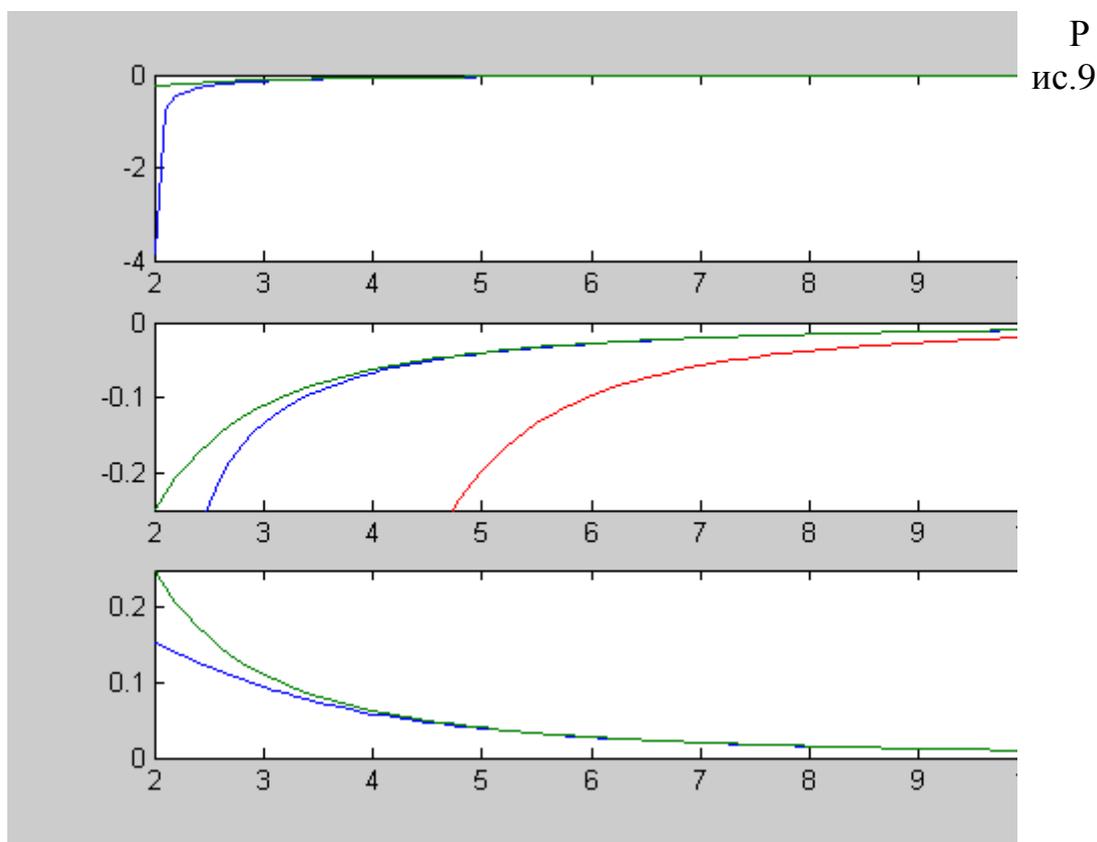
$$F_n < F_n^{(1)} < F_n^{(2)} < F_n^{(3)} < k \left(\frac{q}{(r-2R)(1-p)} \right)^2 = k \left(\frac{q(r-R)}{(r-2R)^2} \right)^2 = F_n^{(4)}. \quad (36)$$

Таким образом, мы доказали, что при сколь угодно большом значении n величина F_n ограничена значением, не зависящим от n . Это позволяет утверждать, что наша процедура вычисления силы должна сходиться к конечному пределу.

Заметим, что отдельного доказательства сходимости процедуры вычисления силы для случая одноименных зарядов не требуется. Поскольку заряды в этом случае расположены на тех же местах, но в сумме для силы часть из них приобретает другие знаки, то модуль силы отталкивания при одноименно заряженных сферах всегда меньше модуля силы притяжения при разноименно заряженных сферах.

При численных расчетах целесообразно сделать масштабное преобразование, так чтобы расстояние вычислять в единицах R , а силу - в единицах kq^2/R^2 . Это эквивалентно тому, что во всех формулах следует положить $R=1, q=1$. При этом следует рассматривать значения r , большие 2. Результаты расчетов, проведенных по формулам (25) – (32), целесообразно сравнить с кулоновской силой взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на тех же расстояниях друг от друга, что и центры сфер. Модуль такой кулоновской силы при значении $r=2$ (в новых единицах) имеет значение 0,25. Полезно также сравнить силу притяжения разноименно заряженных сфер с силой $F_n^{(4)}$, определенной в выражении (37).

Графики, иллюстрирующие результаты численного расчета, приведены на Рис. 9.



На верхнем графике приведены сила взаимодействия разноименно заряженных сфер (нижняя кривая) и сила

взаимодействия двух точечных зарядов. Отрицательные значения силы соответствуют притяжению. Заметим, что если исходить из физического смысла, то сила притяжения между сферами при $r \rightarrow 2$ по модулю неограниченно возрастает, поскольку при этом положительный и отрицательный заряды сближаются на бесконечно малое расстояние. Поэтому вычисление ограничено величиной $r_{min}=2,01$.

На среднем графике те же величины приведены в ограниченном масштабе по вертикальной оси. Минимальное значение силы ограничено соответствующим значением для двух точечных зарядов. Самая нижняя кривая соответствует значению силы $F_n^{(4)}$.

На нижнем графике изображены значения силы отталкивания двух одноименно заряженных сфер (нижняя кривая) и двух точечных зарядов.

Листинг программы расчета, написанный в среде Matlab, приведен ниже.

```
% взаимодействие заряженных сфер
function y=spher(x);
r=2.1:0.1:10;
r=[2.01 r];
fc=1./r.^2;
fmax=-((r-1)./(r-2).^2).^2;
ff=zeros(size(r));
[mr,nr]=size(r);
for m=nr:-1:1
    rr=r(m);
    n=1;
    q(n)=1;
    x(n)=rr/2;
    dfp=1;
    dfm=1;
    while (dfp>1e-6)|(dfm>1e-6)
        n=n+1;
        x(n)=rr/2-1/(rr/2+x(n-1));
        q(n)=-q(n-1)/(rr/2+x(n-1));
        Qp=sum(q);
        Qm=sum(abs(q));
        fp(n)=0;
        fm(n)=0;
        for i=1:n
            for j=1:n
                fp(n)=fp(n)+q(i)*q(j)/(x(i)+x(j))^2;
```

```

        end
    end
    for i=1:n
        for j=1:n
            fm(n)=fm(n)+abs(q(i)*q(j))/(x(i)+x(j))^2;
        end
    end
    fp(n)=fp(n)/Qp^2;
    fm(n)=-fm(n)/Qm^2;
    dfp=abs(fp(n)-fp(n-1));
    dfm=abs(fm(n)-fm(n-1));
end
ffp(m)=fp(n);
ffm(m)=fm(n);
n=n;
Qp=Qp;
Qm=Qm;
subplot(3,1,1)
plot(r,ffm,r,-fc)
subplot(3,1,2)
plot(r,ffm,r,-fc,r,fmax)
axis([2 10 -0.25 0]);
subplot(3,1,3)
plot(r,ffp,r,fc)
axis([2 10 0 0.25]);
drawnow
end

```